

# GLS para eliminar los componentes determinísticos, estadísticos de raíz unitaria eficientes y cambio estructural\*

PIERRE PERRON\*\*

GABRIEL RODRÍGUEZ\*\*\*

## RESUMEN

Extendemos los estadísticos tipo M para una raíz unitaria analizados por Perron y Ng (1996) y Ng y Perron (2001) al caso donde se permite que el cambio en la función de tendencia ocurra en un punto desconocido. Estos estadísticos ( $M^{GLS}$ ) adoptan el enfoque GLS para eliminar la tendencia desarrollado por Elliott *et al.* (1996) (ERS) siguiendo los resultados de Dufour y King (1991). Siguiendo a Perron (1989), consideramos dos modelos: uno que permite un cambio en la pendiente y otro que permite tanto un cambio en el intercepto como en la pendiente. Derivamos las distribuciones asintóticas así como el estadístico óptimo factible en un punto de la hipótesis alternativa ( $P_T^{GLS}$ ) sugerido por ERS. También computamos el parámetro de no centralidad utilizado por el enfoque GLS local a la unidad con el fin de eliminar la tendencia que permite que el estadístico  $P_T^{GLS}$  tenga 50% de potencia asintótica en ese valor. Asimismo, se han tabulado los valores críticos asintóticos de los estadísticos. Mostramos que los estadísticos  $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$  tienen una función de potencia asintótica cercana a la envolvente de potencia. Un estudio de simulación analiza el tamaño y potencia en muestras finitas bajo varios métodos para seleccionar la truncación para estimar la densidad espectral autorregresiva. Finalmente, también se presenta una aplicación empírica.

**Palabras clave:** proceso integrado; quasi-diferenciación; punto de quiebre; parámetro de truncación; criterios de información.

**Clasificación JEL:** C22

---

\* Este documento es una traducción de Perron, P. y G. Rodríguez (2003). «GLS Detrending, Efficient Unit Root Tests and Structural Change», *Journal of Econometrics* 115, pp. 1-27. La versión original de este documento se publicó cuando Rodríguez trabajaba como profesor del Departamento de Economía de la Universidad de Ottawa, Canadá. La versión traducida fue realizada por Jan-David Gelles, a quien agradecemos. Asimismo reconocemos la paciencia y dedicación de Patricia Lengua Lafosse, quien se encargó de revisar la versión traducida. Finalmente, queremos dar las gracias al editor de la revista (Carlos Contreras) y al Consejo Editorial por el interés en realizar la traducción y publicación de esta investigación.

\*\* Dirección de correspondencia: Pierre Perron, Full Professor, Department of Economics, Boston University, 270 Bay State Road, Boston, MA 02215, USA, correo electrónico: perron@bu.edu.

\*\*\* Gabriel Rodríguez, Profesor Principal, Departamento de Economía, Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú, correo electrónico: gabriel.rodriguez@pucc.edu.pe.

## GLS detrending, efficient unit root tests and structural change

### ABSTRACT

We extend the class of M-tests for a unit root analyzed by Perron and Ng (1996) and Ng and Perron (1997) to the case where a change in the trend function is allowed to occur at an unknown time. These tests M(GLS) adopt the GLS detrending approach of Dufour and King (1991) and Elliott, Rothenberg and Stock (1996) (ERS). Following Perron (1989), we consider two models: one allowing for a change in slope and the other for both a change in intercept and slope. We derive the asymptotic distribution of the tests as well as that of the feasible point optimal tests PT(GLS) suggested by ERS. The asymptotic critical values of the tests are tabulated. Also, we compute the non-centrality parameter used for the local GLS detrending that permits the tests to have 50% asymptotic power at that value. We show that the M(GLS) and PT(GLS) tests have an asymptotic power function close to the power envelope. An extensive simulation study analyzes the size and power in finite samples under various methods to select the truncation lag for the autoregressive spectral density estimator. An empirical application is also provided.

**Keywords:** integrated process; quasi-differencing; change-point; truncation lag; information criteria

### 1. INTRODUCCIÓN

Desde la publicación del artículo fundamental de Nelson y Plosser (1982), la hipótesis de raíz unitaria ha recibido mucha atención tanto desde perspectivas teóricas como empíricas (p.ej., ver Campbell y Perron (1991) y Stock (1994) para un balance). Utilizando estadísticos desarrollados por Dickey y Fuller (1979), Nelson y Plosser (1982) argumentaron que los choques corrientes tienen efectos permanentes sobre los niveles de la mayoría de las series macroeconómicas. Este hallazgo recibió apoyo de otros enfoques que encontraron que un choque típico tiene tanto componentes transitorios como permanentes importantes (véase, p.ej., Campbell y Mankiw, 1987, 1988; Shapiro y Watson, 1988; Clark, 1987; Cochrane, 1988).

En contraste con esta literatura, Perron (1989) argumentó, como alternativa a la hipótesis de raíz unitaria, que las fluctuaciones macroeconómicas son probablemente estacionarias si se permite que la función de tendencia exhiba cambios estructurales. Permitiendo un único cambio en el intercepto y/o en la pendiente, Perron (1989) rechazó la hipótesis de raíz unitaria para 11 de las 14 series analizadas por Nelson y Plosser (1982). Tal como se discute en Banerjee *et al.* (1992), ese hallazgo puede ser importante por las siguientes razones. Primero, ofrece una descripción alternativa de la persistencia de las series macroeconómicas. Segundo, ese enfoque puede brindar un modelo parsimonioso para un cambio lento en el componente de la tendencia que puede ser útil como una descripción de los datos. Tercero, las implicancias para la inferencia en modelos más complejos son muy diferentes.

Christiano (1992) criticó los resultados de Perron (1989) sobre la base que los puntos de quiebre no se deben tratar como exógenos considerando que la imposición de un punto de quiebre dado involucra una cuestión de explotación de los datos. Consecuentemente, Zivot y Andrews (1992), Banerjee *et al.* (1992) y Perron (1997) consideraron estadísticos de raíz unitaria con puntos de quiebre desconocidos.

En este documento, continuamos tratando los potenciales puntos de quiebre como puntos que aparecen en tiempos desconocidos y contribuimos a la literatura de dos formas. Primero, utilizamos los estadísticos  $M^{GLS}$ , analizados por Perron y Ng (1996), y los extendemos para permitir un cambio de una sola vez en la función de tendencia. Segundo, siguiendo a Elliott *et al.* (1996) (en adelante ERS) y el trabajo previo de Dufour y King (1991), utilizamos el enfoque *GLS* local a la unidad para eliminar la tendencia de los datos. Consideramos dos modelos específicos: uno con un quiebre en la pendiente en la función de tendencia y uno con un quiebre tanto en el intercepto como en la pendiente. En este marco teórico, no hay necesidad de analizar el caso donde solamente existe un cambio en el intercepto dado que los estadísticos tienen entonces la misma distribución asintótica que en el caso donde los componentes determinísticos incluyen una constante y una tendencia, lo que fue analizado en ERS (dado que un cambio en el intercepto es un caso especial de lo que ellos denominan «un componente determinístico que evolucionada lentamente»).

Las razones para considerar los estadísticos tipo M, originalmente propuestos por Stock (1990) y analizados adicionalmente por Perron y Ng (1996), es que estos tienen distorsiones de nivel de mucho menor tamaño que otras clases de estadísticos de raíz unitaria cuando los errores tienen una fuerte correlación serial negativa. También, el uso del método *GLS* para eliminar la tendencia cuando se construyen estadísticos del tipo M permiten ganancias sustanciales en términos de potencia como lo muestran Ng y Perron (2001), similar al estadístico  $DF^{GLS}$  propuesto por ERS.

Dado que el estadístico uniforme más potente no es alcanzable, seguimos a ERS y derivamos un estadístico óptimo factible en un punto ( $P_T^{GLS}$ ). La función de potencia asintótica de este estadístico se deriva y utilizamos la envolvente de potencia asociada para escoger el parámetro de no centralidad ( $\bar{c}$ ) para aplicar el método *GLS* de eliminación de tendencia, tal que la potencia asintótica del estadístico sea 50% contra la alternativa local  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ . Para nuestros dos modelos, obtenemos  $\bar{c} = -22,5$ .

El resto del presente documento se organiza como sigue. El modelo y algunos resultados teóricos preliminares se presentan en la sección 2. En la sección 3, derivamos la distribución asintótica de los estadísticos de  $M^{GLS}$  y  $DF^{GLS}$  en ambos casos donde el punto de quiebre es conocido o desconocido. La sección 4 considera la envolvente de potencia asintótica gaussiana y la distribución asintótica del estadístico óptimo factible en un punto. Los valores críticos asintóticos y la función de potencia asintótica de los estadísticos se presentan en la sección 5. La sección 6 considera el tamaño y la potencia de los estadísticos en muestras finitas utilizando simulaciones. La sección 7 presenta aplicaciones empíricas y la sección 8 concluye brevemente. El apéndice contiene las derivaciones técnicas.

## 2. ENFOQUE MCG PARA LA ELIMINACIÓN DE LA TENDENCIA CON CAMBIO ESTRUCTURAL

El proceso de generación de los datos considerado tiene la siguiente forma:

$$y_t = d_t + u_t, \quad t = 0, \dots, T, \tag{1}$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + v_t, \tag{2}$$

donde  $\{v_t\}$  es un proceso estacionario no observado con promedio cero. Utilizamos el supuesto que  $u_0 = 0$  en adelante ya que los resultados generalmente tienen validez para el requerimiento más débil, donde  $E(u_0) < \infty$ . La función de ruido es  $v_t = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \eta_{t-i}$  donde  $\sum_{i=0}^{\infty} i|\gamma_i| < \infty$  y donde  $\{\eta_t\}$  es una diferencia martingal. El proceso  $v_t$  tiene una densidad espectral no normalizada en la frecuencia cero dada por  $\sigma^2 = \sigma_\eta^2(1)^2$ , donde  $\sigma_\eta^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} E(\eta_i^2)$ .

Adicionalmente,  $T^{-1/2} \sum_{t=1}^{[rT]} v_t \Rightarrow \sigma W(r)$ , donde  $\Rightarrow$  denota convergencia débil en distribución y  $W(r)$  es un proceso tipo Wiener definido en  $C[0:1]$ ; el espacio de funciones continuas en el intervalo  $[0:1]$ . En (1),  $d_t = \psi'z_t$ , donde  $z_t$  es un conjunto de componentes determinísticos a ser discutidos luego. Para cualquier serie  $y_t$ , con componentes determinísticos  $z_t$ , definimos los datos transformados  $y_t^{\bar{\alpha}}$  y  $z_t^{\bar{\alpha}}$  por:

$$y_t^{\bar{\alpha}} = (y_0, (1 - \bar{\alpha}L)y_t), \quad z_t^{\bar{\alpha}} = (z_0, (1 - \bar{\alpha}L)z_t), \quad t = 0, \dots, T.$$

Definamos  $\hat{\psi}$  el estimador que minimiza:

$$S^*(\psi, \bar{\alpha}, \delta) = \sum_{t=0}^T (y_t^{\bar{\alpha}} - \psi'z_t^{\bar{\alpha}})^2 \tag{3}$$

y denominemos al valor minimizado por  $S(\bar{\alpha}, \delta)$ .

### 2.1. LA ESPECIFICACIÓN DE LOS COMPONENTES DETERMINÍSTICOS

*Modelo I. Cambio estructural en la pendiente:* para este modelo, el conjunto de los componentes determinísticos de  $z_t$  en (1), está dado por:

$$z_t = \{1, t, 1(t > T_B)(t - TB)\}, \tag{4}$$

donde  $1(\cdot)$  es la función de indicador y  $T_B$  es el punto de quiebre. Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $T_B = T_\delta$  para algún  $\delta$  en el intervalo  $(0,1)$ . En este caso,  $\hat{\psi}(\delta) = (\hat{\mu}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)'$  es el vector de los estimados que minimiza (3).

*Modelo II. Cambio estructural en el intercepto y la pendiente:* para este modelo:

$$z_t = \{1, 1(t > T_B), t, 1(t > T_B)(t - T_B)\}. \tag{5}$$

En este caso, el vector de coeficientes estimados es  $\hat{\psi}(\delta) = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)'$ . En este modelo, tenemos los mismos resultados que en el Modelo 1 dado que el efecto de  $\hat{\mu}_2 - \mu_2$  desaparece en muestras grandes. Esto es así porque el cambio en el intercepto es un caso especial de un componente determinístico de lenta evolución en la condición B de ERS.

