

Desempeño de las administradoras de fondos de pensiones y mecanismo de selección basado en la probabilidad de pérdida

Juan Carlos Ames Santillán

Agencia de Promoción de la Inversión Privada (Proinversión)
Dirección de Promoción de Inversiones

El presente trabajo desarrolla una nueva metodología para la selección de fondos gestionados por las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP), basada en la probabilidad de pérdida del afiliado. La metodología incorpora el efecto del desempeño histórico de la gestión del portafolio, en el período marzo 2006-mayo 2013, y lo hace en la proyección de la rentabilidad esperada al vencimiento o edad de jubilación del afiliado.

Palabras clave: AFP, Simulación de Montecarlo, series estacionarias, probabilidad de pérdida, gestión y desempeño de fondos, finanzas

Historical pension funds performance and application of a selection criteria based on the probability of loss

This paper proposes a new methodology for selecting a pension fund base on the probability of loss for its customers. The methodology includes the historical performance of the portfolio between, March 2006 and May 2013, and projects its profitability either to maturity or to the customer's retirement age.

Keywords: AFP, Monte Carlo Simulation, stationary series, probability of loss, funds management, funds performance, finance

O desempenho das administradoras de fundos de pensão e o mecanismo de seleção baseado na probabilidade de perda

Este trabalho desenvolve uma nova metodologia para a seleção dos fundos geridos pelas Administradoras de Fundos de Pensão (AFP), com base na probabilidade de perda do afiliado. A metodologia considera o efeito do desempenho histórico na gestão das carteiras de março de 2006 até maio de 2013, e o inclui na projeção da taxa de rendimento esperada ao vencimento ou até a idade para aposentadoria do afiliado.

Palavras-chave: AFP, simulação de Monte Carlo, séries estacionárias, probabilidade de perda, gestão e desempenho dos fundos, finanças

Introducción

Las administradoras de fondos de pensiones (AFP) en Perú juegan un papel muy importante en el ahorro previsional. Los afiliados a estas realizan aportes en cuentas de capitalización individual, los fondos captados son administrados, constituyéndose para tal fin fondos de inversión gestionados profesionalmente. A cambio, los afiliados pagan una comisión de gestión mensual (incluida la prima de seguro). Cabe anotar que las AFP se encuentran reguladas por la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS).

En la tabla 1, se muestran los fondos administrados por las AFP al 31 de mayo de 2013, que ascienden a US\$ 36 mil millones —S/. 98 mil millones—, equivalentes al 18,7% del PBI nominal del 2012 (Ministerio de Economía y Finanzas, 2013). De ellos, la mayor concentración (69% del total) está en el fondo 2; el 20% del total se da en el fondo 3; y, por último, el 11% del total se encuentra en el fondo 1.

Tabla 1. Fondos administrados por las AFP al 31/05/2013 (en millones de US\$)

AFP	Fondo 1 US\$	Fondo 2 US\$	Fondo 3 US\$	Total US\$	%	Afiliados activos
Horizonte	1103	5910	1514	8527	23,7	1,42
Integra	1260	7386	2099	10745	29,9	1,35
Prima	1246	7409	2567	11221	31,2	1,47
Profuturo	560	3920	950	5430	15,1	1,15
Total	4168	24625	7129	35922	100,0	5,39
%	11,6	68,5	19,8	100,0		

Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS), 2009b. Elaboración propia.

El total de afiliados activos al sistema privado de pensiones, al 31 de mayo de 2013, asciende a 5,39 millones, lo cual equivale al 33,4% de la población económicamente activa (Ministerio de Trabajo y Promoción del Empleo, 2013) al cierre del año 2012 y

al 17,9% de la población total (Instituto Nacional de Estadística e Informática, s.f.). En cuanto al total de fondos administrados por las AFP, la mayor concentración se encuentra en AFP Prima, con 31% del total.

Los afiliados pueden elegir la AFP y tipo de fondo (1, 2 y 3) señalados en la tabla 1, a partir de criterios como la aversión al riesgo y la edad del afiliado. De acuerdo con lo señalado por la SBS (2014), los criterios para la constitución de los fondos son los siguientes:

- Fondo de pensiones tipo 1 o de preservación de capital. Presenta un límite máximo de 10% del valor del fondo invertido en instrumentos de renta variable, un máximo de 100% del valor del fondo invertido en instrumentos de renta fija mayores a un año, hasta 10% del valor del fondo invertido en instrumentos derivados para cobertura y hasta 40% del valor del fondo invertido en instrumentos de corto plazo o activos en efectivo.
- Fondo de pensiones tipo 2 o fondo mixto. Cuenta con inversiones equivalente a 45% del valor del fondo como máximo, invertido en activos de instrumentos de renta variable. Asimismo, tiene un máximo de 75% del valor del fondo invertido en instrumentos de renta fija mayores a un año, hasta 10% del valor del fondo en instrumentos derivados para cobertura, y hasta 30% del valor del fondo en instrumentos de corto plazo o activos en efectivo.
- Fondo de pensiones tipo 3 o fondo de apreciación de capital (fondo de crecimiento). Está compuesto como máximo por instrumentos de renta variable equivalentes a 80% del valor del fondo. El 70% del valor del fondo como máximo debe estar invertido en instrumentos de renta fija mayores a un año. De igual modo, hasta 20% del valor del fondo como máximo debe invertirse en instrumentos derivados para cobertura, y un máximo de 30% del valor del fondo corresponderá a instrumentos de corto plazo o activos en efectivo.

El presente trabajo desarrolla una herramienta para seleccionar el tipo de fondo y AFP, basándose en un criterio que minimiza la probabilidad de pérdida del afiliado. Cabe anotar que esta se entiende como la probabilidad de que la rentabilidad esperada al vencimiento (al momento de jubilación) sea menor a un nivel de rentabilidad mínimo exigido. A partir de ello, se incorpora la variable gestión de los fondos para determinar dicha probabilidad.

1. Marco de referencia

Dentro del análisis de las principales variables del sistema previsional peruano, no se han desarrollado índices unidimensionales que sean usados como herramientas para evaluar de forma integral el desempeño de los fondos administrados por las AFP, desde una perspectiva del afiliado. Actualmente, las herramientas más utilizadas por el lado de las AFP están enfocadas en la rentabilidad histórica obtenida en sus fondos administrados. En ese marco, se selecciona períodos de comparación entre estas, de forma que sea un soporte a sus estrategias comerciales de captación de afiliados. Asimismo, al momento de evaluar cuál fondo es más conveniente, las AFP realizan recomendaciones generales. En algunos casos, llevan a cabo encuestas que incluyen preguntas sobre el nivel de aversión al riesgo para recomendar el tipo de fondo más conveniente.

Por el lado de la regulación, la SBS (2012a, c y d) ha enfocado sus esfuerzos en alentar la competencia entre las AFP para lograr la reducción de comisiones. En este contexto, se ha planteado y viene implementándose el sistema de comisión por saldo (cobro de comisión de gestión sobre el saldo acumulado). Este último reemplazaría gradualmente al actual sistema de comisión por flujo (cobro de comisión de gestión sobre la remuneración percibida).

El concepto de índice unidimensional, que permite a los afiliados medir el desempeño de las administradoras de fondos de pensiones, ha sido planteado en trabajos como los de Valdés (1992) y Berstein y Castro (2005) para el mercado chileno de AFP. De acuerdo con ello, se determina la rentabilidad neta de comisiones (tasa interna de retorno o TIR) obtenida por el afiliado en un período de tiempo. En cuanto a la proyección de la rentabilidad neta obtenida para un determinado período, esta considera ciertos supuestos sobre la rentabilidad futura de los portafolios gestionados por las AFP. Respecto a ello, se debe tener en cuenta que estos retornos son fijos en la proyección.

Cabe anotar que, en estos trabajos, se determina la rentabilidad neta como la rentabilidad al vencimiento (TIR), que —a su vez— depende de la rentabilidad obtenida por las AFP en su gestión de los fondos previsionales menos las comisiones que paga el afiliado por la gestión de dichos fondos. Dentro de este esquema, la TIR obtenida es el índice unidimensional a ser utilizado por el afiliado para la toma de decisiones.

En el presente trabajo, se desarrolla una nueva metodología, que permite obtener un indicador unidimensional comprensible para el afiliado, el cual contiene la siguiente información:

- a) El desempeño histórico de las AFP en la gestión de los fondos previsionales
- b) Una proyección de rentabilidad que obtendrían las AFP en su gestión de los fondos previsionales, que considera su naturaleza aleatoria
- c) El costo de oportunidad de los fondos
- d) La proyección de comisiones a pagar
- e) Los supuestos intrínsecos al afiliado (remuneración, frecuencia de aportación, entre otros), resumido en un número denominado *probabilidad de pérdida del afiliado*

Bajo este nuevo indicador, se determina cuál es la probabilidad de pérdida de dinero en determinado tipo de fondo. En esta línea, una mayor probabilidad implica un mayor riesgo respecto a los demás fondos.

Ahora, este nuevo indicador, en la proyección de rentabilidad obtenida por las AFP, no considera que las rentabilidades son fijas en el horizonte de proyección. Por el contrario, considera que son variables aleatorias, cuyos parámetros y tipo de distribución se obtienen a partir de la distribución de probabilidad de los retornos históricos. Dentro de este marco, se parte del supuesto de que los retornos futuros replican el comportamiento aleatorio pasado.

Metodológicamente, el asumir la aleatoriedad de los retornos futuros ha sido utilizado por Munnell y otros (2013), para proyectar el nivel de solvencia futura de los fondos previsionales en Estados Unidos. En función de ello, construye portafolios conformados con información histórica de instrumentos de renta fija y variable. Se debe anotar que una metodología similar ha sido utilizada por Alonso y otros (2010) para proyectar los niveles de rentabilidad que obtendrían las AFP en el mercado colombiano bajo un esquema de multifondos (fondos con inversión en renta fija y variable).

Para la construcción del indicador propuesto, no ha sido necesario construir a priori portafolios con información histórica de instrumentos de renta fija y variable, que repliquen los retornos que se obtendrían en estos mercados. Ello responde a que se dispone de información histórica de los valores cuota de los fondos administrados por las AFP. Estos contienen información sobre los precios de los instrumentos en los que invierten las AFP en cada tipo de fondo (1, 2 y 3).

2. Análisis de la bibliografía revisada

Munnell y otros (2013) realiza un estudio sobre proyecciones de rentas de jubilación para fondos de pensiones locales y estatales en Estados Unidos. Para determinar las rentas de jubilación, tomó en cuenta proyecciones de retornos de inversión de los fondos con el supuesto de que estos se comportan de forma estocástica en el horizonte de proyección. Para definir las distribuciones de probabilidad de los retornos, consideró que estas se determinan a partir de portafolios de inversión, cuya rentabilidad depende de los retornos de instrumentos de renta fija y variable. Para tal efecto, utilizó información histórica del período 1955-2012.

El estudio utiliza la simulación de Monte Carlo para obtener distribuciones de probabilidad de las rentas de jubilación, para lo cual se sirve, como insumo, de las distribuciones de probabilidad de los retornos de los fondos. Ello lo realiza con el objetivo de proyectar el desempeño del ratio fondeo agregado (medida de solvencia de fondos de pensiones) para fondos de pensiones locales y estatales. La importancia de esta investigación es que plantea una alternativa metodológica basada en métodos estocásticos para determinar los retornos que serán utilizados en las proyecciones, en lugar de servirse del supuesto de retornos constantes (análisis determinista).

Por su parte, Mendiola y otros (2013) realizan una proyección de rentabilidad real neta de comisiones de los fondos administrados en el Sistema Privado de Pensiones en Perú, para un período de 40 años, con periodicidad mensual. Ello se sitúa en 5,97% anual. Como paso previo, realiza un análisis de rentabilidad histórica para el período diciembre 2005-diciembre 2011. Para ello, determina el índice de Sharpe de los fondos administrados por las AFP. De este modo,

concluye que los fondos de menor riesgo (fondo 1) han sido los de mejor desempeño —en relación con los fondos de mayor riesgo (fondos 2 y 3)—, y propone alternativas para incrementar el retorno obtenido por el afiliado.

Desde otra arista, Medina y otros (2013) analizan el efecto sobre la rentabilidad que tiene para el afiliado la comisión de gestión cobrada por las AFP en el mercado chileno. Para ello, evalúan la información histórica disponible sobre rentabilidad obtenida, comisiones, entre otros. Sobre esta base, concluyen que lo esperado es que la AFP con la comisión cobrada por su gestión logre la mayor rentabilidad posible para sus afiliados. No obstante, de acuerdo con los resultados obtenidos, no se encuentra evidencia para afirmar irrefutablemente que las comisiones influyan en las rentas de los distintos fondos.

La SBS (2012b) en sus anexos técnicos 1 y 2 desarrolla una metodología para comparar las comisiones por flujo y por saldo de los fondos administrados por las AFP. En función de ello, realiza proyecciones de rentabilidad y establece supuestos de densidad de cotización, crecimiento de salario real, edad de afiliación al sistema previsional, rentabilidad real anual esperada del fondo de pensiones (la cual es fija y puede seleccionarse entre 5%, 6% y 7%). De este modo, se aprecia que la rentabilidad es atribuida a priori a cada alternativa de inversión (AFP y tipo de fondo). Dentro de este marco, se asume implícitamente que todos los fondos de las AFP tienen la misma rentabilidad, que es constante en el horizonte de proyección.