### 3. LOS ESTADÍSTICOS Y SUS DISTRIBUCIONES ASINTÓTICAS

#### 3.1. LOS ESTADÍSTICOS

Los estadísticos tipo M, originalmente propuestos por Stock (1990), y luego analizados por Perron y Ng (1996), explotan la característica que una serie converge a distintas tasas de normalización bajo la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Estos estadísticos se definen por:

$$MZ_{\alpha}^{GLS}(\delta) = (T^{-1}\tilde{y}_T^2 - s^2) \left( 2T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 \right)^{-1}, \tag{6}$$

$$MSB^{GLS}(\delta) = \left( T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 / s^2 \right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$MZ_t^{GLS}(\delta) = (T^{-1}\tilde{y}_T^2 - s^2) \left( 4s^2 T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 \right)^{-1/2} \tag{8}$$

donde  $\tilde{y}_t = y_t - \hat{\psi}' z_t$  y donde  $\hat{\psi}$  minimiza (3). El término  $s^2$  es el estimador autorregresivo de la densidad espectral a la frecuencia cero de  $v_t$ , definida como:

$$s^2 = s_{ek}^2 / (1 - \hat{b}(1))^2, \tag{9}$$

donde  $s_{ek}^2 = (T - k)^{-1} \sum_{t=k+1}^T \hat{e}_{tk}^2$ ,  $\hat{b}(1) = \sum_{j=1}^k \hat{b}_j$ , y  $\hat{b}_j \{ \hat{e}_{tk} \}$  son obtenidos de la regresión (véase Perron y Ng (1998) para más detalles):

$$\Delta \tilde{y}_t = b_0 \tilde{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^k b_j \Delta \tilde{y}_{t-j} + e_{tk}. \tag{10}$$

El primer estadístico es una versión modificada del estadístico  $Z_{\bar{\alpha}}$  de Phillips y Perron (1988), originalmente desarrollado por Phillips (1987). El segundo estadístico es una versión modificada del estadístico  $R_1$  de Bhargava's (1986), que se basa en el trabajo de Sargan y Bhargava (1983). El tercer estadístico es una versión modificada del estadístico  $Z_t$  de Phillips y Perron (1988). Como Perron y Ng (1996) han mostrado, los estadísticos MSB y  $Z_{\bar{\alpha}}$  se relacionan por  $Z_t \approx MSB \times Z_{\bar{\alpha}}$ . Esta relación sugiere el estadístico  $MZ_t$ , definido por (8) dado que este satisface la relación  $MZ_t = MSB \times MZ_{\bar{\alpha}}$ . Otro estadístico de interés es el ADF que es el t-estadístico para probar  $b_0 = 0$  en la regresión (10), véase Dickey y Fuller (1979) y Said y Dickey (1984). La notación de este estadístico está dada por  $ADF(\delta)$ . Nuestro enfoque es una extensión de Ng y Perron (2001) y Elliott *et al.* (1996) para el caso donde la función de tendencia contiene un cambio estructural. En este caso, los estadísticos  $M^{GLS}$  dependerán del punto de quiebre desconocido de  $\delta$ .

### 3.2. DISTRIBUCIONES ASINTÓTICAS DE LOS ESTADÍSTICOS

Empezamos con una afirmación sobre la distribución asintótica de los estadísticos en el caso donde el punto de quiebre es conocido.

**Teorema 1.** *Permitamos que  $y_t$  sea generado por (1) donde  $\alpha = 1 + \bar{c}/T$ ,  $MZ_{\alpha}^{GLS}$ ,  $MSB_{\alpha}^{GLS}$  y  $MZ_t^{GLS}$  son definidos por (6)-(8) con datos obtenidos de la eliminación local de la tendencia mediante GLS ( $\hat{y}_t$ ) en el punto  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ , y  $ADF^{GLS}$  sea el estadístico  $t$  para probar  $b_0 = 0$  en la regresión (10). También,  $s^2$  es un estimador consistente de  $\sigma^2$ . Para los Modelos I y II, tenemos:*

$$MZ_{\alpha}^{GLS}(\delta) \Rightarrow \frac{0,5K_1(c, \bar{c}, \delta)}{K_2(c, \bar{c}, \delta)} = H^{MZ_{\alpha}^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta),$$

$$MSB_{\alpha}^{GLS}(\delta) \Rightarrow (K_2(c, \bar{c}, \delta))^{1/2} = H^{MSB_{\alpha}^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta),$$

$$MZ_t^{GLS}(\delta) \Rightarrow \frac{0,5K_1(c, \bar{c}, \delta)}{(K_2(c, \bar{c}, \delta))^{1/2}} = H^{MZ_t^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta),$$

$$ADF^{GLS}(\delta) \Rightarrow \frac{0,5K_1(c, \bar{c}, \delta)}{(K_2(c, \bar{c}, \delta))^{1/2}} = H^{ADF^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta),$$

Donde:

$$K_1(c, \bar{c}, \delta) = V_{\bar{c}\bar{c}}^{(1)}(1, \delta)^2 - 2V_{\bar{c}\bar{c}}^{(2)}(1, \delta) - 1,$$

$$K_2(c, \bar{c}, \delta) = \int_0^1 V_{\bar{c}\bar{c}}^{(1)}(r, \delta)^2 dr - 2 \int_{\delta}^1 V_{\bar{c}\bar{c}}^{(2)}(r, \delta) dr,$$

Y:

$V_{\bar{c}\bar{c}}^{(1)}(r, \delta) = W_c(r) - rb_3$ ,  $V_{\bar{c}\bar{c}}^{(2)}(r, \delta) = b_4(r - \delta)[W_c(r) - rb_3 - (1/2)(r - \delta)b_4]$ , donde  $W_c(r)$  es el proceso Ornstein-Uhlenbeck que es la solución a la ecuación estocástica diferencial  $dW_c(r) = c W_c(r) dr + dW(r)$  donde  $W_c(0) = 0$ . También,  $b_3, b_4$  se definen por  $b_3 = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$  y:

$b_4 = (\lambda_2 b_1 + \lambda_3 b_2)$ , donde  $b_1 = (1 - \bar{c})W_c(1) + \bar{c}^2 \int_0^1 r W_c(r) dr$ ,  $b_2 = (1 - \bar{c} + \delta\bar{c})W_c(1) + \bar{c}^2 \int_{\delta}^1 W_c(r)(r - \delta) dr - W_c(\delta)$ ,  $\lambda_1 = d/\Theta$ ,  $\lambda_2 = -m/\Theta$ ,  $d = 1 - \delta - \bar{c} + 2\bar{c}\delta - \bar{c}\delta^2 - \bar{c}^2\delta + \bar{c}^2\delta^2 + (\bar{c}^2/3)(1 - \delta^3)$ ,  $m = 1 - \delta - \bar{c} + \bar{c}\delta - (\bar{c}^2/2)\delta + (\bar{c}^2/2)\delta^3 + (\bar{c}^2/3)(1 - \delta^3)$ ,  $a = 1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3$ ,  $\Theta = ad - m^2$  y  $\lambda_3 = a/\Theta$ .

En la práctica, es usual que un investigador quiera tratar el punto de quiebre como desconocido. En este caso, se necesita un estimador del punto de quiebre. Un método sugerido por Zivot y Andrews (1992) es considerar la estimación de  $\delta$  como el punto de quiebre que arroja el valor mínimo de los estadísticos, vale decir, usando  $\inf_{\delta} J^{GLS}(\delta)$ , donde  $J = MZ_{\alpha}, MSB, MZ_t$ , y  $ADF$ . Utilizando el Teorema de mapeo continuo y argumentos

como en Perron (1997), tenemos, asumiendo ningún cambio en la función de tendencia bajo la hipótesis nula:

$$\inf_{\delta \in [0,1]} J^{GLS}(\delta) \Rightarrow \inf_{\delta \in [0,1]} H^{J^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta), \tag{11}$$

para  $J = MZ\alpha, MSB, MZ_p$ , y  $ADF$  con las funciones  $H(\cdot)$  definidas en el Teorema 1. Nótese que no se necesita imponer ningún truncamiento sobre el rango posible de puntos de quiebre. Tal como se discute en Vogelsang y Perron (1998), el estimador implícito de  $\delta$  no es consistente con el valor verdadero del punto de quiebre cuando el proceso generador de datos contiene un quiebre. Dichos autores también notan que los estadísticos no son invariantes (incluso asintóticamente) a los valores de los coeficientes del cambio en la tendencia. No obstante, ellos argumentan que, en tamaños de muestra típicos, esto no es un problema a menos que los cambios sean extremadamente grandes. Así, estos estadísticos pueden todavía ser usados con los valores críticos derivados asumiendo ningún cambio bajo la hipótesis nula.

Un método alternativo para seleccionar la fecha de quiebre, tal como se usó en Perron (1997), es escogerla de modo que el valor absoluto del estadístico  $t$  del coeficiente del cambio de pendiente sea maximizado. Este procedimiento ha sido utilizado por muchos autores, por ejemplo, Christiano (1992), Banerjee *et al.* (1992), Perron (1997) y Vogelsang y Perron (1998). Consideremos, por ejemplo el Modelo I donde el componente determinístico está dado por  $d_t = \mu_1 + \beta_1 t + \beta_2(t - T_B)1(t > T_B)$ . Sea  $\hat{\beta}_2(\delta)$  el estimador  $GLS$  de  $\beta_2$  y  $t_{\hat{\beta}_2}(\delta)$  sea su  $t$ -estadístico asociado. El punto de quiebre puede ser seleccionado utilizando el estimador  $\hat{\delta} = \arg \max_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} |t_{\hat{\beta}_2}(\delta)|$ , donde  $\varepsilon$  es algún número pequeño que impone un recorte de los posibles valores de las fechas del quiebre. Utilizaremos en adelante  $\varepsilon = 0,15$ . Tal como se discute en Vogelsang y Perron (1998), si bajo la hipótesis nula tenemos  $\beta_2 \neq 0$  y el verdadero punto de quiebre está dado por  $T_B^0/T = \delta^0$ , entonces  $\hat{\delta}$  es un estimador consistente de  $\delta^0$  y las distribuciones asintóticas de los estadísticos corresponden a aquellos donde el punto de quiebre es conocido, vale decir, las distribuciones asintóticas dadas en el Teorema 1 evaluadas en  $\delta^0$ . En la práctica, uno simplemente puede evaluar esas distribuciones asintóticas en el valor estimado  $\hat{\delta}$ .

Cuando bajo la hipótesis nula  $\beta_2 = 0$ , en cuyo caso no hay cambio en la pendiente de la función de tendencia, es fácil mostrar (utilizando los resultados del Lema A.2 en el Apéndice A) que  $t_{\hat{\beta}_2}(\delta) \Rightarrow b_4/(\lambda_3^{1/2})$ , donde  $b_4$  y  $\lambda_3$  se definen en el Teorema 1. Tenemos entonces que:

$$\hat{\delta} = \arg \max_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} |t_{\hat{\beta}_2}(\delta)| \Rightarrow \arg \max_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} |b_4 / (\lambda_3^{1/2})| \equiv \delta^*. \tag{12}$$

Luego, las distribuciones asintóticas de los estadísticos están dadas por:

$$J^{GLS}(\hat{\delta}) \Rightarrow H^{J^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta^*), \tag{13}$$

para  $J = MZ_\alpha, MSB, MZ_\rho$ , y  $ADF$  con las funciones  $H(\cdot)$  definidas en el Teorema 1.

En la práctica, es difícil saber si hay un cambio en la pendiente porque cualquier prueba de tal hipótesis dependerá de si una raíz unitaria está presente o no. Luego, un procedimiento conservador es el de usar los valores críticos correspondientes al caso donde se asume que no hay quiebre, vale decir, (13). Ese es el procedimiento que utilizamos a continuación.

#### 4. ESTADÍSTICO ÓPTIMO FACTIBLE EN UN PUNTO Y LA ENVOLVENTE DE POTENCIA

Elliott *et al.* (1996), siguiendo a Dufour y King (1991), han considerado la cuestión del desarrollo de estadísticos con propiedades de optimalidad bajo errores gaussianos. El caso donde el punto de quiebre se asume conocido sigue de cerca su análisis. Si bien no se puede conseguir un estadístico uniforme de mayor potencia, es posible definir un estadístico óptimo puntual contra la hipótesis alternativa  $\alpha = \bar{\alpha}$ . Si  $v_t$  es i.i.d., esto viene dado por el estadístico de ratio de verosimilitud, que se simplifica, bajo normalidad, a  $L(\delta) = S(\bar{\alpha}, \delta) - S(1, \delta)$ , donde  $S(\bar{\alpha}, \delta)$  y  $S(1, \delta)$  son las sumas de los cuadrados de los errores de una regresión *GLS*, donde  $\alpha = \bar{\alpha}$  y  $\alpha = 1$ , respectivamente. La variación del valor de  $\bar{\alpha}$  da una familia de estadísticos óptimos en un punto y la envolvente de potencia para probar que  $\alpha = 1$ . Para admitir la posibilidad de correlación serial en los errores  $v_t$ , ERS propuso un estadístico óptimo factible en un punto ( $P_T^{GLS}$ ) definido por

$$P_T^{GLS}(c, \bar{c}, \delta) = \{S(\bar{\alpha}, \delta) - \bar{\alpha}S(1, \delta)\} / s^2. \tag{14}$$

El siguiente teorema indica la distribución asintótica del estadístico  $P_T^{GLS}$ .

**Teorema 2.** Dejemos que  $y_t$  sea generado por (1) donde  $\alpha = 1 + c/T$ . Dejemos que  $P_T^{GLS}$  sea definido por (14) con datos obtenidos de la aplicación *GLS* local a la unidad para la eliminación de la tendencia ( $\hat{y}_t$ ) en  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ . También, dejemos que  $s^2$  sea un estimador consistente de  $\sigma^2$ . La distribución asintótica del estadístico  $P_T^{GLS}$  bajo los Modelos I y II está dado por:

$$\begin{aligned} P_T^{GLS}(c, \bar{c}, \delta) &\Rightarrow M(c, \bar{c}, \delta) - M(c, \bar{c}, \delta) - 2\bar{c} \int_0^1 W_c(r) dW(r) \\ &+ (\bar{c} - 2\bar{c}c) \int_0^1 W_c(r)^2 dr - \bar{c} \\ &\equiv H^{P_T^{GLS}}(c, \bar{c}, \delta). \end{aligned} \tag{15}$$

donde  $M(c, \bar{c}, \delta) = A(c, \bar{c}, \delta)B(\bar{c}, \delta)^{-1}A(c, \bar{c}, \delta)$  y donde  $A(c, \bar{c}, \delta)$  es un vector  $2 \times 1$  definido por

$$\begin{bmatrix} W(1) + (c - \bar{c}) \int_0^1 W_c(r) dr \\ -\bar{c} \int_0^1 r dW(r) - (c - \bar{c}) \bar{c} \int_0^1 r W_c(c) dr \\ (1 + \delta \bar{c}) \left( [W(1) - W(\delta)] + (c - \bar{c}) \int_\delta^1 W_c(r) dr \right) \\ -\bar{c} \int_\delta^1 r dW(r) - (c - \bar{c}) \bar{c} \int_\delta^1 r W_c(r) dr \end{bmatrix}$$

y  $B(\bar{c}, \delta)$  es una matriz simétrica con entradas:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}^2/3 - \bar{c} + 1 & (1 - \delta)(1 - \bar{c}) + \bar{c}^2(2 + \delta^3 - 3\delta)/6 \\ \bar{c}^2(1 - \delta^3)/3 - \bar{c}(1 - \delta^2)(1 + \delta\bar{c}) + (1 - \delta)(1 + \delta\bar{c})^2 \end{bmatrix}$$

La expresión asintótica (15) para el estadístico  $P_T^{GLS}$  nos permite definir la envolvente de potencia para los dos modelos y está dada por  $\pi(c, \delta) = \Pr[H_T^{P^{GLS}}(c, c, \delta)] < b_T^{P^{GLS}}(c, \delta)$ , donde  $b_T^{P^{GLS}}(c, \delta)$  es tal que  $\Pr[H_T^{P^{GLS}}(0, c, \delta) < b_T^{P^{GLS}}(c, \delta)] = \nu$ , donde  $\nu$  es el tamaño del estadístico. Nótese que, en general, una envolvente de diferente existe para cada valor de  $\delta$ .

Cuando  $\delta$  es desconocido, las cosas son diferentes. El principio, sin embargo, es el mismo. Se maximiza la función de verosimilitud bajo la hipótesis nula y alternativa, el estimador de  $\delta$  se deberá escoger para minimizar la suma al cuadrado de los residuos  $S(1, \delta)$  y  $S(\bar{\alpha}, \delta)$ , respectivamente. Por ello, la correspondiente versión asintótica del estadístico óptimo factible en un punto es

$$P_{T,s^*}^{GLS}(c, \bar{c}) = \left\{ \inf_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} S(\bar{\alpha}, \delta) - \inf_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} \bar{\alpha} S(1, \delta) \right\} / s^2.$$

Nótese que un recorte  $\varepsilon$  es necesario ya que de otra manera los valores críticos se vuelven ilimitados. La razón es similar a la encontrada en el contexto de los estadísticos para el cambio estructural (véase, por ejemplo, Andrews, 1993). Utilizamos  $\varepsilon = 0,15$  en adelante. En el caso del estadístico óptimo factible en un punto, hay un problema de cuál método escoger para seleccionar la fecha de quiebre para construir el estimador  $s^2$ . Basado en propiedades de muestras finitas evaluadas por medio de simulaciones, optamos por evaluar  $s^2$  en el punto de quiebre  $\hat{\delta}$ , digamos, el que minimiza la suma al cuadrado de los residuos bajo la alternativa, vale decir, seleccionamos  $\hat{\delta} = \arg \min_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} S(\bar{\alpha}, \delta)$ . Utilizando el Teorema 2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
 P_{T,*}^{GLS}(c, \bar{c}) &\Rightarrow \sup_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} M(c, 0, \delta) - \sup_{\delta \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]} M(c, \bar{c}, \delta) \\
 &- 2\bar{c} \int_0^1 W_c(r) dW(r) + (\bar{c}^2 - 2\bar{c}c) \int_0^1 W_c(r)^2 dr - \bar{c} \\
 &\equiv H_*^{P_T^{GLS}}(c, \bar{c}).
 \end{aligned} \tag{16}$$

La envolvente de potencia asintótica gaussiana se define luego como  $\pi^*(c) = \Pr[H_*^{P_T^{GLS}}(c, c) < b_*^{P_T^{GLS}}(c)]$ , donde  $b_*^{P_T^{GLS}}(c)$  es tal que  $\Pr[H_*^{P_T^{GLS}}(0, c) < b_*^{P_T^{GLS}}(c)] = \nu$ , y  $\nu$  es el tamaño del estadístico. Adicionalmente, la envolvente de potencia nos permite encontrar el parámetro de no centralidad “óptimo”  $\bar{c}$  para nuestros modelos. ERS recomendó escoger el valor  $\bar{c}$  tal que la potencia asintótica del estadístico sea 50%, vale decir,  $\bar{c}$  es tal que  $\Pr[H_*^{P_T^{GLS}}(\bar{c}, \bar{c}) < b_*^{P_T^{GLS}}(\bar{c})] = 0,5$ . Utilizando simulaciones, encontramos que  $c = -22,5$  y utilizamos este valor en el resto del documento.

### 5. VALORES CRÍTICOS Y FUNCIONES DE POTENCIA ASINTÓTICA

En esta sección, obtenemos los valores críticos asintóticos para los estadísticos asumiendo que  $\bar{c} = -22,5$  se utiliza para eliminar la tendencia de los datos. Simulamos directamente las distribuciones asintóticas utilizando  $T = 1000$  para aproximar el proceso de Wiener entre  $[0,1]$  como las sumas parciales de variables aleatorias *i. i. d*  $N(0,1)$ . Las distribuciones asintóticas están tabuladas para la hipótesis nula  $c = 0$ . Para las distribuciones de muestras finitas, utilizamos  $T = 100$  con datos generados por una marcha aleatoria con condición inicial igual a cero y errores *i. i. d*  $N(0,1)$ . Aquí el parámetro  $k$  se fija en 0, lo que equivale a utilizar el valor real de  $\sigma^2$ ; los efectos de seleccionar  $k$  se investigan en la siguiente sección. En todos los casos, se utilizan 10 000 replicaciones. Los resultados están en las primeras tres columnas del cuadro 1a y el cuadro 1b para el caso donde el punto de quiebre se selecciona minimizando los estadísticos y cuando el punto de quiebre se selecciona maximizando el valor absoluto de estadístico  $t$  del coeficiente de cambio de pendiente, respectivamente. En general, la aproximación a la distribución de la muestra finita es adecuada pero algo menos buena para el Modelo II que contiene un cambio en el intercepto que es asintóticamente sin importancia.

Las funciones de potencia asintótica de los estadísticos se definen por  $\pi_{JGLS}^*(c, \bar{c}) = \Pr[\inf_{\delta \in [0,1]} H^{JGLS}(c, \bar{c}, \delta^*) < b^{JGLS}(\bar{c})]$  o  $\pi_{JGLS}^*(c, \bar{c}) = \Pr[H^{JGLS}(0, \bar{c}, \delta^*) < b_*^{JGLS}(\bar{c})]$  para  $J = MSB, MSB, MZ, ADF$  y donde  $H^i(c, \bar{c})$  se define en el Teorema 1 y  $\delta^*$  se define por (12). Las constantes  $b^{JGLS}(\bar{c})$  and  $b_*^{JGLS}(\bar{c})$  son tales que  $\Pr[\inf_{\delta \in [0,1]} H^{JGLS}(0, \bar{c}, \delta^*) < b^{JGLS}(\bar{c})] = \nu$ , y  $\Pr[H^{JGLS}(0, \bar{c}, \delta^*) < b_*^{JGLS}(\bar{c})] = \nu$ , es el tamaño de los estadísticos. Las funciones de potencia asintótica se muestran en la figura 1 donde la línea sólida es la envolvente de potencia. Los estadísticos  $M^{GLS}$ , y especialmente el estadístico  $P_T^{GLS}$ , tienen funciones de potencia asintótica muy cercanas a la envolvente de potencia tanto

cuando el punto de quiebre se selecciona minimizando los estadísticos como cuando se selecciona maximizando el valor absoluto del estadístico  $t$  del coeficiente del cambio en la pendiente. Esto también es cierto para el estadístico  $ADF^{GLS}$  dado que es asintóticamente equivalente al estadístico  $MZ_t^{GLS}$ . En consecuencia, en términos de potencia asintótica, todos los estadísticos considerados son básicamente iguales.

## 6. TAMAÑO Y POTENCIA DE LOS ESTADÍSTICOS EN MUESTRAS FINITAS

### 6.1. LA CUESTIÓN DEL TAMAÑO, LA SELECCIÓN DE $k$ Y LOS CRITERIOS DE INFORMACIÓN

Todos los estadísticos requieren de la estimación de la autorregresión aumentada (10). Ng y Perron (2001) recomendaron el uso de datos con la tendencia eliminada mediante  $GLS$  con el mismo parámetro de no centralidad  $\bar{c}$  para construir  $s^2$  y los estadísticos. Aquí seguimos su sugerencia y, en los resultados subsiguientes,  $\bar{c} = -22,5$  se utiliza para eliminar la tendencia de los datos cuando se construyen los estadísticos y cuando se estima la autorregresión (10) para construir  $s^2$ .