Para el caso colombiano, tenemos el estudio de Alonso y otros (2010). Con la finalidad de proyectar el desempeño futuro de las inversiones de los fondos de pensiones administrados por las AFP del mercado colombiano, realizan un ejercicio de proyección del

precio de las principales clases de activos de los fondos de pensiones: renta fija y renta variable en distintos horizontes de inversión que van de uno a cincuenta años. En esa línea, utilizan la simulación de Monte Carlo. Ciñéndose a la teoría del paseo aleatorio que subyace sobre los precios de los activos financieros, modelan las series de tiempo de estos activos, basados en información histórica de precios de instrumentos de renta fija y variable. Para tal efecto, se consideran los precios como variables aleatorias bajo un esquema multiplicativo, como se muestra en la fórmula (1):

$$P_t = P_o \times e^{gT} \quad (1)$$

En esta, P_t corresponde al precio del activo en el momento t , incrementado de manera exponencial a una tasa de retorno «g» en un horizonte de «T» años. Respecto a «g», una hipótesis es que se comporta como una variable aleatoria de distribución normal con media y varianza constante. Como resultado de las simulaciones, se obtienen los valores esperados de la rentabilidad anual real de los afiliados a las AFP, bajo el supuesto de que la composición de los portafolios incluye más participación de instrumentos de renta fija (menos de renta variable), a medida que aumenta la edad del afiliado (mayor proximidad a su jubilación). Finalmente, sobre la base de distintos escenarios y supuestos, se determinan las tasas de reemplazo (relación entre el último salario recibido en la vida laboral y la renta recibida en la jubilación).

Desde otra perspectiva, Wojt (2009) desarrolla un estudio sobre la estimación de modelos alternativos al clásico modelo de riesgo de portafolio de media-varianza. Dichos modelos se basan en que los parámetros propuestos para medir el riesgo del portafolio son la media y la semivarianza (del inglés *Lower Partial Moments*). Esta última considera el supuesto de que la distribución de probabilidad de los retornos no

siempre es simétrica y, en esa medida, puede existir un sesgo en la estimación de la varianza.

El supuesto básico para sustentar el cálculo de la semivarianza en distribuciones de probabilidad de retornos no simétricos es que a los inversionistas les interesa minimizar la volatilidad que proviene de los retornos negativos. La volatilidad de los retornos positivos es deseada. Cuando una distribución de probabilidad es simétrica, es indiferente estimar la semivarianza con la clásica varianza; no obstante, cuando no hay simetría, el escenario cambia.

DeMiguel y otros (2009) encuentran evidencia de que, en el problema que se presenta para estimar el riesgo de un portafolio, la estrategia de invertir la misma proporción en todos los activos que conforman un portafolio (estrategia simple o *naive* en inglés) es más eficiente que la estimación de riesgo de portafolios basados en el enfoque de media varianza y sus extensiones. Por ello, recomiendan buscar métodos alternativos de estimación. En tal sentido, se debe tomar tiempo para identificar metodologías de estimación del riesgo de un portafolio, basándose en los momentos de los retornos de los activos que lo componen.

Bernal y otros (2008) realizan proyecciones a nivel macro de los principales indicadores del sistema previsional peruano para el año 2050 (tanto del Sistema Nacional de Pensiones como del Sistema Privado de Pensiones). Para ello, utilizan información sobre las variables macroeconómicas y demográficas; entre estas, la evolución del producto, productividad laboral y población. Entre otros supuestos importantes para su proyección, se basan en el nivel de informalidad de la economía, crecimiento de salarios, desempleo, edad de entrada al sistema previsional, tasa de aporte, edad de jubilación, tasa de reemplazo, densidades de

cotización, nuevos afiliados, rentabilidad real (4% anual para el Sistema Nacional de Pensiones y 6% anual para el Sistema Privado de Pensiones), tasa de interés pasiva 4% anual, diferencia de edad con el cónyuge, actualización de pensión mínima y tablas de mortalidad.

Cabe señalar que, para las proyecciones de rentabilidad, se consideran que los retornos obtenidos por los fondos previsionales son constantes. A partir de ello, se observa que, para el año 2050, el porcentaje estimado de jubilados es del 42% (23% para inicios de la proyección); y la cifra de personas no cubiertas por un sistema previsional asciende al 58% (77% a inicios de la proyección).

Zanabria (2007), por su parte, resalta el rol fundamental de los modelos de gestión de riesgo —también, llamados modelos de atribución de desempeño de los administradores de portafolios— y de las inversiones realizadas, como en el proceso de planteamientos de estrategias de inversión. De igual modo, este autor desarrolla un conjunto de indicadores para medir la gestión de portafolios, en un contexto de gestión activa de portafolios.

Berstein y Castro (2005) analizan los indicadores de rentabilidad neta de costos de gestión para el mercado de AFP chileno, con la finalidad proporcionar información a los afiliados, de modo que puedan tomar mejores decisiones al seleccionar la AFP más apropiada y facilitar la competencia entre AFP. En esa línea, desarrollan el concepto de TIR personalizada como una alternativa exacta para determinar la rentabilidad neta de costos de gestión de las AFP. Este indicador se calcula considerando exclusivamente información histórica de costos y rendimientos obtenidos por las AFP. Sin embargo, puede proporcionar resultados que podrían ser erróneamente interpretados, dado que —en los primeros años de aportes— las personas que

recién inician su vida previsional normalmente presentan retornos netos negativos.

Alternativamente y para complementar el indicador anterior, Berstein y Castro (2005) implementan el indicador de rentabilidad neta de un ciclo de vida. Este supone una proyección a futuro de la rentabilidad promedio obtenida a lo largo del ciclo de vida del afiliado, lo cual es útil para personas que se mantienen durante mucho tiempo en una AFP.

Un punto relevante de este estudio es que —según se obtuvo en las simulaciones— escoger la AFP en función de la mejor rentabilidad bruta (sin considerar comisiones de gestión) no es sustancialmente peor que hacerlo por rentabilidad neta personalizada. Asimismo, a partir del análisis, se concluye que aquellos afiliados que recién empiezan su vida laboral deberían afiliarse a la AFP más barata, mientras que aquellos con un gran saldo deberían fijarse en la rentabilidad bruta.

Gurovich (2005) desarrolla un análisis del desempeño de los fondos mutuos en el sistema de pensiones chileno. Realiza un *benchmark* por grupos y clases de activos, e incorpora en su análisis el retorno obtenido y el riesgo asociado. Para ello, utiliza la estimación de la frontera eficiente restringida por tipo de fondo y el ratio de Sharpe. En esa línea, considera que las restricciones a la inversión por cada tipo de fondo le restan eficiencia para lograr un adecuado balance riesgo-retorno.

Para el caso peruano, Castillo y Lama (1998) determinan el nivel de eficiencia en la gestión de portafolios de los fondos mutuos y fondos de pensiones en el mercado, y explican las razones por las que existen diferencias en la calidad de la gestión de fondos. Para ello, desarrollan los indicadores relevantes, de modo que sea posible medir el desempeño de la gestión de

fondos; entre estos, el ratio de Sharpe. El período que se tomó para evaluar el desempeño de los fondos de las AFP fue de junio de 1994 a junio de 1997. A partir de ello, se observa que las AFP más rentables son las que presentan menor riesgo relativo, y las AFP con rendimientos muy volátiles ofrecen menor rentabilidad que las AFP con menor riesgo.

Valdés (1992) analiza los aspectos relevantes de la capacidad del afiliado para elegir la AFP y cambiarse en cualquier momento del tiempo en el mercado de AFP chileno. Además, desarrolla índices para informar mejor al afiliado en su proceso de selección de la AFP que más le convenga. El estudio se basa en un análisis de la rentabilidad histórica neta, que hubiese obtenido el afiliado al elegir determinada AFP. Dentro de ese marco, evalúa la posibilidad de desarrollar un índice unidimensional que resuma la información histórica para el afiliado a nivel de grandes grupos. Asimismo, realiza una proyección de rentabilidad futura, para lo cual incorpora el concepto de la TIR del afiliado. Para determinarlo, lleva a cabo proyecciones sobre los retornos obtenidos por las AFP, que consideran escenarios bajo, alto y normal. Estos retornos son fijos (no estocásticos) a lo largo de la proyección.

Finalmente, se debe mencionar el estudio de Fishburn (1977), que considera un modelo de dominancia de riesgo y retorno, en el cual el riesgo es medido por una función de probabilidad ponderada de las desviaciones debajo de un retorno objetivo especificado.

3. Alcance del estudio

El presente estudio se enfoca en desarrollar la metodología para construir el indicador de probabilidad de pérdida. En ese contexto y para lograr su validación, se contrastan las siguientes hipótesis:

- a) El criterio de selección de AFP y tipo de fondo basado en la probabilidad pérdida no necesariamente brinda resultados consistentes con los métodos de selección basados en el desempeño histórico.
- b) Los retornos históricos de los fondos administrados por las AFP en el período marzo 2006-mayo 2013 se distribuyen normalmente y sus series de tiempo son estacionarias, independientemente de si se considera el efecto octubre de 2008 (inicio de la crisis financiera internacional).
- c) Los retornos esperados al vencimiento, netos de comisiones, obtenidos por los afiliados, se distribuyen normalmente independientemente del tipo de distribuciones de probabilidad asumidas para su estimación, con y sin el efecto de octubre de 2008 (inicio de la crisis financiera internacional).
- d) La rentabilidad neta de comisiones de los fondos administrados por la AFP es sensible a las comisiones de gestión cobradas; a mayor comisión, debe corresponder una menor rentabilidad neta.
- e) El riesgo de que los fondos 1, 2 y 3 administrados por las AFP no superen la rentabilidad de un portafolio *benchmark* internacional es bajo.

Es necesario precisar —con la finalidad de explicar la metodología— que los cálculos de la probabilidad de pérdida realizados en el presente artículo se corresponden a información personalizada, de acuerdo con un afiliado determinado con los supuestos señalados en la modelización financiera. Asimismo, cabe anotar que no se ha considerado los efectos de la venta de AFP Horizonte ni las nuevas modificaciones al marco regulatorio —reforma del sistema privado de pensiones, comisiones y edad de jubilación—, debido a que estas no proporcionan información histórica suficiente.

4. Planteamiento del modelo

4.1. Probabilidad de pérdida

Para la verificación de la hipótesis b), se realizan los análisis de las series de tiempo de los retornos históricos aplicando el test de raíces unitarias (verificar si las series de tiempo son estacionarias) y el test de normalidad de los retornos. En esa línea, se aplican los test de Dickey Fuller aumentado (ADF) y de Jarque Bera respectivamente.

Con los resultados obtenidos en b), se seleccionan las distribuciones de probabilidad de los retornos apropiados para la determinación de la distribución de probabilidad de la rentabilidad esperada neta de comisiones (TIR) y se determina la probabilidad de pérdida del afiliado.

La expresión matemática general propuesta en el presente estudio, para determinar la rentabilidad esperada al vencimiento (TIR) de invertir en un determinado fondo (1, 2 o 3) administrado por una AFP, ha sido construida utilizando como una referencia a Alonso y otros (2010) para el lado izquierdo de la expresión. Para el lado derecho de la expresión, se parte de la fórmula general de la TIR, cuya expresión matemática es la que se muestra en la fórmula (2):

$$\sum_{i=0}^n A_i \prod_{i=0}^n (1 + r_{i+1}) = \sum_{i=0}^n (A_i + C_i)(1 + TIR)^{(n-i)} \quad (2)$$

Si $i = n$ entonces $r_i = 0$, además:

Donde:

A_i : Es el aporte al fondo de pensiones del afiliado en el mes. Este aporte es un porcentaje de la remuneración bruta del afiliado al sistema privado de pensiones. En los meses en los que el trabajador no aporte, se considera que es cero.

- C_i : Es el nivel de comisiones que paga el afiliado a la AFP en el mes, por concepto de gestión. Ello incluye las comisiones de gestión propiamente y no contempla la prima de seguro. Cabe anotar que equivale a un porcentaje de la remuneración bruta. En los meses en los que el trabajador no aporta al fondo, equivale a cero.
- r_{i+1} : Es la rentabilidad obtenida en el mes. Es una variable aleatoria cuyos parámetros han sido determinados del análisis de sus respectivas series de tiempo.
- TIR : Es la rentabilidad mensual esperada al vencimiento, neta de comisiones de gestión, que se espera obtener al momento de la jubilación. Es el resultado de la capitalización de los aportes del afiliado; constituye la variable aleatoria a ser evaluada para la determinación de la probabilidad de pérdida. Su distribución de probabilidad es obtenida a través de la simulación de Monte Carlo.
- n : Corresponde al número de meses comprendidos desde que el afiliado hace su primer aporte a la AFP (o desde que realiza el cambio de AFP) hasta el momento de su jubilación.

El lado izquierdo de la expresión matemática general expresa el fondo de jubilación acumulado. Este equivale al valor futuro de todos los aportes que realiza el afiliado durante el plazo comprendido desde su primer aporte (o fecha de cambio de AFP) hasta su último aporte previo a la recepción de su pensión de jubilación. Los aportes realizados se capitalizan considerando una rentabilidad mensual variable. Asimismo, cabe anotar que los aportes pueden ser variables dependiendo de la remuneración bruta percibida y de la situación laboral del afiliado (empleado o desempleado).

En cuanto al fondo de jubilación acumulado, este es igual al valor futuro de todos los aportes y pagos de

comisiones de gestión mensuales que realiza el afiliado, capitalizados a la tasa interna de retorno (TIR) mensual, lado derecho de la expresión matemática general.

La probabilidad de pérdida se determina de acuerdo con la siguiente fórmula (3):

$$Prob(TIR < r_e) = k \quad (3)$$

Donde:

R_e : Rentabilidad esperada es el objetivo de rentabilidad mínimo que se espera obtener en la AFP. Se define también como el costo de oportunidad de invertir los fondos de jubilación en una inversión alternativa, dado que la TIR obtenida expresa la rentabilidad de largo plazo, para entender la consistencia en la evaluación. La rentabilidad esperada representa el costo de oportunidad de largo plazo.

k : Es la probabilidad obtenida, que se interpreta como la probabilidad de que el rendimiento al vencimiento (TIR) —obtenido en la AFP y fondo seleccionados— sea menor al costo de oportunidad del afiliado.

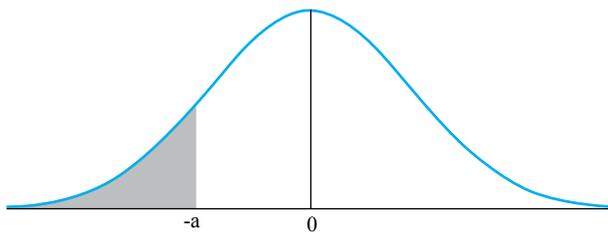
La TIR, como se explicó, es una variable aleatoria, cuya distribución de probabilidad y parámetros se estimarán luego de realizada la simulación de Monte Carlo sobre la expresión matemática general.

El concepto de probabilidad de pérdida utilizado en el presente estudio es conceptualmente análogo al desarrollado por Fishburn (1977). Este último considera un modelo de dominancia de riesgo y retorno, en el cual el riesgo es medido por una función de probabilidad ponderada de las desviaciones debajo de un retorno objetivo especificado. En ese sentido, la metodología de probabilidad de pérdida está enmarcada en la familia de modelos de riesgo basados en la dominancia estocástica.

Sin embargo, la principal diferencia entre la probabilidad de pérdida y el modelo de Fishburn (1977) radica en la forma funcional utilizada. En la metodología de probabilidad de pérdida, se estima la distribución esperada de la TIR, como resultado de la simulación de otras variables aleatorias (distribuciones de probabilidad de los retornos) en un horizonte de tiempo esperado. En el caso del modelo de Fishburn, se realiza el análisis sobre los parámetros de un portafolio específico.

El gráfico 1 muestra el área sombreada, que denota la probabilidad de pérdida. Ello implica que la TIR es menor a la rentabilidad esperada (costo de oportunidad). En el gráfico $-a$, corresponde al estadístico obtenido que permite determinar la probabilidad de pérdida.

Gráfico 1. Área sombreada de la probabilidad de pérdida



La estimación del modelo planteado permitirá verificar las hipótesis a), c) y d).

En cuanto a la probabilidad de pérdida, esta es una herramienta de análisis de largo plazo, que busca medir la distribución de la rentabilidad al vencimiento. Esto implica aquella rentabilidad promedio obtenida durante todo el horizonte comprendido desde «hoy» hasta el momento de jubilación del afiliado, y es comparada con su costo de oportunidad. Ello lo diferencia de la técnica de valor en riesgo (VaR, por sus siglas en inglés), que normalmente se utiliza para medir la posible pérdida máxima esperada en términos monetarios

para períodos normalmente cortos, para lo cual se considera un nivel de probabilidad dado.

A manera de ejemplo, si $n=3$, $A_0=0$, $C_0=0$, y A_i y C_i son constantes, se tiene el siguiente desarrollo:

$$A \times [(1+r_2)+1] \times (1+r_3) + A = (A+C) \times \left[\frac{(1+TIR)^3 - 1}{TIR} \right]$$

En resumen, la fórmula indica que la suma de los aportes capitalizados, a sus respectivas tasas de rentabilidad r , al momento de jubilación, es igual al valor futuro de los aportes y comisiones capitalizados a la TIR. Esta es una variable aleatoria que depende de las variables aleatorias r_2 y r_3 .

4.2. Análisis del desempeño histórico

Para complementar el análisis anterior, se evalúa el desempeño histórico de los fondos 1, 2 y 3 administrados por las AFP. En función de ello, se utilizará el ratio de Sortino, como se muestra en la fórmula (4):

$$S = \frac{E(R_p - R_f)}{TDD_p} \quad (4)$$

En este:

- S : es el ratio de Sortino; mide el retorno de un activo ajustado por riesgo.
- $E[R_p - R_f]$: corresponde al exceso de rentabilidad del portafolio sobre la rentabilidad mínima exigida.
- TDD_p : corresponde a la desviación media de los rendimientos negativos o semidesviación estándar (también, es denominado *Downside Risk*)
- R_p : es la rentabilidad del activo o portafolio en evaluación.
- R_f : corresponde a la rentabilidad mínima esperada por el inversionista.

Asimismo, la desviación media de los rendimientos negativos se define en la fórmula (5):

$$TDD_p = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1} (Min(0, X_i - T))^2} \quad (5)$$

Donde:

$X_i = i^{mo}$ retorno

$N =$ número total de retornos

$T =$ retorno objetivo

El ratio de Sortino no se basa en la desviación estándar que proviene de los retornos positivos (volatilidad deseada), sino que se enfoca en la volatilidad no deseada: se basa en el supuesto de que los inversionistas tienen como objetivo minimizar lo volatilidad que proviene de los retornos negativos (volatilidad no deseada). De hecho, cuando la estimación se realiza en segundo momento, constituye una estimación alternativa al riesgo de portafolio basada en el concepto de estimación de riesgo de portafolios —desarrollado por Wojt (2009)—.

La principal diferencia entre el ratio de Sortino y el ratio de Sharpe es que, mientras el primero se centra en la volatilidad de los retornos negativos, el segundo se centra en la volatilidad total (volatilidad de los retornos negativos y positivos). En condiciones en las que las distribuciones de los retornos se distribuyen de forma simétrica, ambos ratios dan resultados consistentes.

5. Criterios de selección de los datos

Se seleccionan los fondos 1, 2 y 3 administrados por las AFP Horizonte, Integra, Prima y Profuturo, entidades que conforman el sistema privado de pensiones en febrero de 2006–mayo de 2013. En este período, se tomó la información de valores cuota promedio histórico en nuevos soles (S/.) de cada fondo, disponible de

la página web de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2009a).

Cabe señalar que, sobre el período señalado, se dispone de información completa de los valores cuota de los tres fondos para cada AFP. Se ha seleccionado este lapso de tiempo considerando los siguientes criterios:

- Se incluye octubre de 2008, fecha en que se inicia la crisis financiera internacional, con la finalidad de medir sus efectos en el presente análisis.
- El fondo 3 inicia operaciones en enero de 2006; y es en febrero de 2006 que los tres fondos de las AFP (1, 2 y 3) funcionan de forma simultánea.
- La AFP Horizonte fue comprada por las AFP Integra y Prima en porcentajes iguales el 23 de abril de 2013. La primera dejó de funcionar oficialmente el 29 de agosto de 2013. Dentro de este marco, se considera útil evaluar y comparar el desempeño de los fondos administrados por esta AFP respecto a sus competidoras.

Los retornos mensuales históricos se han estimado para el período marzo 2006–mayo 2013. Para determinarlos, se utilizó la siguiente fórmula, de acuerdo con lo establecido por la Comisión Técnica de Inversiones de la Asociación Internacional de Organismos de Supervisión de Fondos de Pensiones (AIOS) (1999), como se muestra en la fórmula (6):

$$rn_t = \frac{VC_t}{VC_{t-1}} - 1 \quad (6)$$

Donde:

r_{nt} : Es la rentabilidad nominal del fondo 1, 2 o 3 en el mes t .

VC_t : Es el valor cuota del fondo en el mes t .

VC_{t-1} : Es el valor cuota del fondo en el mes $t - 1$.

Para definir los retornos mensuales históricos en términos reales, se ha determinado la inflación mensual a partir del índice de precios al consumidor —o IPC— (Banco Central de Reserva del Perú, 2013), mediante la siguiente fórmula (7):

$$\text{Inflación}_t = \frac{\text{IPC}_t}{\text{IPC}_{t-1}} - 1 \quad (7)$$

Donde:

Inflación_t : Es la tasa de inflación mensual en el mes t .

IPC_t : Es el IPC en el mes t .

IPC_{t-1} : Es el IPC en el mes $t - 1$.

Para determinar los retornos mensuales en términos reales, se ha utilizado la fórmula (8) que corresponde a la ecuación de paridad de Fisher:

$$r_t = \frac{rn_t - \text{Inflación}_t}{1 + \text{Inflación}_{t-1}} \quad (8)$$

Donde:

r_t : Es la rentabilidad real del fondo 1, 2 o 3 en el mes t .

rn_t : Es la rentabilidad nominal del fondo 1, 2 o 3 en el mes t .

Inflación_t : Es la tasa de inflación mensual en el mes t .

En cuanto a la información sobre comisiones, se consultó la base de datos de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP. A partir de ello, se obtuvo la información mensual de comisiones y prima de seguro bajo el sistema de comisión por flujo. Debido a que las comisiones se cobran sobre la remuneración bruta mensual del afiliado, para los cálculos, se considera que se cobran las comisiones vigentes a mayo de 2013, y que permanecen constantes durante el horizonte de evaluación. En la siguiente tabla, se muestra la información de comisiones por cada AFP.

Tabla 2. Comisiones de gestión (%)

Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Comisión actual	1,85	1,74	1,60	1,84

6. Metodología de cálculo

Las etapas empleadas son las siguientes:

6.1. Evaluación de desempeño histórico

Para analizar el desempeño histórico, se determina el ratio de Sortino, para cada uno de los fondos administrados por las AFP en el período marzo 2006-mayo 2013. En ese marco, se analizan, los retornos mensuales reales de cada fondo. Para determinar la rentabilidad mínima exigida, componente del ratio de Sortino, se considera como un parámetro razonable el promedio histórico de la rentabilidad del mercado de los fondos 1, 2 y 3 respectivamente.

6.2. Determinación de la probabilidad de pérdida

En esta etapa, el análisis de las series de tiempo de los retornos reales de los fondos 1, 2 y 3 se realiza utilizando E Views. Con este programa econométrico, se lleva a cabo un análisis gráfico de las series de tiempo, un test de normalidad de los retornos y un análisis de estacionariedad sobre los mismos, para marzo 2006-mayo 2013. El análisis de estacionariedad permite verificar que las series de tiempo de los retornos tienen un comportamiento uniforme en media y varianza para el período de análisis.

Los test explicados —en el párrafo anterior— se realizan con y sin la información de octubre de 2008 (inicio de la crisis financiera mundial), con la finalidad de explorar las distribuciones de probabilidad más apropiadas de los retornos de los fondos. En esta etapa de identificación, se utiliza también la ayuda de la

herramienta Distribution Fitting del *software* Crystal Ball, desarrollada por Oracle (2012). Esta herramienta se basa en el test estadístico de Anderson-Darling, sobre el cual Giles (2000) realiza una explicación.

Con la información obtenida sobre distribuciones de probabilidad de los retornos, se desarrolla una simulación de Montecarlo, a partir del *software* Crystal Ball (Oracle, 2012). Para ello, se considera la expresión matemática general del planteamiento del modelo señalado en la fórmula (2), de forma tal que se obtenga la distribución de probabilidad para la rentabilidad esperada al vencimiento (TIR) de cada fondo administrado por las AFP. Asimismo, se realizan mil iteraciones para cada tipo de fondo y se consideran los siguientes supuestos:

- El afiliado empieza a aportar mensualmente a la AFP a partir de los 25 años, y lo hace hasta cumplir los 65, edad en la que se jubila.
- El afiliado realiza aportes durante toda su vida laboral, manteniendo continuidad laboral al 100%.
- Realiza aportes constantes a su fondo administrado por la AFP, los cuales equivalen al 10% de su remuneración bruta.
- La comisión de administración se calcula sobre su remuneración bruta (comisión por flujo). El porcentaje de comisión se mantiene constante durante todo el período de aportes del afiliado.
- El afiliado recibe una remuneración bruta fija, es decir, que mantiene su valor real en el tiempo.
- Los retornos mensuales reales para los fondos 1, 2 y 3 son variables aleatorias, cuyos parámetros permanecen constantes durante todo el período de aportes del afiliado, y son los obtenidos a partir del análisis de la información de retornos históricos.

Con la información obtenida sobre las distribuciones de probabilidad de las rentabilidades esperadas al vencimiento (TIR), se realiza la estimación de la probabilidad de pérdida. Para ello, los parámetros obtenidos en la simulación de Montecarlo son utilizados para identificar la distribución de probabilidad más apropiada de la TIR. En el caso del cálculo, se realiza el análisis en MS Excel.