En nuestras simulaciones y aplicaciones empíricas, consideramos tres métodos dependientes de los datos para seleccionar el orden de la autorregresión. El primero es el Criterio de Información Bayesiano (BIC). Seguimos la recomendación de Ng y Perron (2001) y confinamos la búsqueda del mejor valor de  $k$  en el rango  $[0, k_{\max}]$ . También, todas las regresiones se estiman utilizando el mismo número de observaciones efectivas,  $T^* = T - k_{\max}$ . El BIC se define luego como  $k_{bic} = \operatorname{argmin}_{k \in [0, k_{\max}]} \{ \log(s_{ek}^2) + (\ln(T^*)k)/T^* \}$  donde  $s_{ek}^2 = T^{*-1} \sum_{t=k_{\max}}^T \hat{\epsilon}_{tk}^2$  y donde  $\hat{\epsilon}_{tk}$  es obtenido de (10) estimando de  $t = k_{\max} + 1$  hasta  $T$ . También consideramos el criterio de información modificada de Akaike (MAIC), recomendado por Ng y Perron (2001), definido por  $k_{maic} = \operatorname{argmin}_{k \in [0, k_{\max}]} \{ \log(s_{ek}^2) + (2(\hat{\tau}_T(k) + k))/T^* \}$ , donde  $\hat{\tau}_T(k) = (s_{ek}^2)^{-1} \hat{b}_0^2 \sum_{t=k_{\max}+1}^T \tilde{y}_{t-1}^2$  y donde  $\hat{b}_0$  se obtiene de (10). Como se muestra en Ng y Perron (2001), el MAIC opera igual de bien como otros criterios estándares de información cuando la magnitud de la correlación es poca pero brinda estadísticos de raíz unitaria que tienen un mejor tamaño de muestra finita con un componente MA negativo. También consideramos el estadístico  $t$ -secuencial, denominada  $t$ -sig, para la significancia del último rezago, considerado en Ng y Perron (1995), con un tamaño de dos colas de 10%. Cuando se usa un criterio de información, fijamos  $k_{\max} = \operatorname{int}[4*(T/100)^{(1/4)}]$  y para el método  $t$ -sig, fijamos  $k_{\max} = \operatorname{int}[4*(T/100)^{(1/4)}]$ . Nótese que una vez que se escoge la magnitud de orden de  $k$ , digamos en  $k^*$ ,  $s^2$  se construye utilizando todas las posibles observaciones, vale decir, estimando (10) a partir de  $t = k^* + 1$  hasta  $T$ .

Cuadro 1. Valores críticos; estadísticos  $P_t$ ,  $M$  y  $ADF$  seleccionando  $T_B$  minimizando el valor los estadísticos

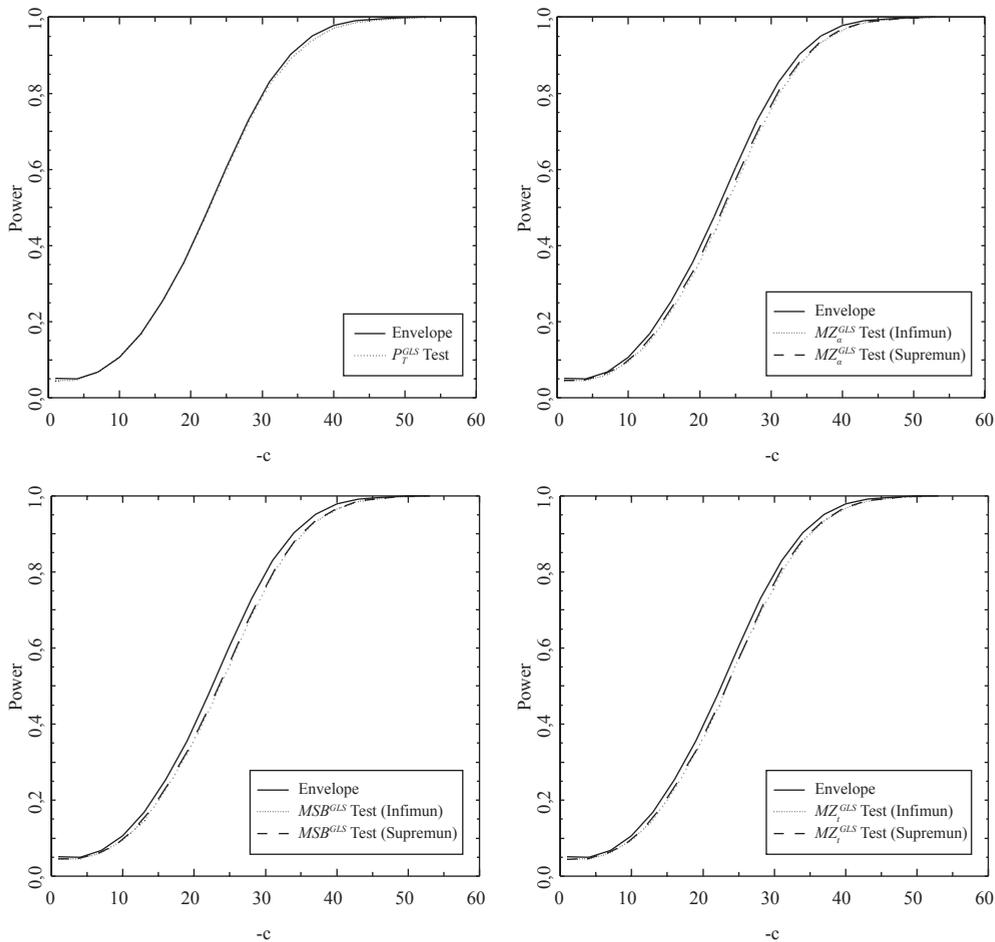
Text	Size	$k = 0$														
		Model I						Model II								
		$T = \infty$	$T = 100$	$T = 100$	$T = 200$											
$MZ_a$	0,01	-40,54	-41,90	-44,97	-29,44	-41,3	-185,7	-33,2	-38,3	-69,6	-31,3	-65,2	-293,9	-33,5	-40,1	-82,1
	0,025	-35,08	-36,71	-39,99	-26,4	-34,2	-1135	-29,4	-31,1	-51,7	-28,1	-39,1	-163,7	-30,5	-33,1	-62,5
	0,05	-31,04	-32,86	-35,99	-23,5	-28,6	-69,8	-25,4	-28,2	-42,8	-25,9	-33,7	-99,4	-27,1	-29,9	-49,9
	0,10	-26,57	-28,42	-31,38	-21,3	-24,2	-43,7	-22,2	-24,6	-34,9	-23,0	-26,9	-60,5	-23,7	-26,5	-39,5
	0,20	-2207	-23,60	-2648	-18,2	-20,2	-30,5	-18,7	-30,6	-26,3	-19,9	-22,6	-39,0	-20,2	-22,2	-30,1
	0,01	0,110	0,109	0,105	0,130	0,110	0,052	0,122	0,114	0,085	0,125	0,187	0,041	0,121	0,110	0,078
$MSB$	0,025	0,118	0,116	0,111	0,137	0,120	0,066	0,129	0,126	0,098	0,132	0,112	0,055	0,127	0,122	0,089
	0,05	0,126	0,123	0,117	0,145	0,130	0,084	0,139	0,132	0,107	0,137	0,121	0,072	0,135	0,129	0,099
	0,10	0,135	0,132	0,125	0,151	0,142	0,106	0,149	0,141	0,119	0,146	0,135	0,090	0,143	0,137	0,112
	0,20	0,148	0,144	0,136	0,163	0,155	0,127	0,161	0,154	0,137	0,157	0,146	0,113	0,155	0,148	0,128
	0,01	-4,49	-4,56	-4,74	-3,83	-4,54	-9,59	-4,06	-4,36	-5,89	-3,93	-5,59	-12,11	-4,07	-4,44	-6,41
	0,025	-4,17	-4,27	-4,46	-3,63	-4,13	-7,53	-3,79	-3,94	-5,08	-3,75	-4,41	-9,03	-3,86	-4,06	-5,56
$MZ_t$	0,05	-3,91	-4,04	-4,23	-3,42	-3,76	-5,89	-3,53	-3,74	-4,61	-3,56	-4,07	-7,01	-3,64	-3,85	-4,98
	0,10	-3,62	-3,75	-3,94	-3,24	-3,44	-4,65	-3,30	-3,49	-4,17	-3,36	-3,65	-5,48	-3,42	-3,60	-4,41
	0,20	-3,29	-3,41	-3,62	-2,99	-3,15	-3,87	-3,04	-3,19	-3,61	-3,13	-3,34	-4,40	-3,15	-3,30	-3,86
	0,01	-4,49	-4,70	-4,27	-4,54	-5,00	-5,00	-4,47	-4,72	-4,89	-4,74	-5,19	-5,18	-4,48	-4,88	-4,99
	0,025	-4,17	-4,37	-4,54	-4,25	-4,67	-4,68	-4,11	-4,32	-4,46	-4,42	-4,77	-4,88	-4,22	-4,42	-4,49
	0,05	-3,91	-4,11	-4,27	-3,91	-4,32	-4,42	-3,78	-4,06	-4,19	-4,14	-4,44	-4,63	-3,90	-4,17	-4,31
$ADF$	0,10	-3,62	-3,83	-3,99	-3,67	-3,91	-4,13	-3,49	-3,88	-4,34	-3,84	-4,19	-4,34	-3,62	-3,85	-4,07
	0,20	-3,29	-3,48	-3,65	-3,31	-3,54	-3,73	-3,18	-3,37	-3,51	-3,50	-3,72	-3,93	-3,29	-3,49	-3,69
	0,01	6,71	7,86	8,87	9,47	6,96	1,85	8,11	7,23	4,05	9,94	8,18	2,12	9,16	8,80	4,59
	0,025	7,82	8,96	9,55	10,53	8,27	3,15	9,39	8,82	5,44	10,91	9,31	3,08	10,60	9,46	5,76
	0,05	8,84	9,77	10,53	11,68	9,57	4,65	10,60	9,49	6,90	12,04	10,35	5,28	11,50	10,42	7,66
	0,10	10,29	11,53	11,99	13,01	11,46	7,22	12,29	11,12	8,31	13,83	11,77	7,43	13,08	11,79	9,32
0,20	12,28	13,50	14,08	15,12	13,67	10,08	14,62	13,23	10,89	15,79	14,06	10,20	15,16	14,14	11,50	

Cuadro 2. Valores críticos; estadísticos  $M$  y  $ADF$ , seleccionando  $T_B$  maximizando  $|t_{\hat{\beta}_2}|$

Text	Size	$k = 0$						Model I						Model II							
		$T = \infty$		$T = 100$		$T = 100$		$T = 100$		$T = 200$		$T = 200$		$T = 100$		$T = 100$		$T = 200$		$T = 200$	
		Model I	Model II	MAIC	BIC	t-sig	MAIC	BIC	t-sig	MAIC	BIC	t-sig	MAIC	BIC	t-sig	MAIC	BIC	t-sig	MAIC	BIC	t-sig
$MZ_a$	0,01	-39,97	-32,03	-30,88	-39,8	-139,1	-32,7	-37,1	-64,3	-27,0	-34,6	-130,5	-31,2	-32,8	-62,1						
	0,025	-34,68	-28,79	-27,75	-31,7	-87,0	-28,3	-30,5	-49,9	-24,9	-29,5	-86,5	-27,2	-30,1	-48,5						
	0,05	-30,54	-36,12	-25,56	-27,1	-58,2	-24,8	-27,5	-39,6	-22,9	-25,9	-55,3	-24,5	-27,5	-40,6						
	0,10	-26,30	-23,23	-22,86	-23,4	-37,0	-21,8	-24,3	-32,3	-20,7	-23,4	-36,6	-21,4	-23,8	-30,1						
	0,20	-21,82	-19,91	-19,72	-17,4	-19,6	-26,5	-18,2	-20,4	-24,8	-17,4	-19,5	-25,8	-18,2	-20,2	-24,4					
$MSB$	0,01	0,111	0,124	0,126	0,135	0,111	0,059	0,122	0,116	0,088	0,134	0,119	0,061	0,123	0,089						
	0,025	0,119	0,131	0,132	0,138	0,124	0,075	0,132	0,127	0,099	0,140	0,128	0,076	0,133	0,101						
	0,05	0,127	0,137	0,138	0,147	0,135	0,092	0,140	0,1,33	0,111	0,145	0,137	0,094	0,141	0,110						
	0,10	0,137	0,145	0,146	0,154	0,144	0,115	0,150	0,143	0,124	0,154	0,145	0,116	0,150	0,128						
	0,30	0,150	0,156	0,157	0,166	0,158	0,136	0,164	0,155	0,140	0,166	0,158	0,137	0,163	0,141						
$MZ_l$	0,01	-4,46	-3,98	-3,91	-3,69	-4,44	-8,34	-4,02	-4,30	-5,66	-3,66	-4,15	-7,97	-4,04	-5,56						
	0,025	-4,14	-3,77	-3,70	-3,56	-3,96	-6,58	-3,74	-3,87	-4,99	-3,51	-3,83	-6,58	-3,86	-4,88						
	0,05	-3,89	-3,59	-3,54	-3,35	-3,67	-5,37	-3,49	-3,71	-4,44	-3,35	-3,59	-5,19	-3,67	-4,47						
	0,10	-3,59	-3,38	-3,35	-3,16	-3,39	-4,29	-3,27	-3,46	-3,98	-3,19	-3,37	-4,28	-3,43	-3,86						
	0,30	-3,27	-3,13	-3,11	-2,92	-3,09	-3,61	-2,99	-3,16	-3,49	-3,91	-3,08	-3,58	-3,14	-3,46						
$ADF$	0,01	-4,46	-4,67	-4,59	-4,40	-4,91	-4,87	-4,41	-4,67	-4,83	-4,31	-4,85	-4,86	-4,44	-4,66						
	0,025	-4,14	-4,33	-4,29	-4,18	-4,58	-4,57	-4,00	-4,23	-4,36	-4,11	-4,40	-4,48	-4,30	-4,24						
	0,05	-3,89	-4,06	-4,04	-3,83	-4,25	-4,33	-3,73	-4,00	-4,08	-3,83	-4,16	-4,25	-3,94	-4,05						
	0,10	-3,59	-3,78	-3,76	-3,55	-3,86	-3,99	-3,45	-3,67	-3,79	-3,59	-3,84	-4,02	-3,63	-3,76						
	0,30	-3,27	-3,44	-3,43	-3,23	-3,48	-3,64	-3,14	-3,34	-3,47	-3,24	-3,49	-3,65	-3,31	-3,43						