En cuanto a la determinación de la probabilidad de pérdida, se considera que el afiliado espera obtener una rentabilidad real mínima, que expresa el costo de oportunidad de largo plazo. Para definir este costo de oportunidad, se ha considerado lo siguiente:

- El costo de oportunidad de largo plazo de cada fondo es distinto, considerando que cada fondo tiene distintos límites de inversión; y, por tanto, distintos niveles de rentabilidad y riesgo.
- Para determinar el costo de oportunidad de largo plazo de cada fondo, se construyen portafolios *benchmark* con información de largo plazo de activos. Estos son similares a los que conforman los portafolios de los fondos 1, 2 y 3, pero corresponden a mercados financieros más desarrollados y proporcionan información histórica de largo plazo.
- Mediante un proceso de optimización de los portafolios *benchmark*, se determina los retornos esperados de largo plazo. El objetivo de optimización es lograr portafolios que maximicen el ratio de Sortino considerando restricciones de inversión similares a las que hoy tienen los fondos 1, 2 y 3.
- Una vez obtenidos los retornos esperados de los portafolios *benchmark*, se procede a estimar la probabilidad de pérdida para cada tipo de fondo de las AFP.

Para el desarrollo de los modelos y cálculos financieros, se utilizaron como referencia a Benninga (2008) y Ho (2004).

7. Resultados obtenidos

7.1. Desempeño histórico

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos por los fondos en la evaluación de los retornos reales en el período marzo 2006-mayo 2013. Entre estos, se encuentran el retorno esperado, el retorno exigido, la desviación media de los retornos negativos, y el ratio de Sortino como indicador de desempeño. Para el cálculo de este último, se consideró la fórmula especificada en el planteamiento del modelo (punto 5). Asimismo, para determinar la rentabilidad mínima exigida para cada tipo de fondo, se partió —como se

señaló— de la rentabilidad media histórica de mercado para cada tipo de fondo.

En la tabla 3, se muestra que en el fondo 1 la AFP Horizonte tuvo el mejor desempeño, medido en términos del ratio de Sortino, con 0,1971. Ello implica que obtuvo un mayor exceso de rentabilidad sobre el retorno exigido. Cabe anotar que el segundo mejor valor para el ratio de Sharpe lo obtiene la AFP Prima, con 0,1002.

También, en la tabla, se aprecia —para el caso del fondo 2—, que la AFP Prima obtiene el mejor desempeño, medido por el ratio de Sortino, con un valor de 0,0137. Mientras, el segundo mejor indicador lo obtiene AFP Profuturo, con 0,0089. Para el caso del fondo 3, la AFP Horizonte obtiene el mayor desempeño, con un ratio de Sortino de 0,0129; seguida por AFP Profuturo,

Tabla 3. Indicador de desempeño período marzo 2006-mayo 2013

	Fondo 1			
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Retorno esperado	0,5456%	0,4325%	0,4704%	0,4034%
Retorno exigido	0,3597%	0,3597%	0,3597%	0,3597%
Desviación media de retornos negativos	0,9430%	1,0819%	1,1043%	1,1486%
Ratio de Sortino	0,1971	0,0673	0,1002	0,0381
	Fondo 2			
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Retorno esperado	0,5893%	0,6321%	0,6671%	0,6557%
Retorno exigido	0,6337%	0,6337%	0,6337%	0,6337%
Desviación media de retornos negativos	2,5482%	2,3670%	2,4470%	2,4572%
Ratio de Sortino	-0,0174	-0,0007	0,0137	0,0089
	Fondo 3			
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Retorno esperado	1,1759%	1,0853%	1,0900%	1,0371%
Retorno exigido	1,1268%	1,1268%	1,1268%	1,1268%
Desviación media de retornos negativos	3,8148%	3,9804%	4,0410%	3,9594%
Ratio de Sortino	0,0129	-0,0104	-0,0091	-0,0227

con $-0,0091$ de ratio de Sortino. Al comparar los fondos 1, 2 y 3, en la tabla 3, se aprecia que el mejor desempeño (balance riesgo retorno) lo obtiene AFP Horizonte en el fondo 1 (ratio de Sortino $0,1971$), mientras que el fondo con el peor desempeño es el fondo 3 de AFP Profuturo (ratio de Sharpe $-0,0227$).

7.2. Análisis de series de tiempo y de identificación de distribuciones de probabilidad de los retornos

Los gráficos 2 y 3 muestran un hecho estilizado a todas las distribuciones de frecuencia de los retornos reales de los fondos 1, 2 y 3. En el primer caso —gráfico 2—

se evidencia que la distribución de retornos tiene un sesgo por la cola izquierda. Asimismo, la probabilidad de la fórmula estadística Jarque-Bera (probabilidad) indica que no se acepta la hipótesis de que los retornos sigan una distribución normal. Sin embargo, cuando se retira el retorno histórico de octubre de 2008, se obtienen los resultados del gráfico 3. En otras palabras, el estadístico Jarque-Bera (probabilidad) permite concluir que se acepta la hipótesis de que los retornos sigan una distribución normal al 5% de significancia, a partir de lo cual se puede afirmar que la observación en octubre de 2008 es significativa.

Gráfico 2. Distribución de frecuencia retornos fondo 1 de AFP Horizonte (con octubre 2008)

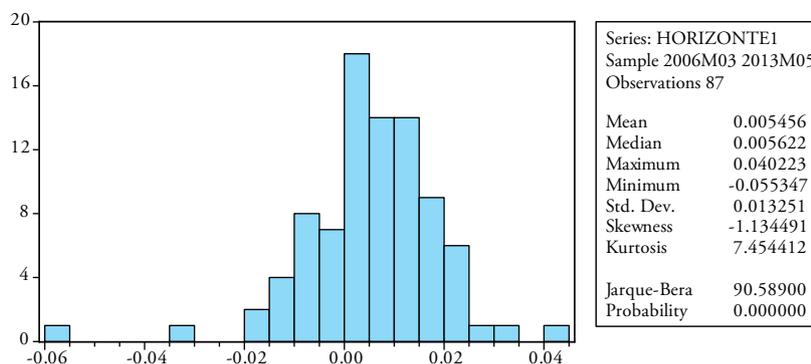
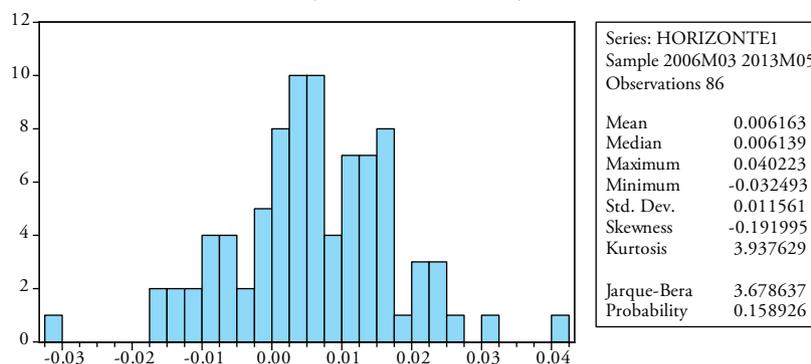


Gráfico 3. Distribución de frecuencia retornos fondo 1 de AFP Horizonte (sin octubre 2008)



Los resultados de los test de normalidad se muestran en las siguientes tablas:

**Tabla 4. Test de normalidad retornos fondos AFP
(con octubre 2008)**

AFP	Fondo 1		Fondo 2		Fondo 3	
	Estadístico	p value	Estadístico	p value	Estadístico	p value
Horizonte	90,5890	0,00%	151,6507	0,00%	31,0595	0,00%
Integra	94,26222	0,00%	93,7298	0,00%	36,6762	0,00%
Prima	123,4746	0,00%	137,2241	0,00%	47,43702	0,00%
Profuturo	193,3871	0,00%	130,0742	0,00%	42,4194	0,00%

**Tabla 5. Test de normalidad retornos fondos AFP
(sin octubre 2008)**

AFP	Fondo 1		Fondo 2		Fondo 3	
	Estadístico	p value	Estadístico	p value	Estadístico	p value
Horizonte	3,6786	15,89%	0,5403	76,33%	0,1409	93,20%
Integra	3,0250	22,04%	0,2505	88,23%	0,3279	84,88%
Prima	5,9604	5,08%	0,5081	77,56%	0,5093	77,52%
Profuturo	5,6757	5,86%	1,4714	47,92%	0,1756	91,78%

A partir de ello, se aprecia que, cuando se retira la observación que incluye octubre 2008 (tabla 5), se acepta la hipótesis de normalidad de la distribución de los retornos. Para todos los fondos administrados por las AFP, la probabilidad (p value) es superior al nivel crítico de 5%. Si se considera la observación octubre 2008 (tabla 4), en todos los casos, se rechaza la hipótesis de normalidad de la distribución de los retornos. Sin embargo, los resultados de los test de normalidad proporcionan probabilidades más altas para el fondo 3 respecto al fondo 1.

Para complementar el análisis de normalidad, se muestra —en las tablas 6 y 7— el análisis de estacionariedad de las series de tiempo mediante el test de Dickey Fuller. Cuando las series de tiempo de los retornos reales mensuales de los fondos 1, 2 y 3

incluyen o no octubre de 2008, los valores críticos se calculan considerando un valor crítico al 1% (más riguroso que 5% y 10%).

A partir de los resultados mostrados en las tablas 6 y 7, puede apreciarse que las series de tiempo son estacionarias. En otras palabras, se acepta la hipótesis de que la media y varianza de las series de retornos, a lo largo del período marzo 2006-mayo 2013, son constantes, independientemente de si consideran o no la observación octubre de 2008 (inicio de la crisis financiera internacional).

Los gráficos 4 y 5 muestran el comportamiento de la serie de tiempo de los retornos del fondo 3 de AFP Horizonte con y sin octubre de 2008. En ambos casos, se observa un patrón estable de los datos que fluctúan alrededor de su promedio.

**Tabla 6. Análisis de estacionariedad
(con octubre 2008)**

AFP	Fondo 1		Fondo 2		Fondo 3	
	Estadístico t	Valor crítico	Estadístico t	Valor crítico	Estadístico t	Valor crítico
Horizonte	-5,619590	-3,508326	-5,988806	-3,508326	-5,724943	-3,508326
Integra	-5,903247	-3,508326	-6,034148	-3,508326	-5,498512	-3,508326
Prima	-5,685896	-3,508326	-6,234516	-3,508326	-5,544730	-3,508326
Profuturo	-5,643298	-3,508326	-6,121084	-3,508326	-5,646729	-3,508326

**Tabla 7. Análisis de estacionariedad
(sin octubre 2008)**

AFP	Fondo 1		Fondo 2		Fondo 3	
	Estadístico t	Valor crítico	Estadístico t	Valor crítico	Estadístico t	Valor crítico
Horizonte	-5,315392	-3,509281	-5,960973	-3,509281	-5,743449	-3,509281
Integra	-5,606062	-3,509281	-6,010456	-3,509281	-5,592407	-3,509281
Prima	-5,314568	-3,509281	-6,020687	-3,509281	-5,498731	-3,509281
Profuturo	-5,347923	-3,509281	-5,980399	-3,509281	-5,669613	-3,509281

**Gráfico 4. Retornos de AFP Horizonte fondo 3
(con octubre 2008)**

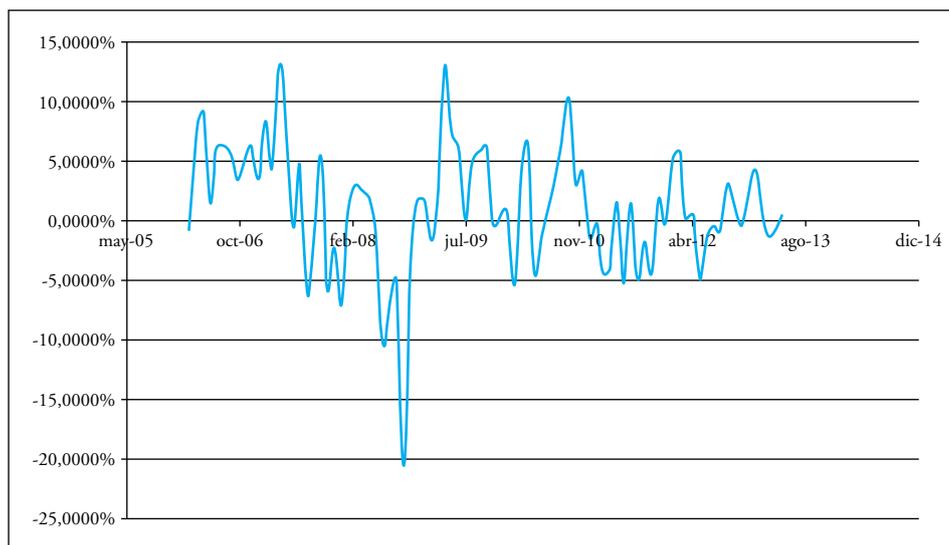
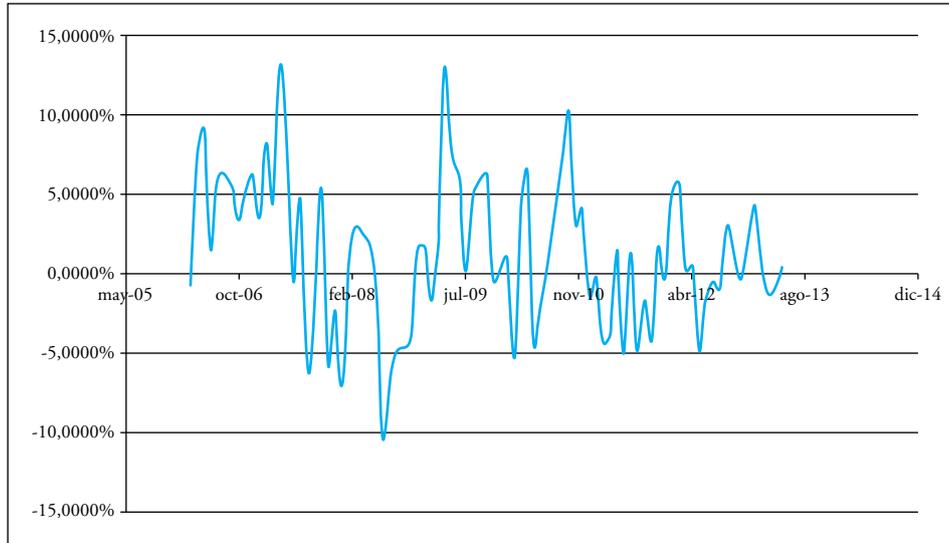


Gráfico 5. Retornos de AFP Horizonte fondo 3 (sin octubre 2008)



A partir de lo señalado en el presente punto, se identifican las distribuciones de probabilidad de los retornos históricos reales, como se muestra en las tablas 8 y 9. En la primera, se observan los retornos mensuales reales cuando se excluye octubre de 2008. Al considerar los resultados correspondientes de los test de normalidad de Jarque-Bera (tabla 5), se asume el supuesto de que las distribuciones de probabilidad de los retornos siguen el patrón de una distribución normal. La tabla evidencia, también, la media y desviación estándar para cada fondo de las AFP.

En el caso de la tabla 9, se puede apreciar las distribuciones de probabilidad que se ajustan a las series de tiempo de los retornos reales mensuales cuando se considera octubre de 2008. Como se pudo apreciar en la tabla 4, estas series de tiempo no siguen el patrón de una distribución normal. Cabe anotar que, para identificar la distribución más apropiada, se utilizó la herramienta Distribution Fitting del *software* Crystal Ball. Esta herramienta brinda un ranking de candidatos para la distribución que mejor se ajusta

a los datos proporcionados por el test estadístico de Anderson-Darling. A partir de ello, se obtiene las distribuciones y parámetros mostrados en la siguiente tabla.

Tabla 8. Distribución de probabilidad de los retornos (sin octubre 2008)

Fondo 1				
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Promedio	0,62%	0,51%	0,55%	0,49%
Desviación estándar	1,16%	1,24%	1,25%	1,22%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
Fondo 2				
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Promedio	0,78%	0,80%	0,85%	0,84%
Desviación estándar	2,78%	2,69%	2,72%	2,76%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
Fondo 3				
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Promedio	1,43%	1,35%	1,37%	1,30%
Desviación estándar	4,62%	4,76%	4,76%	4,65%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal

Tabla 9. Distribución de probabilidad de los retornos (con octubre 2008)

Fondo 1				
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Media	0,61%	0,51%	0,57%	0,51%
Escala	0,69%	0,74%	0,75%	0,74%
Distribución	Logística	Logística	Logística	Logística
Fondo 2				
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Media	0,71%	0,73%	0,78%	0,76%
Escala	1,69%	1,63%	1,66%	1,66%
Distribución	Logística	Logística	Logística	Logística
Fondo 3				
Descripción	Horizonte	Integra	Prima	Profuturo
Media	1,30%	1,18%	1,20%	1,16%
Escala	2,80%	2,89%	2,93%	2,83%
Distribución	Logística	Logística	Logística	Logística

Para realizar la simulación de Montecarlo con y sin octubre de 2008, se asume que los retornos mensuales tienen los parámetros y distribuciones de probabilidad señalados en las tablas 8 y 9 respectivamente.

7.3. Simulación de Montecarlo e identificación de la distribución de probabilidad para la TIR

Los gráficos 6 y 7 muestran los resultados de la simulación de Montecarlo para determinar la distribución de probabilidad de la TIR o rendimiento al vencimiento como resultado de aportar a los fondos 2 de AFP Prima (sin octubre 2008) y 1 de AFP Integra (con octubre 2008) respectivamente.

En ambos gráficos, se aprecia que la distribución que mejor se ajusta a la rentabilidad al vencimiento esperada (TIR) es la distribución normal. Sin embargo, en el caso de algunos fondos, el test de Anderson-Darling proporciona un ranking de distribuciones de probabilidad en los que la distribución normal se

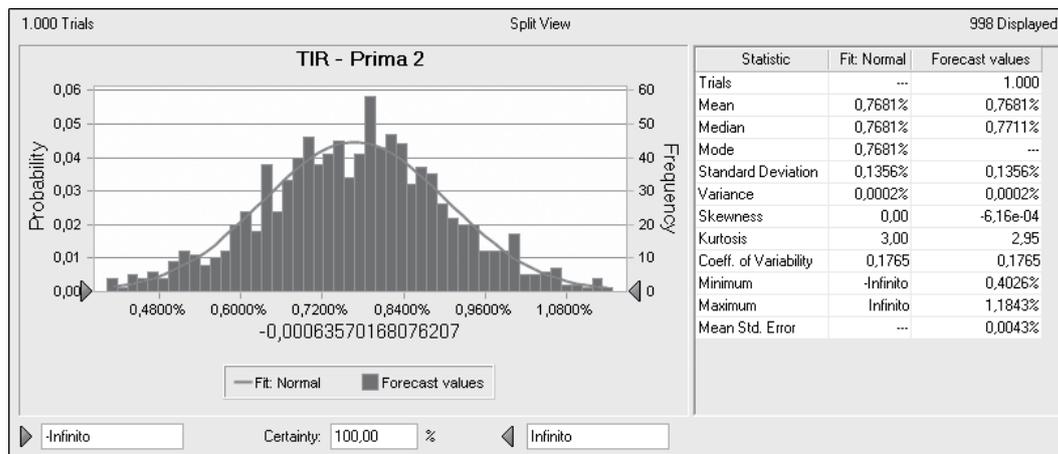
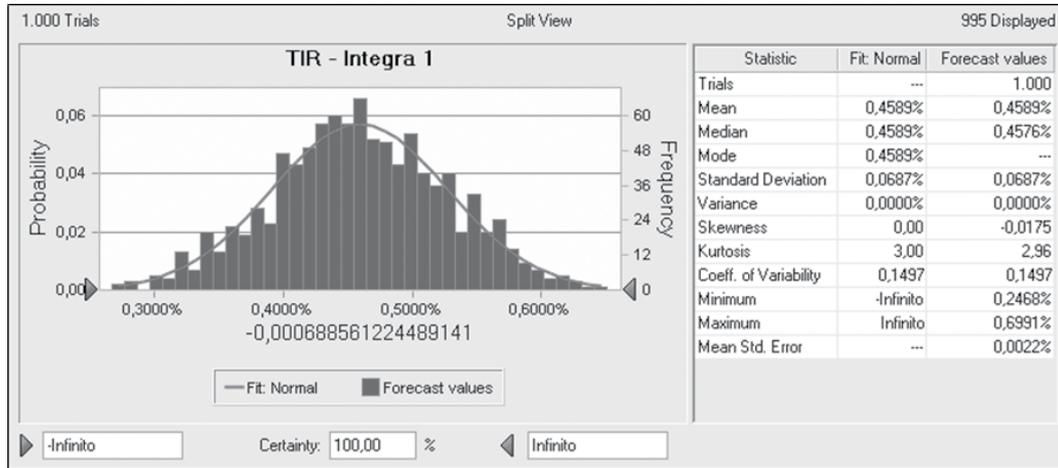
Gráfico 6. Distribución de probabilidad de la TIR del fondo 2 AFP Prima (sin octubre 2008)

Gráfico 7. Distribución de probabilidad de la TIR del fondo 1 AFP Integra (con octubre 2008)



encuentra entre los primeros lugares, no necesariamente en el primer lugar. Por ello, ha sido necesario complementar el test de Anderson-Darling con el Test de Jarque-Bera, de modo que sea posible concluir si la distribución de la TIR de los retornos de cada fondo se ajusta a una distribución normal. En caso contrario, se selecciona la distribución de probabilidad recomendada por el test Anderson-Darling.

En la tabla 10, se resume los parámetros obtenidos como resultado de la simulación de Montecarlo para determinar las rentabilidades esperadas para cada fondo administrado por las AFP al vencimiento. En ese caso, no se considera octubre de 2008. Asimismo, se debe anotar que n es el número de iteraciones, y S corresponde al coeficiente de asimetría, K , por su parte, es el coeficiente de curtosis, y JB equivale al valor del estadístico Jarque-Bera. Finalmente, con *probabilidad*, se alude a la probabilidad del estadístico.

A partir del test de Jarque-Bera, considerando un estadístico al nivel de significancia de 5%, se aprecia que

el fondo 1 de AFP Prima (0,73%), el fondo 2 de AFP Profuturo (2,92%) y el fondo 3 de AFP Horizonte no satisfacen el test de normalidad para la distribución de probabilidad de la TIR. El resto de fondos sí satisface el test de normalidad para la TIR, por lo que se asume, en esos casos, que las distribuciones de los retornos de la TIR se ajustan a una distribución normal.

Para los otros casos —aquellos en los que los fondos cuyas distribuciones de la TIR no se ajustan a una distribución normal—, se realizó el test de Anderson-Darling, con la finalidad de identificar la distribución de probabilidad de mejor ajuste. A través de ello, se obtuvo que, para el caso del fondo 1 de la AFP Prima, la distribución de probabilidad de la TIR se ajusta a una distribución Beta. Asimismo, para el caso del fondo 2 de AFP Profuturo, la distribución de Weibull describe mejor la distribución de probabilidad de la TIR. Finalmente, para el caso del fondo 3 de AFP Horizonte, la distribución logística describe mejor la distribución de la TIR.

Tabla 10. Distribución de probabilidad de la TIR (sin octubre 2008)

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
n	1.000	1.000	1.000	1.000
S	-0,0720	0,0000	-0,1379	0,0000
K	2,7500	3,0000	2,6000	3,0000
Estadístico JB	3,468167	0,000000	9,836068	0,000000
Probabilidad JB	17,66%	100,00%	0,73%	100,00%
Distribución	Normal	Normal	Beta	Normal
	Horizonte 2	Integra 2	Prima 2	Profuturo 2
n	1.000	1.000	1.000	1.000
S	0,0000	0,0000	0,0000	-0,1827
K	3,0000	3,2300	3,0000	2,8100
Estadístico JB	0,000000	2,204167	0,000000	7,067382
Probabilidad JB	100,00%	33,22%	100,00%	2,92%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Weibull
	Horizonte 3	Integra 3	Prima 3	Profuturo 3
n	1.000	1.000	1.000	1.000
S	0,0000	-0,1419	-0,0845	-0,0305
K	4,2000	2,9800	3,0100	2,9300
Estadístico JB	60,000000	3,372602	1,194208	0,359208
Probabilidad JB	0,00%	18,52%	55,04%	83,56%
Distribución	Logística	Normal	Normal	Normal

Donde n: número de simulaciones; S: Skewnes; K: Kurtosis; JC: estadístico Jarque-Bera

Elaboración propia, considerando los datos de la simulación de Montecarlo

En la tabla 11, se muestran los resultados obtenidos de la simulación de Montecarlo considerando octubre de 2008. Estos se interpretan de forma equivalente a los obtenidos en la tabla 10. A partir de ello, se verifica que las distribuciones de probabilidad de la TIR de todos los fondos de las AFP se ajustan a una distribución normal. La probabilidad del estadístico Jarque-Bera (JB) está por encima del nivel de crítico de 5%.

Tabla 11. Distribución de probabilidad de la TIR (con octubre 2008)

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
n	1.000	1.000	1.000	1.000
S	0,0000	0,0000	-0,0360	0,0633
K	3,23	3,00	3,00	3,01
JB	2,204167	0,000000	0,215820	0,671982
Probabilidad	33,22%	100,00%	89,77%	71,46%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
	Horizonte 2	Integra 2	Prima 2	Profuturo 2
n	1.000	1.000	1.000	1.000
S	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
K	3,2300	3,0000	3,0000	3,0000
JB	2,204167	0,000000	0,000000	0,000000
Probabilidad	33,22%	100,00%	100,00%	100,00%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
	Horizonte 3	Integra 3	Prima 3	Profuturo 3
n	1.000	1.000	1.000	1.000
S	-0,1303	0,0797	0,0057	0,0633
K	2,9700	3,0100	2,8800	3,0100
JB	2,867182	1,062848	0,605415	0,671982
Probabilidad	23,85%	58,78%	73,88%	71,46%
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal

Donde n: número de simulaciones; S: Skewnes; K: Kurtosis; JC: estadístico Jarque Bera

Elaboración propia, considerando los datos de la simulación de Montecarlo

7.4. Determinación del costo de oportunidad de largo plazo

El costo de oportunidad utilizado para determinar la probabilidad de pérdida replica el rendimiento de largo plazo, neto de comisión de gestión, de un portafolio alternativo a los administrados por las AFP. Asimismo, para hacerlos comparables a la TIR de los fondos 1, 2 y 3, considera los límites por tipo de instrumento de inversión establecidos por la SBS.