$\delta = -22,5$  when constructing the tests and  $s^2$

Figura 1. Envoltorio de potencia local gaussiana y funciones de potencia asintótica local de los estadísticos



## 6.2. VALORES CRÍTICOS CON MÉTODOS DEPENDIENTES DE LOS DATOS PARA SELECCIONAR $k$

Aunque la distribución asintótica es una buena aproximación a la distribución de muestra finita para cualquier estadístico que se considere cuando  $k$  es fijo, pueden ocurrir diferencias significativas cuando se usa un método dependiente de los datos para seleccionar  $k$ , especialmente en el contexto de estadísticos que involucran quiebres en fechas desconocidas (véase, Perron, 1997). Aquí, presentamos en los cuadros 2 y 3, para ambos Modelos I y II, los valores críticos de los estadísticos de muestras finitas cuando se utilizan cualesquiera de los tres métodos dependientes de los datos para seleccionar  $k$ . Se consideran dos tamaños de muestras,  $T = 100$  y  $200$ . Los valores críticos se obtuvieron a partir de simulaciones con 1 000 replicaciones del proceso generador de datos definido por (1) donde  $d_t = 0$ ,  $\alpha = 1$  y  $v_t \sim i.i.d. N(0,1)$ .

Los resultados muestran diferencias sustanciales, especialmente cuando se utiliza el método t-sig que arroja valores críticos en muestras finitas mucho menores que las asintóticas (utilizar las últimas implicaría distorsiones liberales de tamaño). Cuando se utiliza el MAIC, el resultado es el opuesto, a saber, valores críticos con muestras finitas que son mayores que los asintóticos (utilizar estos últimos implicaría estadísticos conservadores). Con el BIC, las diferencias no son tan grandes pero sí todavía importantes. Por estas razones, recomendamos el uso de los valores críticos con muestras finitas “ajustados por el efecto de utilizar un método dependiente de los datos para seleccionar  $k$ ”. Las simulaciones y aplicaciones empíricas siguientes hacen uso de estas en vez de los valores asintóticos.

## 6.3. TAMAÑO Y POTENCIA DE LOS ESTADÍSTICOS

Consideramos ahora el tamaño y potencia de los estadísticos en muestras finitas utilizando varios de los métodos dependientes de los datos para seleccionar el parámetro de truncamiento descrito arriba. Nuestras simulaciones se basan en 1 000 replicaciones del proceso generador de datos definido por (1) donde  $d_t = 0$ . Consideramos un proceso puro MA(1), vale decir, donde  $v_t = (1 + \theta L)e_t$  y procesos puros AR(1), vale decir,  $(1 - \rho L)v_t = e_t$ , donde  $e_t \sim i.i.d. N(0,1)$ . Tanto para los casos MA(1) como AR(1), consideramos  $\theta$  y  $\rho$  en el rango  $[-0,8, 0,8]$ . Consideramos tamaños de muestra  $T = 100$  y  $200$ . La potencia es evaluada en  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$  para  $\bar{c} = -22,5$ , lo que implica que la potencia asintótica es 50%. Todos los resultados presentados son para estadísticos de tamaño nominal de 5%.

Los resultados para el caso donde el punto de quiebre se escoge minimizando los estadísticos se presenta en el cuadro 3 para  $T = 100$  y en el cuadro 4 para  $T = 200$ . Con errores *i.i.d.*, como se esperaba, la potencia de los estadísticos es baja cuando se utiliza el t-sig secuencial para seleccionar  $k$ . Con el MAIC o el BIC, la potencia es ciertamente cercana al valor asintótico de 50%. Para el estadístico  $ADF^{GLS}$ , la potencia es alta para

todos los métodos para seleccionar  $k$ . Dados estos resultados, no discutiremos más el comportamiento de los estadísticos con el método secuencial t-sig.

Consideremos ahora el caso donde los errores tienen un componente MA negativo. Para todos los estadísticos, el uso del BIC para seleccionar  $k$  implica estadísticos con severas distorsiones de tamaño; con tamaños exactos por encima de 90% para  $T = 100$  (80% para  $T = 200$ ) cuando el componente MA es  $-0,8$  y cerca de 40% con  $T = 100$  (23% con  $T = 200$ ) cuando es  $-0,4$ . De otro lado, el MAIC permite que los estadísticos  $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$  tengan muchas menos distorsiones de tamaño. El tamaño exacto es cercano al 33% con  $T = 100$  (10% con  $T = 200$ ) cuando el coeficiente es  $-0,8$  y cercano a 14% con  $T = 100$  (9% con  $T = 200$ ) cuando es  $-0,4$ . Pero incluso cuando se utiliza el MAIC, el estadístico  $ADF^{GLS}$  todavía sufre de distorsiones de tamaño (con  $\theta = -0,8$ , el tamaño es 18% cuando  $T = 200$ ).

Cuando los errores tienen un coeficiente promedio móvil positivo, los estadísticos  $M^{GLS}$  y los estadísticos  $P_T^{GLS}$  son liberales, mientras que el estadístico  $ADF^{GLS}$  tiene el tamaño correcto (especialmente con  $T = 200$ ). Con un coeficiente autorregresivo negativo, los estadísticos  $M^{GLS}$  y el estadístico  $P_T^{GLS}$  son muy conservadores, y, por ende, no muestran básicamente potencia. El ADF tiene el tamaño y la potencia correctos. Cuando el coeficiente autorregresivo es positivo, los estadísticos  $M^{GLS}$  y el estadístico  $P_T^{GLS}$  son liberales. El  $ADF^{GLS}$  tiene mejor tamaño pero carece de potencia.

Los resultados muestran que el  $ADF^{GLS}$  con  $k$  escogido utilizando el MAIC tiene en general mejores propiedades a menos que exista un componente MA negativo en los errores, en cuyo caso los estadísticos  $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$  son superiores.

Los resultados para el caso donde el quiebre se selecciona maximizando el valor absoluto del estadístico  $t$  sobre el coeficiente de cambio en la pendiente están en el cuadro 4 para  $T = 100$  y en el cuadro 5 para  $T = 200$ . Ellos muestran propiedades con características cualitativas básicamente similares a las obtenidas anteriormente pero con distorsiones de tamaño algo menores.

## 7. APLICACIONES EMPÍRICAS

Dentro de las series de tiempo macroeconómicas consideradas por Nelson y Plosser (1982), Perron (1989) argumentó que dos de ellas estaban probablemente afectadas por un cambio significativo en la pendiente y en el intercepto para las muestras analizadas. Dichas series son el logaritmo de salarios reales y el logaritmo de los precios de las acciones.

**Cuadro 3. Tamaño y potencia; seleccionando  $T_B$  minimizando los estadísticos; Modelo I;  $T = 100$  ( $\bar{c} = -22,5$  cuando se construye  $s^2$  para los estadísticos  $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$ ; tamaño nominal de los test 5%)**

	Criterias	Size					Power				
		$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$P_T$	$ADF$	$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$P_T$	$ADF$
i.i.d.	<i>BIC</i>	0,051	0,051	0,051	0,050	0,050	0,348	0,319	0,347	0,375	0,462
	<i>MAIC</i>	0,050	0,051	0,050	0,050	0,050	0,481	0,484	0,468	0,486	0,459
	<i>t-sig</i>	0,050	0,051	0,051	0,051	0,051	0,131	0,131	0,130	0,153	0,421
Moving-average processes											
$\theta = -0,8$	<i>BIC</i>	0,930	0,931	0,930	0,922	0,969	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000
	<i>MAIC</i>	0,334	0,334	0,329	0,286	0,353	0,778	0,783	0,776	0,669	0,809
	<i>t-sig</i>	0,074	0,074	0,074	0,071	0,717	0,293	0,293	0,295	0,250	0,938
$\theta = -0,4$	<i>BIC</i>	0,391	0,385	0,385	0,368	0,447	0,874	0,873	0,874	0,865	0,903
	<i>MAIC</i>	0,145	0,146	0,141	0,138	0,124	0,506	0,505	0,497	0,475	0,461
	<i>t-sig</i>	0,025	0,025	0,025	0,026	0,228	0,096	0,0%	0,096	0,100	0,683
$\theta = 0,4$	<i>BIC</i>	0,226	0,224	0,227	0,201	0,076	0,696	0,687	0,698	0,683	0,494
	<i>MAIC</i>	0,109	0,108	0,098	0,066	0,017	0,166	0,169	0,160	0,162	0,100
	<i>t-sig</i>	0,051	0,053	0,051	0,056	0,058	0,157	0,157	0,158	0,199	0,378
$\theta = 0,8$	<i>BIC</i>	0,481	0,482	0,478	0,364	0,107	0,703	0,699	0,707	0,679	0,400
	<i>MAIC</i>	0,185	0,191	0,176	0,091	0,011	0,336	0,337	0,327	0,301	0,084
	<i>t-sig</i>	0,074	0,076	0,074	0,081	0,052	0,233	0,231	0,232	0,269	0,215
Autoregressive processes											
$p = -0,8$	<i>BIC</i>	0,010	0,010	0,010	0,007	0,041	0,030	0,029	0,031	0,026	0,410
	<i>MAIC</i>	0,003	0,002	0,003	0,002	0,043	0,015	0,017	0,015	0,016	0,359
	<i>t-sig</i>	0,016	0,016	0,015	0,016	0,043	0,054	0,054	0,054	0,067	0,384
$p = -0,4$	<i>BIC</i>	0,129	0,120	0,128	0,115	0,135	0,475	0,469	0,476	0,465	0,549
	<i>MAIC</i>	0,064	0,063	0,063	0,063	0,059	0,360	0,365	0,356	0,374	0,396
	<i>t-sig</i>	0,030	0,030	0,030	0,035	0,071	0,116	0,116	0,116	0,134	0,420
$p = 0,4$	<i>BIC</i>	0,146	0,146	0,146	0,112	0,038	0,496	0,477	0,499	0,502	0,275
	<i>MAIC</i>	0,122	0,131	0,113	0,083	0,022	0,122	0,124	0,116	0,083	0,058
	<i>t-sig</i>	0,057	0,058	0,057	0,057	0,047	0,147	0,146	0,147	0,162	0,273
$p = 0,8$	<i>BIC</i>	0,290	0,298	0,278	0,183	0,060	0,346	0,341	0,343	0,331	0,107
	<i>MAIC</i>	0,342	0,360	0,321	0,204	0,074	0,404	0,415	0,390	0,355	0,141
	<i>t-sig</i>	0,136	0,139	0,134	0,084	0,064	0,108	0,108	0,107	0,119	0,118

**Cuadro 4. Tamaño y potencia; seleccionando  $T_B$  minimizando los estadísticos; Modelo I;  $T = 200$  ( $\bar{c} = -22,5$  cuando se construye  $s^2$  para los estadísticos  $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$ ; tamaño nominal de los test 5%)**