El criterio de optimización (función objetivo) que permite determinar el portafolio alternativo se basa en el supuesto de que los inversionistas tienen como objetivo minimizar la volatilidad que proviene de los retornos negativos (volatilidad no deseada), no en la desviación estándar que proviene de los retornos positivos (volatilidad deseada). En ese sentido, se ha considerado conveniente utilizar como criterio de optimización el ratio de Sortino en lugar del ratio de Sharpe.

La principal diferencia entre el ratio de Sortino y el ratio de Sharpe es que, mientras el primero se centra en la volatilidad de los retornos negativos, el segundo se enfoca en la volatilidad total (volatilidad de los retornos negativos y positivos). En condiciones en las que las distribuciones de los retornos se distribuyen de forma simétrica ambos ratios dan resultados consistentes. Sin embargo, como se explicará más adelante en el presente punto, los retornos de los activos que componen los portafolios alternativos no son todos simétricos, por lo cual se consideró apropiado utilizar el ratio de Sortino.

En esa línea, se construyeron portafolios *benchmark* para cada tipo de fondo, cuya rentabilidad será utilizada como el costo de oportunidad de largo plazo. Además, con esta, se determina la probabilidad de pérdida para cada fondo. Los portafolios *benchmark* de los fondos 1, 2 y 3 son construidos considerando el objetivo de maximizar el ratio de Sortino, sujeto a las restricciones de inversión que a la fecha tienen los fondos 1, 2 y 3 de las AFP. Entre las variables, se tomaron en cuenta el porcentaje de inversión para los instrumentos de renta variable, renta fija e instrumentos de corto plazo.

Para la selección de los instrumentos representativos que componen los portafolios *benchmark*, dada la limitada disponibilidad de información del mercado local

en horizontes de muy largo plazo, se tomó en cuenta la información de retornos anuales (Damodaran, s.f.) para el período 1928-2012 de los siguientes activos:

- Índice S&P 500, como representativo del mercado de instrumentos de renta variable.
- Letras del Tesoro Americano a tres meses, como representativo de instrumentos de corto plazo o equivalentes de efectivo
- Bono del Tesoro Americano a diez años, como representativo de los instrumentos de renta fija mayores a un año.
- Para el caso de instrumentos derivados, no se dispone de información de largo plazo ni el efecto que estos tendrían en la rentabilidad de los portafolios *benchmark*. Debido a ello, no han sido considerados para la determinación del portafolio *benchmark*.

De acuerdo con el análisis de asimetría, se verificó que de los tres activos en cuestión solo el retorno del índice S&P 500 tiene un nivel de asimetría aceptable (0,3680). Asimismo, satisface el test de normalidad Jarque-Bera con una probabilidad de 34,63%. En cambio, el retorno de las Letras y Bonos del Tesoro Americano a 10 años, tienen coeficientes de asimetría del orden 0,9531 y 1,0304 respectivamente y no satisfacen el test de normalidad. A partir de ello, se obtiene estadísticos Jarque-Bera con probabilidades 0,05% y 0,00% respectivamente, de modo que se justifica utilizar el ratio de Sortino en lugar del ratio de Sharpe.

En la estimación del ratio de Sortino, se consideró como rentabilidad mínima exigible para los tres tipos de fondo la rentabilidad promedio anual de los bonos del tesoro americano a diez años, para el período 1928-2012. El planteamiento matemático del problema de optimización para determinar el portafolio *benchmark* para los fondos 1, 2 y 3 se basa en las fórmulas (4) y (5) y es el siguiente:

$$Max S = \frac{E[R_p - T]}{TDD_p}$$

Ello está sujeto a lo siguiente:

$$A \times R_{RV} + B \times R_{CP} + C \times R_{LP} = R_p$$

$$TDD_p = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\text{Min}(0, R_{p_i} - T))^2}$$

$$A \leq LIM_{RV}$$

$$B \leq LIM_{CP}$$

$$C \leq LIM_{LP}$$

$$A + B + C = 1$$

$$A, B, C \geq 0$$

Donde:

S : Es el ratio de Sortino.

A : Corresponde a la proporción de la inversión en instrumentos de renta variable como proporción del total.

B : Refiere a la proporción de la inversión en instrumentos de corto plazo como proporción del total.

C : Corresponde a la proporción de la inversión en instrumentos de renta fija como proporción del total.

R_p : Es la rentabilidad promedio del portafolio en el período 1928-2012.

R_{RV} : Es la rentabilidad promedio de los instrumentos de renta variable en el período 1928-2012.

R_{CP} : Es la rentabilidad promedio de los instrumentos corto plazo en el período 1928-2012.

R_{LP} : Es la rentabilidad promedio de los instrumentos renta fija en el período 1928-2012.

LIM_{RV} : Es el límite de inversión máximo en instrumentos de renta variable, establecido por la SBS.

LIM_{CP} : Es el límite de inversión máximo en instrumentos corto plazo, establecido por la SBS.

LIM_{LP} : Es el límite de inversión máximo en instrumentos de renta fija, establecido por la SBS.

T : Es la rentabilidad anual promedio mínima exigida y corresponde al promedio de rentabilidad de los bonos del tesoro americano a diez años, en el período 1928-2012.

TDD_p : Es la desviación media de los retornos negativos.

R_{p_i} : Es la rentabilidad del portafolio en el período i . Se calcula como la sumatoria de los productos que resultan de la multiplicación de A , B y C por sus respectivas rentabilidades en un determinado año.

N : Es el número de observaciones anuales del período 1928-2012.

En la siguiente tabla, se muestran los resultados de la estimación de los portafolios *benchmark*:

Tabla 12. Resultados de portafolios *benchmark*

Descripción	Distribución de inversiones de portafolio			Resultados			
	Renta variable %	Corto plazo %	Renta fija %	Coefficiente de asimetría	Test Jarque - Bera %	Ratio de Sortino	Rentabilidad anual en US\$ %
Fondo 1	10	50	40	1,0676	0,0083	-0,1084	5,0854
Fondo 2	45	25	30	-0,3294	0,0000	0,3863	7,5855
Fondo 3	80	0	20	-0,3891	0,0000	0,4952	10,0855

Como se señaló, dado que los tres fondos tienen límites de inversión distintos, se obtienen tres tipos de rentabilidad anual distintos, los cuales maximizan el valor del ratio de Sortino para cada tipo de fondo. Cabe anotar que las rentabilidades obtenidas en el cuadro anterior se expresan en dólares americanos, y consideran que el costo de oportunidad de inversión en cada fondo de las AFP se expresa en nuevos soles reales. A partir de ello, se realiza una transformación de tasas, para lo cual se considera las ecuaciones de paridad de Fisher en dos sentidos:

a) Hipótesis abierta de la paridad de tasas de interés internacionales. Para obtener la rentabilidad anual en nuevos soles, se aplica la siguiente ecuación (9):

$$(1 + r_{Sl.}) = (1 + r_{US\$}) \times (1 + Dev_{LP}) \quad (9)$$

Donde:

$r_{Sl.}$: Corresponde a la rentabilidad anual nominal en nuevos soles.

$r_{US\$}$: Es la rentabilidad anual del portafolio *benchmark* expresado en dólares americanos.

Dev_{LP} : Refiere a la devaluación anual esperada de largo plazo.

Para determinar la devaluación anual esperada, se ha considerado el supuesto que esta será en promedio del 2% en el largo plazo. Es necesario señalar que, en el marco macroeconómico multianual publicado por el Ministerio de Economía y Finanzas (2013), se considera una devaluación anual de -1,09% para el año 2014, -0,74% para el 2015, y 0% para 0 el 2016. Asimismo, en el período marzo de 1992-mayo 2013, la devaluación anualizada asciende a 7,67%, que corresponde a un período de muy alta volatilidad.

b) Hipótesis cerrada de la paridad de tasas de interés. Para obtener la rentabilidad anual en nuevos soles en términos reales, se aplica la siguiente ecuación (10):

$$r_{Sl.real} = \frac{r_{Sl.} - \pi}{1 + \pi} \quad (10)$$

Donde:

$r_{Sl.real}$: Refiere a la rentabilidad anual real en nuevos soles.

$r_{Sl.}$: Es la rentabilidad anual nominal en nuevos soles, obtenida en a).

π : Corresponde a la inflación anual esperada de largo plazo.

Para determinar la inflación anual esperada, se ha considerado que esta será en promedio del 3% en el largo plazo. Es necesario señalar que, en el marco macroeconómico multianual publicado por el Ministerio de Economía y Finanzas (2013), se considera una inflación anual de 2% anual para los años 2014, 2015 y 2016. Además, se debe tener en cuenta que la meta de inflación del Banco Central de Reserva establece un límite máximo de 3% anual. Asimismo, en el período marzo de 1992-mayo 2013, la inflación anualizada asciende a 4,99%, que corresponde a un período de muy alta volatilidad.

Para determinar la rentabilidad mensual ($r_{mensual}$) de largo plazo en términos reales, se transforma la rentabilidad real anual obtenida utilizando la siguiente ecuación (11):

$$r_{mensual} = (1 + r_{Sl.real})^{1/12} - 1 \quad (11)$$

Finalmente, para determinar el costo de oportunidad mensual en términos reales (R_e), se considera que esta debe ser neta de comisiones de gestión. Cabe anotar que esta será comparada con la TIR, la cual —por definición en el presente estudio—, es neta de comisiones de gestión. Para tal efecto, se utiliza la siguiente ecuación (12):

$$R_e = (1 + r_{mensual})(1 - CG) - 1 \quad (12)$$

Los costos de gestión para cada tipo de fondo se estiman como un porcentaje del fondo. Estos han sido determinados como el promedio del mercado, tanto de afiliados como no afiliados, lo cual corresponde a las comisiones cobradas por las AFP por administrar aportes voluntarios sin fin previsional a mayo de 2013. El detalle se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 13. Comisiones de gestión de las AFP

	AFP Horizonte		AFP Integra		AFP Prima		AFP Profuturo		Promedio
	Afiliados	No afiliados	Afiliados	No afiliados	Afiliados	No afiliados	Afiliados	No afiliados	
Fondo 1	0,0600	0,1000	0,0950	0,0950	0,1000	0,1500	0,1000	0,1000	0,1000
Fondo 2	0,1000	0,1500	0,1450	0,1450	0,1300	0,2500	0,1750	0,1750	0,1588
Fondo 3	0,1400	0,2000	0,1650	0,1650	0,1600	0,2500	0,1900	0,1900	0,1825

La siguiente tabla muestra los parámetros utilizados y los resultados obtenidos para determinar el costo de oportunidad mensual real de largo plazo para cada tipo de fondo.

Tabla 14. Cálculo del costo de oportunidad mensual real de largo plazo

Descripción	Rentabilidad anual en US\$	Devaluación anual esperada de LP	Inflación anual esperada de LP	Rentabilidad anual real en S/.	Rentabilidad mensual real en S/.	Comisión de gestión mensual	Costo de oportunidad mensual S/.
Fondo 1	0,50854%	2,00%	3,00%	4,0652%	0,3326%	0,1000%	0,2323%
Fondo 2	7,5855%	2,00%	3,00%	6,5409%	0,5294%	0,1588%	0,3698%
Fondo 3	1008,5500	2,00%	3,00%	9,0167%	0,7220	0,1825%	0,5382%

7.5. Determinación de la probabilidad de pérdida

7.5.1. Sin octubre de 2008

En este caso, se considera la información obtenida en las tablas 10 y 14 para determinar la probabilidad de pérdida. Por su parte, las tablas 15, 16 y 17 muestran los parámetros obtenidos de la simulación de Montecarlo y los resultados del cálculo de la probabilidad de pérdida de la decisión de optar por los fondos 1, 2 y 3 respectivamente. Para los casos del fondo 1 de la AFP Prima, fondo 2 de AFP Profuturo y fondo 3 de AFP Horizonte, debido a que no se ajustan a una distribución normal, se seleccionaron las distribuciones de probabilidad más apropiadas como resultado de aplicar el test Anderson-Darling.

La tabla 18 resume las probabilidades de pérdida obtenidas de las tablas 15, 16 y 17. A partir de ello,

se aprecia que, a nivel del fondo 1, la menor probabilidad de pérdida se obtiene en la AFP Horizonte con 0,0000%. En contraposición, la mayor probabilidad de pérdida está en la AFP Profuturo con 0,0731%. A nivel del fondo 2, la menor probabilidad de pérdida se encuentra en la AFP Prima con 0,1655%; y la mayor, en AFP Horizonte con 0,9764%. En el caso del fondo 3, la menor probabilidad de pérdida se obtiene en la AFP Prima con 0,1010%; y la mayor probabilidad de pérdida, en la AFP Horizonte con 0,2188%.

A través de la comparación de los resultados de los tres fondos (tabla 18), se observa que la mayor probabilidad de pérdida se encuentra en el fondo 2 de la AFP Horizonte (0,9764%); y la menor probabilidad de pérdida está en el fondo 1 de la AFP Horizonte (0,0000%).

**Tabla 15. Probabilidad de pérdida en fondo 1
(sin octubre 2008)**

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
Distribución	Normal	Normal	Beta	Normal
Media	0,5627%	0,4523%	0,4951%	0,4299%
Desviación estándar	0,0561%	0,0634%	0,0604%	0,0621%
Beta			100	
Alpha			100	
Mínimo			1,2180%	
Máximo			2,7390%	
RMR anual	2,832%	2,832%	2,832%	2,832%
RMR mensual	0,2323%	0,2323%	0,2323%	0,2323%
Estadístico	-5,8899	-3,4704		-3,1823
Probabilidad de pérdida	0,0000%	0,0260%	0,0061%	0,0731%

**Tabla 16. Probabilidad de pérdida del fondo 2
(sin octubre 2008)**

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
Distribución	Normal	Normal	Normal	Weibull
Media	0,6909%	0,7265%	0,7681%	0,7604%
Desviación estándar.	0,1375%	0,1314%	0,1356	0,1396
Location				0,2040
Scale				0,6100
Shape				4,52596%
RMR anual	4,5290%	4,5290%	4,5290%	4,5290%
RMR mensual	0,3698%	0,3698%	0,3698%	0,3698%
Estadístico	-2,3353	-2,7146	-2,9373	
Probabilidad de pérdida	0,9764%	0,3318%	-0,1655%	0,2747%

**Tabla 17. Probabilidad de pérdida del fondo 3
(sin octubre 2008)**

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
Distribución	Logística	Normal	Normal	Normal
Media	1,290%	1,206%	1,2288%	1,1671%
Desviación estándar.	0,226%	0,2257%	0,2237%	0,2182%
Mean	1,2910%			
Scale	0,1230%			
RMR anual	6,6531%	6,6531%	6,6531%	6,6531%
RMR mensual	0,5382%	0,5382%	0,5382%	0,5382%
Estadístico		-2,9597	-3,0872	-2,8822
Probabilidad de pérdida	0,2188%	0,1540%	0,1010%	0,1974%

Tabla 18. Resumen de probabilidad de pérdida (sin octubre 2008)

Concepto	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Fondo 1	0,0000	0,0260	0,0061	0,0731
Fondo 2	0,9764	0,3318	0,1655	0,2747
Fondo 3	0,2188	0,1540	0,1010	0,1974

7.5.2. Considerando octubre de 2008

En este caso, se considera la información obtenida en las tablas 11 y 14 para determinar la probabilidad de pérdida. Respecto a las tablas 19, 20 y 21, en ellas, se muestra el cálculo de la probabilidad de pérdida de los fondos 1, 2 y 3, considerando octubre de 2008. En todos los casos, se considera para el cálculo de la

probabilidad de pérdida que la TIR de los fondos se distribuye normalmente, de acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla 11.

En la tabla 22, se resume las probabilidades de pérdida obtenidas en las tablas 19, 20 y 21. De este modo, se aprecia que —a nivel del fondo 1— la menor probabilidad de pérdida se encuentra en la AFP Horizonte con 0,0000%, mientras que la mayor probabilidad de pérdida está en la AFP Profuturo con 0,0532%. A nivel del fondo 2, la menor probabilidad de pérdida corresponde a la AFP Prima con 1,2835%; y la mayor, a AFP Horizonte con 4,8639%. A nivel del fondo 3, la menor probabilidad de pérdida se obtiene en la AFP Horizonte con 0,8199%; y, en AFP Profuturo, se observa la mayor probabilidad de pérdida, con 3,0123%.

Tabla 19. Probabilidad de pérdida del fondo 1 (con octubre 2008)

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
Media	0,5477%	0,4589%		
Desviación estándar	0,0628%	0,0687%		
RMR anual	2,8232%	2,8232%	2,8232%	2,8232%
RMR mensual	0,2323%	0,2323%	0,2323%	0,2323%
Estadístico	-5,0226	-3,2987	-4,2737	-3,2729
Probabilidad de pérdida	0,0000%	0,0486%	0,0010%	0,0532%

Tabla 20. Probabilidad de pérdida del fondo 2 (con octubre 2008)

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
Media	0,6240%	0,6503%	0,6922%	0,6640%
Desviación estándar	0,1533%	0,1470%	0,1445%	0,1416%
RMR anual	4,5290%	4,5290%	4,5290%	4,5290%
RMR mensual	0,3698%	0,3698%	0,3698%	0,3698%
Estadístico	-1,6582	-1,9082	-2,2312	-2,077
Probabilidad de pérdida	4,8639%	2,8184%	1,2835%	1,8869%

Tabla 21. Probabilidad de pérdida del fondo 3 (con octubre 2008)

Concepto	Horizonte 1	Integra 1	Prima 1	Profuturo 1
Distribución	Normal	Normal	Normal	Normal
Media	1,1293%	1,0257%	1,0264%	0,9978%
Desv. estándar	0,2463%	0,2553%	0,2554%	0,2446%
RMR anual	6,6531%	6,6531%	6,6531%	6,6531%
RMR mensual	0,5382%	0,5382%	0,5382%	0,5382%
Estadístico	-2,3999	-1,9095	-1,9115	-1,8790
Probabilidad de pérdida	0,8199%	2,8098%	2,7970%	3,0123%

Tabla 22. Resumen de probabilidad de pérdida (con octubre 2008)

Concepto	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Fondo 1	0,0000	0,0486	0,0010	0,0532
Fondo 2	4,8639	2,8184	1,2835	1,8869
Fondo 3	0,8199	2,8098	2,7970	3,0123

Adicionalmente, se realizaron nuevos cálculos para determinar las distribuciones de probabilidad de los retornos al vencimiento de los fondos 1, 2 y 3. En ese marco, se mantuvo todos los supuestos de cálculo, con la salvedad de que al afiliado se le resta quince años para su jubilación y que a la fecha ha acumulado un fondo equivalente a noventa sueldos mensuales. Asimismo, se consideró que las distribuciones de probabilidad de la TIR no contienen el efecto octubre de 2008. Estos resultados se muestran en la tabla 23:

Tabla 23. Restan 15 años para la jubilación (sin octubre 2008)

Fondo	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Fondo 1	0,0014	0,2426	0,0517	0,4589
Fondo 2	4,2956	2,7637	1,5613	1,8719
Fondo 3	0,9318	2,7795	2,8020	3,0959

Para determinar la distribución de probabilidad de la TIR para cada fondo, se aplicó el test de Jarque-Bera con un nivel de confianza de 5%. Ello se complementó con el test de Anderson-Darling, de modo que se pudiera identificar la distribución más apropiada en caso el test Jarque-Bera rechace la normalidad de la distribución. De esta manera, se obtuvo que la distribución de probabilidad de los fondos 1 y 2 administrados por las cuatro AFP en análisis sigue una línea de distribución normal. Para el caso del fondo 3, la distribución de la TIR de Horizonte e Integra siguen una distribución normal; en cambio, Prima y Profuturo siguen una distribución t de Student.

La probabilidad de pérdida más baja la proporciona el fondo 1 de AFP Horizonte, con 0,0014%; y la probabilidad de pérdida más alta la proporciona el fondo 2 de AFP Horizonte, con 4,2956%.

7.6. Comparación de metodologías y análisis de resultados

Tanto la metodología del ratio de Sortino como la probabilidad de pérdida proporcionan indicadores que permiten medir el desempeño de fondos. Ambos se basan en el criterio a partir del cual se selecciona aquellos fondos cuya eficiencia (relación retorno / riesgo) es la mayor posible.

En el caso de la metodología de la probabilidad de pérdida, esta se interpreta como la probabilidad de que el rendimiento esperado de largo plazo neto de comisiones (TIR) —obtenido por un determinado fondo de una AFP— no supere su costo de oportunidad de largo plazo. Esta metodología se desarrolla considerando una proyección de las condiciones actuales que tiene cada fondo hasta el momento de jubilación del afiliado, y las resume en la distribución de probabilidad de la TIR. Esta última incorpora la variable

gestión de cada fondo a través de la distribución de probabilidades de los retornos históricos del período marzo 2006-mayo 2013. Cabe anotar que el criterio de decisión de la probabilidad de pérdida implica seleccionar aquellos fondos cuya probabilidad de pérdida es menor.

En el caso del ratio de Sortino, el valor obtenido para este indicador se interpreta como el exceso de retorno sobre el costo de oportunidad o rentabilidad mínima esperada. Dicho exceso de retorno se encuentra ajustado por riesgo. Asimismo, para determinar la rentabilidad mínima exigida, se ha considerado el retorno medio obtenido por el mercado para cada fondo en el período de análisis (marzo 2006-mayo 2013). En cuanto al ajuste por riesgo, este se ha llevado a cabo considerando la desviación estándar de los retornos negativos. El criterio de decisión de este ratio implica seleccionar aquellos fondos cuyo valor numérico del ratio de Sortino sea mayor.

Asimismo, es necesario señalar que, en el presente análisis, respecto a la utilidad de las metodologías, el ratio de Sortino sirve para medir el desempeño histórico de los fondos, información que es útil para todo el mercado. Cabe anotar que, para su cálculo, se considera los retornos en términos brutos (sin descontar comisiones de gestión).

En el caso de la probabilidad de pérdida, se busca medir el desempeño esperado de largo plazo del fondo. Este es calculado de forma individual para cada afiliado; se trata, entonces, de un indicador personalizado. Ello responde a que el valor de la probabilidad de pérdida depende, además del desempeño de los fondos, de los años que le resta para la jubilación, la estructura de comisiones, de las expectativas de ingreso, del nivel de empleabilidad esperado (aportes esperados), de la evolución del costo de oportunidad

esperado, de los límites de inversión que establezca la SBS para cada fondo, y de las expectativas de inflación y devaluación.

En la metodología de probabilidad de pérdida, dos personas no tienen necesariamente los mismos valores para la probabilidad de pérdida. Como puede apreciarse en las tablas 18 y 23, ambos muestran los resultados del cálculo de la probabilidad de pérdida sin considerar octubre de 2008, para dos personas a quienes les resta distintos años antes de jubilarse (40 años *versus* 15 años).

Además, se aprecia en las tablas 18 y 23 que, si bien es cierto los resultados de ambos cuadros son consistentes para determinar los fondos de menor y mayor probabilidad de pérdida (Horizonte fondo 1 y Horizonte fondo 2 respectivamente), hay divergencia en la selección del fondo 3 más eficiente. A partir de la tabla 18, se concluye que el fondo más eficiente es el de AFP Prima, mientras que, del cuadro 23, se concluye que el fondo más eficiente es el de AFP Horizonte (menor probabilidad de pérdida).

En la tabla 24, se muestra —a manera de resumen— una comparación de los resultados obtenidos al aplicar las metodologías de probabilidad de pérdida y ratio de Sortino. Para el caso de la probabilidad de pérdida, los resultados corresponden a un afiliado con las características señaladas en el punto 7.2 del presente.

Tabla 24. Comparativo de metodologías

Probabilidad de pérdida - Sin octubre 2008				
Fondo	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Fondo 1	0,0000	0,0260	0,0061	0,0731
Fondo 2	0,9764	0,3318	0,1655	0,2747
Fondo 3	0,2188	0,1540	0,1010	0,1974

Probabilidad de pérdida - Con octubre 2008				
Fondo	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Fondo 1	0,0000	0,0486	0,0010	0,0532
Fondo 2	4,8639	2,8184	1,2835	1,8869
Fondo 3	0,8199	2,8098	2,7970	3,0123

Desempeño histórico - Ratio de Sortino				
Fondo	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Fondo 1	0,1971	0,0673	0,1002	0,0381
Fondo 2	-0,01742	-0,0007	0,0137	0,0089
Fondo 3	0,0129	-0,0104	-0,0091	-0,0227

Comisión de gestión				
Fondo	Horizonte %	Integra %	Prima %	Profuturo %
Comisión	1,8500	1,7400	1,6000	1,8400

7.7. Interpretación de resultados

En la tabla 24, en gris, se encuentra sombreada la mejor alternativa para cada fondo. En celeste, se resalta la alternativa menos recomendable para cada fondo. Por su parte, los recuadros remarcados señalan la mejor alternativa comparando todos los fondos de las AFP. Los recuadros que contienen doble línea inferior muestran las alternativas menos recomendables comparando todos los fondos de las AFP.

Para el caso del fondo 1, el ratio de Sortino evidencia que AFP Horizonte tiene el mayor valor (0,1971), mientras que AFP Profuturo presenta el menor exceso de rentabilidad ajustado por riesgo (0,0381). Por su lado, el análisis de la probabilidad de pérdida, con y sin octubre del 2008, da cuenta de que AFP Horizonte tiene la menor probabilidad de pérdida y AFP Profuturo tiene la mayor probabilidad de pérdida.

Cabe anotar que los resultados obtenidos coinciden en ambas metodologías.

Para el caso del fondo 2, los criterios del ratio de Sortino y la probabilidad de pérdida, con y sin octubre de 2008, coinciden en la selección del fondo más recomendable (AFP Prima) y menos recomendable (AFP Horizonte) respectivamente. En cuanto al fondo 3, los criterios del ratio de Sortino y la probabilidad de pérdida con octubre de 2008 concuerdan en la selección del fondo más recomendable (AFP Horizonte) y el menos recomendable (AFP Profuturo).

Los resultados de la probabilidad de pérdida, para el fondo 3, sin octubre de 2008, evidencian que el fondo menos recomendable es AFP Horizonte y el más recomendable es AFP Prima. Estos resultados divergen de aquellos obtenidos cuando se considera octubre de 2008. De igual modo, difieren de los resultados alcanzados mediante la aplicación del ratio de Sortino.