	Criteria	Size					Power				
		$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$P_T$	$ADF$	$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$P_T$	$ADF$
i.i.d.	<i>BIC</i>	0,051	0,051	0,050	0,051	0,051	0,512	0,494	0,505	0,488	0,501
	<i>MAIC</i>	0,050	0,050	0,051	0,050	0,051	0,495	0,492	0,505	0,482	0,476
	<i>t-sig</i>	0,051	0,051	0,051	0,050	0,051	0,235	0,230	0,239	0,289	0,430
Moving-average processes											
$\theta = -0,8$	<i>BIC</i>	0,814	0,809	0,814	0,783	0,860	0,992	0,991	0,992	0,989	0,997
	<i>MAIC</i>	0,102	0,099	0,104	0,076	0,178	0,366	0,366	0,365	0,272	0,510
	<i>t-sig</i>	0,278	0,277	0,277	0,296	0,539	0,655	0,655	0,656	0,628	0,931
$\theta = -0,4$	<i>BIC</i>	0,239	0,230	0,235	0,218	0,225	0,817	0,808	0,815	0,797	0,820
	<i>MAIC</i>	0,091	0,091	0,094	0,074	0,074	0,453	0,458	0,460	0,418	0,427
	<i>t-sig</i>	0,034	0,034	0,035	0,043	0,110	0,297	0,287	0,295	0,342	0,605
$\theta = 0,4$	<i>BIC</i>	0,144	0,144	0,141	0,130	0,089	0,702	0,687	0,698	0,673	0,552
	<i>MAIC</i>	0,102	0,104	0,101	0,083	0,046	0,514	0,511	0,510	0,468	0,356
	<i>t-sig</i>	0,068	0,067	0,069	0,072	0,050	0,329	0,324	0,331	0,380	0,401
$\theta = 0,8$	<i>BIC</i>	0,296	0,290	0,291	0,241	0,076	0,694	0,683	0,693	0,665	0,392
	<i>MAIC</i>	0,181	0,182	0,181	0,120	0,027	0,447	0,445	0,453	0,382	0,155
	<i>t-sig</i>	0,149	0,151	0,146	0,156	0,064	0,515	0,509	0,517	0,550	0,313
Autoregressive processes											
$p = -0,8$	<i>BIC</i>	0,006	0,006	0,006	0,006	0,045	0,045	0,037	0,044	0,040	0,463
	<i>MAIC</i>	0,001	0,001	0,001	0,000	0,047	0,033	0,033	0,035	0,032	0,395
	<i>t-sig</i>	0,016	0,016	0,016	0,014	0,046	0,061	0,059	0,061	0,068	0,411
$p = -0,4$	<i>BIC</i>	0,052	0,049	0,049	0,037	0,048	0,444	0,424	0,434	0,417	0,458
	<i>MAIC</i>	0,047	0,045	0,046	0,036	0,045	0,400	0,403	0,408	0,381	0,425
	<i>t-sig</i>	0,034	0,034	0,033	0,041	0,043	0,201	0,194	0,199	0,228	0,418
$p = 0,4$	<i>BIC</i>	0,106	0,105	0,104	0,090	0,041	0,585	0,562	0,582	0,560	0,411
	<i>MAIC</i>	0,105	0,103	0,108	0,083	0,054	0,494	0,493	0,506	0,465	0,356
	<i>t-sig</i>	0,068	0,068	0,067	0,065	0,044	0,267	0,263	0,268	0,320	0,367
$p = 0,8$	<i>BIC</i>	0,146	0,141	0,138	0,106	0,057	0,405	0,394	0,393	0,371	0,229
	<i>MAIC</i>	0,164	0,175	0,156	0,108	0,062	0,399	0,397	0,400	0,369	0,229
	<i>t-sig</i>	0,091	0,094	0,091	0,070	0,053	0,212	0,204	0,211	0,228	0,206

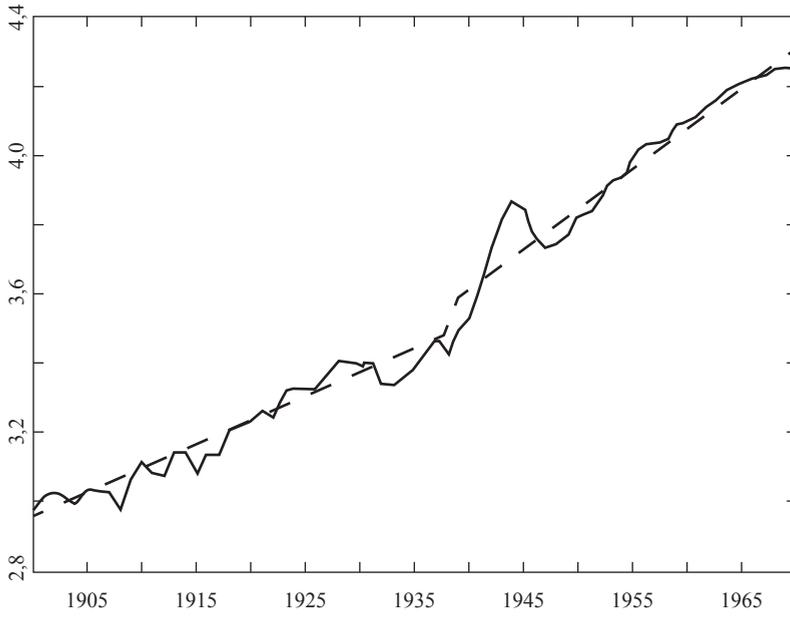
**Cuadro 5. Tamaño y potencia; seleccionando  $T_B$  maximizando  $|t_{\hat{\beta}_2}|$ ; Modelo I;  
 $T = 100$  ( $\bar{c} = -22,5$  cuando se construye  $s^2$  para los estadísticos  
 $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$ ; tamaño nominal de los test 5%)**

	Criteria	Size				Power			
		$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$ADF$	$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$ADF$
i.i.d.	<i>BIC</i>	0,050	0,051	0,051	0,051	0,411	0,414	0,402	0,478
	<i>MAIC</i>	0,051	0,050	0,050	0,050	0,503	0,475	0,499	0,465
	<i>t-sig</i>	0,051	0,051	0,051	0,051	0,150	0,151	0,154	0,447
Moving-average processes									
$\theta = -0,8$	<i>BIC</i>	0,928	0,930	0,926	0,966	1,000	1,000	1,000	1,000
	<i>MAIC</i>	0,289	0,286	0,289	0,304	0,669	0,669	0,669	0,698
	<i>t-sig</i>	0,070	0,070	0,070	0,689	0,250	0,250	0,250	0,925
$\theta = -0,4$	<i>BIC</i>	0,399	0,405	0,397	0,430	0,870	0,870	0,870	0,895
	<i>MAIC</i>	0,138	0,131	0,136	0,113	0,479	0,466	0,475	0,433
	<i>t-sig</i>	0,025	0,025	0,025	0,206	0,099	0,099	0,100	0,668
$\theta = 0,4$	<i>BIC</i>	0,216	0,225	0,211	0,072	0,707	0,711	0,703	0,494
	<i>MAIC</i>	0,064	0,065	0,066	0,010	0,156	0,139	0,161	0,107
	<i>t-sig</i>	0,053	0,053	0,054	0,055	0,195	0,199	0,195	0,389
$\theta = 0,8$	<i>BIC</i>	0,390	0,397	0,380	0,089	0,683	0,686	0,682	0,386
	<i>MAIC</i>	0,089	0,088	0,087	0,008	0,297	0,281	0,294	0,091
	<i>t-sig</i>	0,079	0,080	0,078	0,045	0,260	0,262	0,263	0,212
Autoregressive processes									
$p = -0,8$	<i>BIC</i>	0,006	0,006	0,006	0,041	0,025	0,028	0,027	0,398
	<i>MAIC</i>	0,002	0,003	0,002	0,041	0,015	0,017	0,016	0,335
	<i>t-sig</i>	0,016	0,016	0,016	0,040	0,062	0,062	0,062	0,377
$p = -0,4$	<i>BIC</i>	0,121	0,120	0,121	0,125	0,474	0,475	0,468	0,546
	<i>MAIC</i>	0,063	0,057	0,063	0,053	0,368	0,352	0,370	0,391
	<i>t-sig</i>	0,032	0,035	0,033	0,066	0,127	0,128	0,127	0,415
$p = 0,4$	<i>BIC</i>	0,132	0,136	0,127	0,033	0,525	0,530	0,520	0,287
	<i>MAIC</i>	0,078	0,084	0,080	0,014	0,080	0,077	0,079	0,047
	<i>t-sig</i>	0,055	0,056	0,054	0,040	0,156	0,158	0,157	0,281
$p = 0,8$	<i>BIC</i>	0,206	0,217	0,197	0,037	0,353	0,356	0,344	0,108
	<i>MAIC</i>	0,225	0,240	0,210	0,048	0,372	0,362	0,365	0,127
	<i>t-sig</i>	0,087	0,091	0,087	0,042	0,117	0,119	0,118	0,114

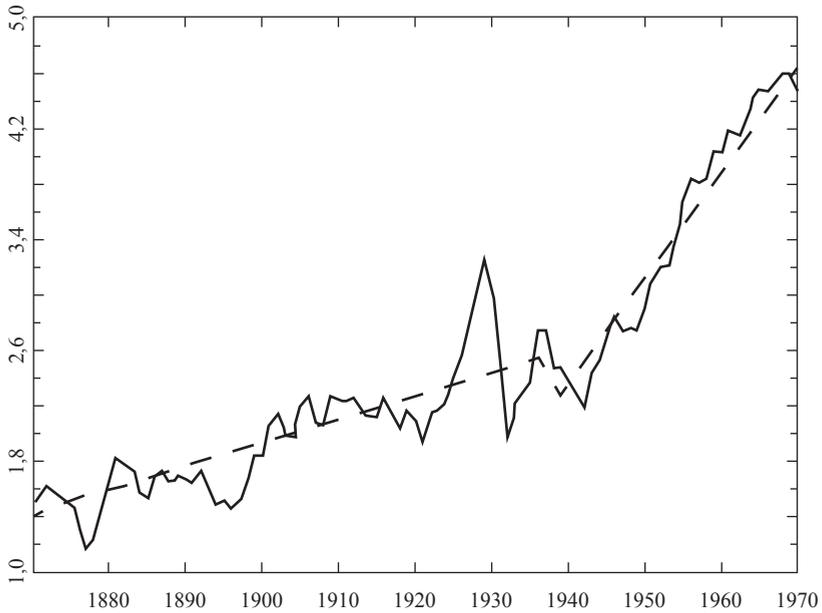
**Cuadro 6. Tamaño y potencia; seleccionando  $T_B$  maximizando  $|t_{\hat{\beta}_2}|$ ; Modelo I;**  
 $T = 100$  ( $\bar{c} = -22,5$  cuando se construye  $s^2$  para los estadísticos  
 $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$ ; tamaño nominal de los test 5%)

	Criteria	Size				Power			
		$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$ADF$	$MZ_\alpha$	$MSB$	$MZ_4$	$ADF$
i.i.d.	<i>BIC</i>	0,051	0,051	0,051	0,051	0,518	0,504	0,513	0,520
	<i>MAIC</i>	0,051	0,050	0,051	0,050	0,505	0,484	0,515	0,478
	<i>t-sig</i>	0,051	0,050	0,051	0,051	0,275	0,267	0,279	0,483
Moving-average processes									
$\theta = -0,8$	<i>BIC</i>	0,7%	0,793	0,796	0,856	0,991	0,989	0,991	0,997
	<i>MAIC</i>	0,076	0,072	0,079	0,139	0,277	0,272	0,281	0,422
	<i>t-sig</i>	0,290	0,286	0,288	0,538	0,625	0,620	0,624	0,915
$\theta = -0,4$	<i>BIC</i>	0,226	0,220	0,224	0,223	0,822	0,808	0,818	0,826
	<i>MAIC</i>	0,079	0,077	0,081	0,068	0,436	0,424	0,438	0,406
	<i>t-sig</i>	0,038	0,037	0,040	0,116	0,325	0,318	0,327	0,633
$\theta = 0,4$	<i>BIC</i>	0,142	0,138	0,138	0,088	0,703	0,683	0,696	0,567
	<i>MAIC</i>	0,094	0,092	0,094	0,042	0,479	0,472	0,481	0,342
	<i>t-sig</i>	0,068	0,070	0,069	0,057	0,365	0,351	0,364	0,422
$\theta = 0,8$	<i>BIC</i>	0,261	0,256	0,249	0,070	0,684	0,669	0,681	0,400
	<i>MAIC</i>	0,132	0,128	0,128	0,018	0,403	0,388	0,407	0,148
	<i>t-sig</i>	0,148	0,147	0,146	0,069	0,544	0,535	0,542	0,350
Autoregressive processes									
$p = -0,8$	<i>BIC</i>	0,006	0,005	0,006	0,046	0,045	0,041	0,045	0,471
	<i>MAIC</i>	0,000	0,000	0,000	0,037	0,034	0,031	0,035	0,376
	<i>t-sig</i>	0,014	0,014	0,015	0,051	0,061	0,062	0,062	0,428
$p = -0,4$	<i>BIC</i>	0,047	0,045	0,042	0,046	0,454	0,426	0,448	0,477
	<i>MAIC</i>	0,039	0,036	0,041	0,043	0,399	0,387	0,412	0,421
	<i>t-sig</i>	0,037	0,035	0,035	0,052	0,214	0,200	0,214	0,449
$p = 0,4$	<i>BIC</i>	0,101	0,095	0,096	0,041	0,594	0,563	0,584	0,427
	<i>MAIC</i>	0,087	0,083	0,088	0,048	0,480	0,462	0,490	0,353
	<i>t-sig</i>	0,065	0,064	0,063	0,043	0,308	0,298	0,308	0,407
$p = 0,8$	<i>BIC</i>	0,119	0,116	0,110	0,046	0,400	0,381	0,384	0,229
	<i>MAIC</i>	0,118	0,128	0,121	0,053	0,382	0,364	0,387	0,224
	<i>t-sig</i>	0,070	0,067	0,066	0,043	0,218	0,212	0,215	0,227

**Figura 2. Logaritmo de los salarios reales (1900 - 1970)**



**Figura 3. Logaritmo de precios de acciones (1871 - 1970)**



Las series se presentan en las Figuras 2 y 3. Nosotros revaluamos la aseveración hecha por Perron (1989) en el sentido que estas series son estacionarias en cuanto a su tendencia si se permite tal cambio en la pendiente y el intercepto utilizando nuestros nuevos estadísticos. Aplicamos los estadísticos  $MZ_T^{GLS}$  y  $ADF^{GLS}$  utilizando los criterios BIC y MAIC para seleccionar el orden autorregresivo (imponiendo un valor mínimo de 1).