Una explicación de esta divergencia es que, en el caso de la probabilidad de pérdida con octubre de 2008 y en el cálculo del ratio de Sortino, se consideró la observación octubre de 2008, a diferencia del escenario sin octubre de 2008. Esto puede haber derivado en un efecto estadístico distinto dado que la inclusión o exclusión de la observación señalada incide en los parámetros de la distribución de probabilidad de los retornos.

En relación con la selección del fondo más eficiente, al comparar los fondos 1, 2 y 3 de cada AFP mediante la metodología del ratio de Sortino y la probabilidad de pérdida (con y sin octubre de 2008), se concluye que el fondo 1 de AFP Horizonte es el más eficiente: se obtiene el mayor ratio de Sortino y la menor probabilidad de pérdida. Cabe anotar que el fondo 1 de AFP Horizonte, además de ser el más eficiente en términos

de relación riesgo/retorno, presenta la mayor comisión de gestión: 1,84% (comisión por flujo).

Para el caso del fondo 2, AFP Horizonte presenta el fondo menos eficiente, pero con la más cara comisión de gestión. En esta categoría, el fondo más eficiente es el de Prima AFP, con un costo de 1,60%. Respecto al fondo 3, considerando las metodologías de ratio de Sortino y de probabilidad de pérdida (con octubre 2008), se obtiene que el fondo gestionado por AFP Horizonte es el más eficiente, y a su vez el de mayor comisión de gestión: 1,84%.

8. Conclusiones

Los fondos, materia del presente estudio, corresponden a los fondos 1, 2 y 3 de AFP Horizonte, Integra, Prima y Profuturo, cuyos retornos corresponden al período marzo 2006-mayo 2013.

En este trabajo, se desarrolló una nueva metodología para seleccionar un fondo de AFP, basado en el criterio de la probabilidad de pérdida del afiliado, la cual se define como la probabilidad de que la rentabilidad al vencimiento (TIR) no supere el costo de oportunidad del afiliado. Dentro de este marco, se consideraron supuestos específicos para su cálculo, los cuales pueden personalizarse para cada afiliado según su situación y expectativas particulares.

Es necesario precisar que los cálculos de la probabilidad de pérdida que se realizan en el presente artículo corresponden a un individuo con los supuestos señalados. En la modelización financiera, no se han considerado los efectos de la venta de AFP Horizonte ni las nuevas modificaciones al marco regulatorio (reforma del sistema privado de pensiones, comisiones y edad de jubilación), debido a que estas no proporcionan información histórica suficiente.

La probabilidad de pérdida constituye un indicador unidimensional a la medida del afiliado, que proporciona información para tomar la decisión sobre en qué fondo es más conveniente ahorrar para la jubilación. Bajo este criterio, el fondo más apropiado es aquel que tiene la relación rentabilidad/riesgo más eficiente. En ese sentido, son deseados aquellos fondos que tienen la menor probabilidad de pérdida (menor probabilidad de pérdida equivale a una mayor eficiencia).

Sobre la hipótesis a) del alcance del estudio, considerando los resultados obtenidos, bajo los supuestos de cálculo asumidos, se concluye que —en términos generales— la probabilidad de pérdida y el ratio de Sortino (desempeño histórico) coinciden en la selección del fondo más adecuado. Sin embargo, a nivel comparativo, dentro de cada tipo de fondo, existen algunas divergencias, dependiendo de si se considera octubre de 2008 en la distribución de los retornos. De acuerdo con ello, se obtuvo lo siguiente:

- El criterio de probabilidad de pérdida (con y sin octubre de 2008) y del ratio de Sortino permiten seleccionar el fondo más eficiente (fondo 1 de AFP Horizonte) de entre todos los fondos (1, 2 y 3). En ello, coinciden.
- Hay coincidencia en la determinación de los fondos más y menos eficientes en los fondos 1 y 2 mediante la probabilidad de pérdida (con y sin octubre de 2008) y considerando el ratio de Sortino.
- Para el caso del fondo 3, también, hay correspondencia al determinar los fondos más y menos eficientes, considerando la probabilidad de pérdida (con octubre de 2008) y con el ratio de Sortino.
- Existe divergencia entre la probabilidad de pérdida y el ratio de Sortino cuando se determina el fondo menos eficiente.

- Debe considerarse que la probabilidad de pérdida implica la medición de una rentabilidad esperada al vencimiento para un determinado afiliado. Es el resultado de una proyección financiera considerando supuestos de mercado y supuestos inherentes al afiliado. En cambio, el ratio de Sortino se mide utilizando información histórica de cada fondo.

En cuanto a la hipótesis b) del alcance del estudio, esta no se verifica, debido a que el test de normalidad arroja resultados distintos cuando se considera o excluye octubre de 2008. Los retornos históricos obtenidos por los fondos administrados por las AFP en el período de evaluación (información histórica) se distribuyen normalmente al 5% de significancia si se excluye los retornos de octubre de 2008 (fecha de inicio de la crisis financiera internacional). Si en el análisis de normalidad se considera los retornos de octubre de 2008, se rechaza el test de normalidad.

Asimismo, las series de tiempo de los retornos reales mensuales históricos con y sin octubre de 2008 son estacionarias al 1% de significancia. Ello implica que se acepta la hipótesis de que existe una media y varianza constantes durante el período de evaluación, lo cual concuerda con la distribución de retornos sin octubre de 2008 (normal) y con octubre de 2008 (logística). Los parámetros de estas distribuciones fueron utilizados en la estimación de la distribución de probabilidad de la rentabilidad al vencimiento (TIR).

En el caso de la hipótesis c) del alcance del estudio, se obtuvieron los siguientes resultados:

- El test de normalidad, al 5% de significancia de todas las distribuciones de probabilidad de la rentabilidad al vencimiento (TIR) de los fondos administrados por las AFP, indica que siguen el patrón de una distribución normal, considerando octubre de 2008.

- Al mismo nivel de significancia, el test de normalidad, sin considerar octubre de 2008, señala que la TIR se distribuye normalmente para todos los fondos, con excepción de fondo 1 de AFP Prima (distribución beta), fondo 2 de AFP Profuturo (distribución Weibull) y fondo 3 de AFP Horizonte (distribución logística).

Respecto a la hipótesis d) del alcance del estudio, al comparar la probabilidad de pérdida de cada fondo y sus comisiones de gestión, se obtiene que no necesariamente las AFP con las comisiones de gestión más altas son las menos rentables, y viceversa. En el período de análisis, la comisión de gestión de AFP Horizonte es la más alta y es, a su vez, la que presenta la mayor eficiencia (relación riesgo-retorno) en el fondo 1. Sin embargo, en el fondo 2, la misma AFP es la más cara y la menos eficiente, mientras que AFP Prima es la menos cara y más eficiente.

Es necesario señalar que el sistema de comisiones en evaluación ha sido el de flujo; sin embargo, la Superintendencia de Banca y Seguros a la fecha viene implementando sistemas alternativos, como el de comisión por saldo, no evaluados en el presente estudio.

Finalmente, a partir de la hipótesis e) del alcance del estudio, se obtiene la probabilidad de pérdida del afiliado para todos los fondos (1, 2 y 3), con y sin octubre de 2008. En este caso, la probabilidad de pérdida es menor al 5%. De este modo, se concluye que la probabilidad de que la rentabilidad esperada al vencimiento (neto de comisiones) del afiliado sea menor a su costo de oportunidad es menor al 5%. Ello se interpreta como una baja probabilidad, de no superar a los retornos de un portafolio internacional.

Referencias bibliográficas

- Alonso, Javier, Carlos Herrera, María Llanes & David Tuesta (2010). *Simulaciones de rentabilidades de largo plazo y tasas de reemplazo en el sistema de pensiones de Colombia*. Documentos de Trabajo – BBVA Research, Documento de Trabajo N° 10. Santiago de Chile: BBVA Research.
- Banco Central de Reserva del Perú (2013). Consulta a series estadísticas del BCRP. Recuperado el 15 de abril de 2014, de <http://estadisticas.bcrp.gob.pe/index.asp?sIdioma=1&sTitulo=todo&sFrecuencia=M>
- Benninga, Simon (2008). *Financial Modeling* (3ª ed.). Massachusetts: The MIT Press.
- Bernal, Noelia, Ángel Muñoz, Hugo Perea, Johanna Tejada & David Tuesta (2008). *Una mirada al sistema privado de pensiones diagnóstico y propuestas*. Lima: BBVA – Estudios Previsionales.
- Berstein, Solange & Rubén Castro (2005). *Costos y rentabilidad de los fondos de pensiones: ¿qué informar a los afiliados?* Serie Documentos de Trabajo, Documento de Trabajo N° 1. Santiago de Chile: Superintendencia de AFP.
- Castillo, Paul & Ruy Lama (1998). Evaluación de portafolio de inversionistas institucionales: fondos mutuos y fondos de pensiones. *Estudios Económicos*, 3, 1-38. Lima: Banco Central de Reserva del Perú.
- Comisión Técnica de Inversiones de la Asociación Internacional de Organismos Supervisores de Pensiones (AIOS) (1999). Análisis de la rentabilidad de los fondos de pensión. *Revista Internacional de Fondos de Pensiones*, noviembre, 1.
- Damodaran, Aswath (2002). *Investment Valuation: tools and techniques for determining the value of any asset*. Nueva York: Wiley.
- DeMiguel, Víctor, Lorenzo Garlappi & Raman Uppal (2009). Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy. *The Review of Financial Studies*, 22(5), 1915-1953.
- Fishburn, Peter (1977). Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. *The American Economic Review*, 67(2), 115-126.
- Giles, David (2000). *A saddlepoint approximation to the distribution function of the Anderson-Darling test statistic*. Econometrics Working Paper 0005. Victoria, Canadá: Victoria University.
- Gurovich, Gabriela (2005). *Análisis del desempeño de los multifondos en el sistema de pensiones chileno: benchmarks por grupos y por clases de activos*. Tesis de Magister en Economía. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Ho, Thomas & Sang Lee (2004). *The Oxford Guide to Financial Modeling*. Nueva York: Oxford University Press.
- Instituto Nacional de Estadística e Informática (s.f.). *Población y vivienda*. Recuperado el 15 de abril de 2014, de <http://www.inei.gob.pe/estadisticas/indice-tematico/poblacion-y-vivienda/>
- Medina, Alex, Cecilia Gallegos, Celso Vivallo, Yasna Cea & Alexi Alarcón (2013). Efecto sobre la rentabilidad que tiene para el afiliado la comisión cobrada por las administradoras de fondos de pensiones. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 18(34), 24-33.
- Mendiola, Alfredo, Carlos Aguirre, Diego Buendía, Jean Paul Chong, Marco Antonio Segura & Marco Aurelio Segura (2013). *Análisis del sistema privado de pensiones: propuesta de reforma y generación de valor*. Serie Gerencia para el Desarrollo 29. Lima: Universidad Esan.
- Ministerio de Economía y Finanzas (2013). *Marco Macroeconómico Multianual. Revisado 2014-2016 (Actualizado al mes de agosto de 2013)*. Recuperado el 15 de abril de 2014, de http://www.mef.gob.pe/contenidos/pol_econ/marco_macro/MMM2014_2016_Rev.pdf
- Ministerio de Trabajo y Promoción del Empleo (2013). *Departamentos 2013*. Recuperado el 15 de abril de 2014, de <http://www.mintra.gob.pe/mostrarResultado.php?id=151&tip=548>

- Munnell, Alicia, Jean-Pierre Aubri & Josh Hurwitz (2013). How sensitive is public pension funding to investment returns? *State and Local Pension Plans*, Brief 34. Chestnut Hill, MA: Center for Retirement Research at Boston College.
- Oracle (2012). *User's guide 11.1.2*. Oracle Crystal Ball.
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2009a). *Histórico del SPP*. Recuperado el 30 de enero de 2014, de <http://www.sbs.gob.pe/app/stats/EstadisticaBoletinEstadisticoHist.asp?p=36#>
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2009b). *Principales variables del SPP*. Recuperado el 30 de enero de 2014, de <http://www.sbs.gob.pe/app/stats/EstadisticaBoletinEstadistico.asp?p=38#>
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2012a). *Resolución S.B.S. 8514-2012*. Lima, noviembre.
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2012b). *Anejos Técnicos 1 y 2. Resolución S.B.S. 8514-2012*. Lima, noviembre.
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2012c). *Resolución S.B.S. 9617-2012*. Lima, diciembre.
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2013d). *Resolución S.B.S. 2935-2013*. Lima, mayo.
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2014). *Cartilla informativa multifondos*. Recuperado el 15 de abril de 2014, de http://www.sbs.gob.pe/0/modulos/JER/JER_Interna.aspx?ARE=0&PFL=0&JER=2338
- Valdés, Salvador (1992). *Selección de AFP y regulación de la información*. Documento de Trabajo 140. Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile – Instituto de Economía.
- Wojt, Alexander (2009). *Portfolio Selection and Lower Partial Moments*. Master thesis. Royal Institute of Technology of Stockholm.
- Zanabria, Paul (2007). *Modelos de atribución de desempeño y su aplicación al manejo de portafolios*. *Revista Moneda*, 136, 35-41. Lima: Banco Central de Reserva del Perú.

Fecha de recepción: 17 de noviembre de 2013

Fecha de aceptación: 19 de julio de 2014

Correspondencia: juan.ames@pucp.edu.pe