Los resultados se presentan en el cuadro 7 para el caso donde el quiebre se selecciona minimizando el estadístico. Utilizando el BIC para seleccionar  $k$ , todos los estadísticos apuntan a un fuerte rechazo en el nivel de significancia de 2,5% para la serie de los precios de las acciones con la fecha de quiebre entre 1931 y 1941, dependiendo de la especificación utilizada.

**Cuadro 7. Resultados empíricos para las series de los salarios reales y precios de acciones seleccionando el punto de quiebre minimizando los estadísticos**

Serie	$T$	Criteria	$MZ_\alpha$	$k$	$T_S$	$MZ_t$	$k$	$T_S$	$P_T$	$k$	$T_S$	$ADF$	$k$	$T_S$	$\hat{\alpha}$
Stock prices	100	<i>BIC</i>	-48,4 <sup>b</sup>	1	1941	-4,9 <sup>b</sup>	1	1941	8,3 <sup>b</sup>	1	1931	-5,1 <sup>b</sup>	1	1937	0,666
		<i>MAIC</i>	-47,7 <sup>d</sup>	1	1937	-4,8 <sup>a</sup>	1	1937	12,5 <sup>d</sup>	1	1931	-5,1 <sup>a</sup>	1	1937	0,666
Real waícs	71	<i>BIC</i>	-38,4 <sup>c</sup>	1	1938	-4,3 <sup>c</sup>	1	1938	10,3 <sup>c</sup>	1	1940	-4,6 <sup>c</sup>	1	1938	0,619
		<i>MAIC</i>	-38,4 <sup>a</sup>	1	1938	-4,3 <sup>d</sup>	1	1938	10,3 <sup>b</sup>	1	1940	-4,6 <sup>b</sup>	1	1938	0,619

Note: (1) For the applications, we impose a minimal value  $k = 1$ ; (2) the superscripts a, b, c and d denote significance levels at the 1,0%, 2,5%, 5,0%, and 10,0% respectively.

**Cuadro 8. Resultados empíricos para las series de los salarios reales y precios de acciones seleccionando el punto de quiebre maximizando  $|t_{\beta_2}|$**

Serie	$T$	Criteria	$MZ_\alpha$	$MZ_t$	$ADF$	$k$	$T_S$	$\hat{\alpha}$
Stock prices	100	<i>BIC</i>	-31,9 <sup>b</sup>	-3,9 <sup>b</sup>	-4,1 <sup>c</sup>	1	1931	0,753
		<i>MAIC</i>	-21,2 <sup>d</sup>	-3,2 <sup>d</sup>	-3,2	1	1931	0,793
Real waícs	71	<i>BIC</i>	-27,7 <sup>c</sup>	-3,6 <sup>c</sup>	-3,8 <sup>a</sup>	1	1933	0,697
		<i>MAIC</i>	-27,7 <sup>a</sup>	-3,6 <sup>a</sup>	-3,8 <sup>c</sup>	1	1933	0,697

Note: (1) For the applications, we impose a minimal value  $k = 1$ ; (2) the superscripts a, b, c and d denote significance levels at the 1,0%, 2,5%, 5,0%, and 10,0% respectively.

Con el MAIC para seleccionar  $k$ , hay un rechazo al nivel de 1% (con excepción del estadístico  $P_T^{GLS}$ ). Para la serie del logaritmo de los salarios reales, hay un rechazo por lo menos al nivel de significancia de 1% o 2,5% utilizando el criterio MAIC para seleccionar  $k$  y al nivel de 5% utilizando el BIC. La fecha de quiebre se selecciona en 1938 o 1940 dependiendo de la especificación utilizada. La función de tendencia estimada

se grafica en las figuras 2 y 3 utilizando  $T_B = 1937$  para las series de precios de acciones y  $T_B = 1938$  para las series de los salarios reales.

El cuadro 8 presenta los resultados de los estadísticos cuando la fecha de quiebre se selecciona mediante la maximización del valor absoluto del estadístico t del coeficiente del cambio de pendiente. Para los precios de las acciones, la fecha de quiebre seleccionada es 1931 y hay rechazo al nivel de significancia de 2,5% o 5% utilizando el BIC pero hay poca evidencia contra la raíz unitaria cuando se utiliza el MAIC. Para la serie de los salarios reales, la fecha de quiebre seleccionada es 1933. Los estadísticos muestran un rechazo por lo menos al nivel de significancia del 5% (excepto para el estadístico  $ADF^{GLS}$  utilizando el BIC para seleccionar el orden autorregresivo).

## 8. CONCLUSIONES

En este documento se considera estadísticos para verificar la hipótesis de raíz unitaria en la presencia de un cambio estructural por única vez en la función de tendencia y seguimos a Elliott *et al.* (1996) y a Dufour y King (1991) eliminando la tendencia de los datos utilizando un enfoque *GLS* local a la unidad. Las extensiones de los estadísticos ADF y  $P_T$  así como de los estadísticos tipo M analizados por Perron y Ng (1996) han sido estudiados. También investigamos las propiedades de los estadísticos cuando el punto de quiebre se selecciona ya sea minimizando los estadísticos o maximizando el valor absoluto del estadístico t del coeficiente de cambio en la pendiente. Todos los estadísticos tienen una función de potencia asintótica local que se encuentra cerca de la envolvente de potencia gaussiana, aunque nuestras simulaciones revelan que, en muestras finitas, este último método arroja estadísticos con menor potencia. En consecuencia, recomendamos utilizar para aplicaciones ya sea los estadísticos  $ADF^{GLS}$ ,  $M^{GLS}$  o  $P_T^{GLS}$ , donde el punto de quiebre se selecciona minimizando los estadísticos. La principal diferencia entre los estadísticos es que el  $ADF^{GLS}$  tiene más distorsiones de tamaño en el caso MA negativo pero mejor potencia en el caso AR negativo; los estadísticos  $M^{GLS}$  y  $P_T^{GLS}$  tienen en general un buen tamaño pero poca potencia en el caso AR negativo. La elección entre los dos depende de la evaluación del investigador sobre la importancia probable de la ocurrencia de una u otra clase de procesos en los datos considerados. Nuestros experimentos también sugieren que el uso del MAIC para seleccionar el parámetro de truncamiento lleva a estadísticos con mejores propiedades generales.

**APÉNDICE A**

En lo que sigue, utilizamos el siguiente lema que es estándar en la literatura.

**Lema A.1.** *Sea  $\{u_t\}$  una serie casi integrada generada por (2). Entonces, tenemos que:*

- (a)  $T^{-1/2}u_{[T\tau]} \Rightarrow \sigma W_c(r)$ , (b)  $T^{-3/2}\sum_{t=1}^T u_t \Rightarrow \sigma \int_0^1 W_c(r)dr$ , (c)  $T^{-2}\sum_{t=1}^T u_t^2 \Rightarrow \sigma^2 \int_0^1 W_c^2(r)dr$ ;
- (d)  $T^{-1}\sum_{t=1}^T u_{t-1}v_t \Rightarrow \sigma^2 \{ \int_0^1 W_c(r)dW(r) + \gamma \}$  with  $\gamma = (\sigma^2 - \sigma_v^2)/2\sigma^2$ .

Empezamos con los resultados que conciernen a las distribuciones límites de los estimados de los coeficientes de la función de tendencia obtenida a partir de (3). Para el Modelo I, tenemos el siguiente lema.

**Lema A.2.** *Supongamos que  $y_t$  se genera por (1) donde  $\alpha = 1 + c/T$  y  $\{z_t\}$  está dado por (4). Permitamos que  $\hat{\psi}(\delta)$  sean los estimados GLS, a partir de la minimización de (3), de los coeficientes de la función de tendencia obtenida utilizando  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ . Luego, con términos tal como se definen en el Teorema 1:*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 - \mu_1 &\Rightarrow v_1, \\ T^{1/2}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) &\Rightarrow \sigma(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \equiv \sigma b_3, \\ T^{1/2}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) &\Rightarrow \sigma(\lambda_2 b_1 + \lambda_3 b_2) \equiv \sigma b_4. \end{aligned}$$

**Demostración del lema A.2.** En notación matricial, tenemos:

$$\hat{\psi}(\delta) - \psi = [(\Delta z - \bar{c}T^{-1}z_{-1})'(\Delta z - \bar{c}T^{-1}z_{-1})]^{-1} \times [(\Delta z - \bar{c}T^{-1}z_{-1})'(\Delta u - \bar{c}T^{-1}u_{-1})], \tag{A.1}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Delta z &= (z_1, z_2 - z_1, \dots, z_T - z_{T-1}), \\ z_{T-1} &= (0, z_1, z_2, \dots, z_{T-1}), \\ \Delta u &= (u_1, u_2 - u_1, \dots, u_T - u_{T-1}), \\ u_{-1} &= (0, u_1, u_2, \dots, u_{T-1}). \end{aligned}$$

Ahora definamos la matriz  $Y_T = \text{diag}(1, T^{1/2}, T^{1/2})$ , tal que podemos escribir la expresión (A.1) como:

$$Y_T(\hat{\psi}(\delta) - \psi) = \Gamma_T(\delta)^{-1} \Psi_T(\delta), \tag{A.2}$$

Donde:

$$\Gamma_T(\delta) = Y_T^{-1}[(\Delta z - \bar{c}T^{-1}z_{-1})'(\Delta z - \bar{c}T^{-1}z_{-1})]Y_T^{-1},$$

y

$$\Psi_T(\delta) = Y_T^{-1}[(\Delta z - \bar{c}T^{-1}z_{-1})'(\Delta u - \bar{c}T^{-1}u_{-1})].$$

Primero consideramos el límite de cada elemento de la matriz  $\Gamma_i(\delta)$  denotado por  $\Gamma_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ . Sean  $\Delta z_{(i)}$  y  $z_{-1(i)}$  los elementos en la posición  $i$  de los vectores  $\Delta z$  y  $z_{-1}$ , respectivamente. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= (\Delta z_{(1)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(1)})'(\Delta z_{(1)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(1)}) \Rightarrow 1, \\ \Gamma_{12} &= T^{-1/2}(\Delta z_{(1)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(1)})'(\Delta z_{(2)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(2)}) \Rightarrow 0, \\ \Gamma_{13} &= T^{-1/2}(\Delta z_{(1)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(1)})'(\Delta z_{(3)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(3)}) \Rightarrow 0, \\ \Gamma_{22} &= T^{-1}(\Delta z_{(2)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(2)})'(\Delta z_{(2)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(2)}) \Rightarrow 1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3 \equiv a, \\ \Gamma_{23} &= T^{-1}(\Delta z_{(2)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(2)})'(\Delta z_{(3)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(3)}) \\ &\Rightarrow 1 - \delta - \bar{c} + \bar{c}\delta - (\bar{c}^2/2)\delta + (\bar{c}^2/2)\delta^3 + (\bar{c}^2/3)(1 - \delta^3) \equiv m, \\ \Gamma_{33} &= T^{-1}(\Delta z_{(3)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(3)})'(\Delta z_{(3)} - \bar{c}T^{-1}z_{-1(3)}) \\ &\Rightarrow 1 - \delta - \bar{c} + 2\bar{c}\delta - \bar{c}\delta^2 - \bar{c}^2\delta + \bar{c}^2\delta^2 + (\bar{c}^2/3)(1 - \delta^3) \equiv d. \end{aligned}$$

Seguidamente consideramos el límite de cada elemento del vector  $\Psi_T(\delta)$ , denotado por  $\Psi_i (i = 1, 2, 3)$ .

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (\Delta u_{(1)} - \bar{c}T^{-1}u_{-1})'(\Delta u - \bar{c}T^{-1}u_{-1}) \Rightarrow v_1, \\ \Psi_2 &= T^{-1/2}(\Delta u_{(2)} - \bar{c}T^{-1}u_{-1(2)})'(\Delta u - \bar{c}T^{-1}u_{-1}) \\ &\Rightarrow \sigma \left[ W_c(1)(1 - \bar{c}) + \bar{c}^2 \int_0^1 r W_c(r) dr \right] \equiv \sigma b_1, \\ \Psi_3 &= T^{-1/2}(\Delta u_{(3)} - \bar{c}T^{-1}u_{-1(3)})'(\Delta u - \bar{c}T^{-1}u_{-1}) \\ &\Rightarrow \sigma \left[ W_c(1)(1 - \bar{c} + \delta\bar{c}) + \bar{c}^2 \int_\delta^1 W_c(r)(r - \delta) dr - W_c(\delta) \right] \equiv \sigma b_2. \end{aligned}$$

Por tanto, usando la simetría de  $\Gamma_T(\delta)$ :

$$\gamma_T'(\hat{\psi}(\delta) - \psi) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & m \\ 0 & m & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \sigma b_1 \\ \sigma b_2 \end{bmatrix}$$

La demostración del Lema sigue luego de la aplicación de la expresión anterior. Para el Modelo II, tenemos

**Lema A.3.** Supongamos que  $y_t$  se genera por (1), donde  $\alpha = 1 + c/T$  y  $\{z_t\}$  está dado por (5). Permitamos que  $\hat{y}(\delta)$  sea los estimados *GLS*, a partir de la minimización de (3), de los coeficientes de la función de tendencia obtenida utilizando  $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ . Luego, el resultado del lema A.2 se sigue aplicando con el agregado que  $\hat{\mu}_2 - \mu_2 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} v_{[T\delta]+1} \equiv v^*$ .

La demostración del lema A.3 es básicamente la misma que la del lema A.2 y, en consecuencia, se omite.

**Demostración del Teorema 1.** La demostración utiliza los resultados de los lemas A.2 y A.3. Mostramos la demostración solamente para el Modelo I y para el estadístico  $MZ_\alpha(\delta)$ . La demostración para el otro modelo y estadísticos sigue por analogía. Primero tenemos que:

$$\begin{aligned} T^{-1} \tilde{y}_T^2 &= T^{-1} \left\{ y_T - (\hat{\mu}_1 + \hat{\beta}_1 T + \hat{\beta}_2 (T - T\delta)) \right\}^2 \\ &= T^{-1} \left\{ u_T - [(\hat{\mu}_1 - \mu_1) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)T + (\hat{\beta}_2 - \beta_2)(T - T\delta)] \right\}^2 \end{aligned}$$

Después de un poco de algebra, obtenemos que:

$$\begin{aligned} T^{-1} u_T^2 &\Rightarrow \sigma^2 W_c(1)^2; \quad 2T^{-1} u_T (\hat{\mu}_1 - \mu_1) \Rightarrow 0, \\ 2T^{-1} u_T (\hat{\beta}_1 - \beta_1) T &\Rightarrow 2\sigma^2 b_3 W_c(1), \\ 2T^{-1} u_T (\hat{\beta}_2 - \beta_2) (T - T\delta) &\Rightarrow 2\sigma^2 b_4 W_c(1) (1 - \delta), \\ 2T^{-1} (\hat{\mu}_1 - \mu_1) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1) T &\Rightarrow 0, \\ T^{-1} (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 T^2 &\Rightarrow \sigma^2 b_3^2, \\ 2T^{-1} (\hat{\mu}_1 - \mu_1) (\hat{\beta}_2 - \beta_2) (T - T\delta) &\Rightarrow 0, \\ 2T^{-1} (\hat{\beta}_1 - \beta_1) T (\hat{\beta}_2 - \beta_2) (T - T\delta) &\Rightarrow 2\sigma^2 b_3 b_4 (1 - \delta), \\ T^{-1} (\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 (T - T\delta)^2 &\Rightarrow \sigma^2 b_4^2 (1 - \delta)^2. \end{aligned}$$

Utilizando estos resultados, tenemos que:

$$T^{-1} \tilde{y}_T^2 = \sigma^2 \{ V_{cc}^{(1)}(1, \delta)^2 - 2V_{cc}^{(2)}(1, \delta) \}, \tag{A.3}$$

donde  $V_{cc}^{(1)}(1, \delta) = W_c(1) - b_3$ , y:

$$V_{cc}^{(2)}(1, \delta) = b_4(1 - \delta)[W_c(1) - b_3 - (1/2)(1 - \delta)b_4].$$

Consideremos ahora el término  $2T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_t^2$ , definido por:

$$\begin{aligned} 2T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_t^2 &= 2T^{-2} \sum_{t=1}^T \left\{ y_t - [\hat{\mu}_1 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 1(t > T\delta)(t - T\delta)] \right\}^2 \\ &= 2T^{-2} \sum_{t=1}^T \left\{ u_t - [(\hat{\mu}_1 - \mu_1) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)t + (\hat{\beta}_2 - \beta_2)1(t > T\delta)(t - T\delta)] \right\}^2. \end{aligned}$$

Después de un poco de álgebra, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2T^{-2} \sum_{t=1}^T u_t^2 &= 2\sigma^2 \int_0^1 W_c(c)^2 dr, \\ 4T^{-2} (\hat{\mu}_1 - \mu_1) \sum_{t=1}^T u_t &= 0, \\ 4T^{-2} (\hat{\beta}_1 - \beta_1) \sum_{t=1}^T t u_t &\Rightarrow 4\sigma^2 \int_0^1 r b_3 W_c(r) dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4T^{-2}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \sum_{t=1}^T 1(t > T\delta)(t - T\delta)u_t &\Rightarrow 4\sigma^2 \int_0^1 rb_4 W_c(r)(r - \delta)dr, \\
 2T^{-1}(\hat{\mu}_1 - \mu_1)^2 &\Rightarrow 0, \\
 4T^{-2}(\hat{\mu}_1 - \mu_1)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \sum_{t=1}^T t &\Rightarrow 0, \\
 2T^{-2}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 \sum_{t=1}^T t^2 &\Rightarrow 2\sigma^2 \int_0^1 b_3^2 r^2 dr, \\
 4T^{-2}(\hat{\mu}_1 - \mu_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \sum_{t=1}^T 1(t > T\delta)(t - T\delta) &\Rightarrow 0, \\
 4T^{-2}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \sum_{t=1}^T t 1(t > T\delta)(t - T\delta) &\Rightarrow 4\sigma^2 \int_0^1 b_3 b_4 r(r - \delta)dr, \\
 2T^{-2}(\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 \sum_{t=1}^T 1(t > T\delta)(t - T\delta)^2 &\Rightarrow 2\sigma^2 \int_\delta^1 b_4^2 (r - \delta)^2 dr.
 \end{aligned}$$

Utilizando estos resultados obtenemos:

$$2T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_t^2 \Rightarrow 2\sigma^2 \left\{ \int_0^1 V_{cc}^{(1)}(r, \delta)^2 dr - 2 \int_\delta^1 V_{cc}^{(2)}(r, \delta) dr \right\}. \tag{A.4}$$

Utilizando (A.3), (A.4) y el hecho que  $s^2$  es un estimador consistente de  $\sigma^2$ , la demostración está completa.

**Demostración del Teorema 2.** Primero presentamos la demostración para el Modelo I. Definiendo:

$$M_T(c, \bar{c}, \delta) = (u^{\alpha'} z^\alpha)(z^{\alpha'} z^\alpha)^{-1}(z^{\alpha'} u^\alpha),$$

$$\text{tenemos que } S(\bar{\alpha}, \delta) = u^{\bar{\alpha}'} u^{\bar{\alpha}} - M_T(c, \bar{c}, \delta) \text{ y } S(1) = u^{1'} u^1 - M_T(c, 0, \delta).$$

Utilizando el hecho que:

$$u_t^{\bar{\alpha}} = v_t + T^{-1}(c - \bar{c})u_{t-1}$$

para  $t = 2, \dots, T$  y  $u_1^{\bar{\alpha}} = v_1$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 s^2 P_T^{GLS}(c, \bar{c}, \delta) &= M_T(c, 0, \delta) - M_T(c, \bar{c}, \delta) - 2\bar{c}T^{-1} \sum_{t=2}^T u_{t-1} v_t \\
 &+ (\bar{c}^2 - 2\bar{c}c)T^{-2} \sum_{t=2}^T u_{t-1}^2 - cT^{-1}u^{1'}u^1 + o_p(1). \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Nótese que  $T^{-1} \sum_{t=2}^T u_{t-1} v_t \Rightarrow \sigma^2 \int_0^1 W_c(r) dW(r)$  y  $T^{-2} \sum_{t=2}^T u_{t-1}^2 \Rightarrow \sigma^2 \int_0^1 W_c(r)^2 dr$ . Considérese ahora el límite de  $M_T(c, \bar{c}, \delta)$ . Utilizando la matriz  $D_T = \text{diag}(1, T^{-1}, T^{-1/2})$ ,

tenemos que  $M_T(c, \bar{c}, \delta) = (u^{\alpha'} z^\alpha D_T)(D_T z^{\alpha'} z^\alpha D_T)^{-1}(D_T z^{\alpha'} u^\alpha)$ . El primer término está dado por:

$$D_T u^{\alpha'} z^\alpha = \begin{bmatrix} v_1 + T^{-1}(c - \bar{c})u_0 - \bar{c}T^{-1} \sum_{t=2}^T [v_t + (c - \bar{c})T^{-1}u_{t-1}] \\ T^{-1/2} \sum_{t=2}^T (v_t + (c - \bar{c})T^{-1}u_{t-1})(-T^{-1}\bar{c}t + 1) + o_p(1) \\ T^{-1/2} \sum_{t=T_B+1}^T (v_t + (c - \bar{c})T^{-1}u_{t-1})(-T^{-1}\bar{c}t + 1 + \delta\bar{c}) \end{bmatrix}$$

y su límite es:

$$\sigma \begin{bmatrix} v_1 / \sigma \\ W(1) + (c - \bar{c}) \int_0^1 W_c(r) dr \\ -\bar{c} \int_0^1 r dW(r) - (c - \bar{c})\bar{c} \int_0^1 r W_c(r) dr \\ (1 + \delta\bar{c})([W(1) - W(\delta)] + (c - \bar{c}) \int_0^1 W_c(r) dr) \\ -\bar{c} \int_\delta^1 r dW(r) - (c - \bar{c})\bar{c} \int_\delta^1 r W_c(r) dr \end{bmatrix}$$

El término  $D_T z^{\alpha'} z^\alpha D_T$  está dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 + \sum_{t=2}^T (-\bar{c}/T)^2 & T^{-1/2} \left[ 1 + \sum_{t=2}^T (-\bar{c}/T)(-\bar{c}/T + 1) \right] \\ & T^{-1/2} \left[ \sum_{t=T_B+1}^T (-\bar{c}/T)(-\bar{c}/T + 1 + \delta\bar{c}) \right] \\ T^{-1} \left[ 1 + \sum_{t=2}^T (-\bar{c}t/T + 1)^2 \right] \\ & T^{-1} \sum_{t=T_B+1}^T (-\bar{c}t/T + 1)(-\bar{c}t/T + 1 + \delta\bar{c}) \\ & T^{-1} \sum_{t=T_B+1}^T (-\bar{c}t/T + 1 + \delta\bar{c})^2 \end{bmatrix}$$

y su límite es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{c}^2/3 - \bar{c} + 1 & (1 - \delta)(1 - \bar{c}) + \bar{c}^2(2 + \delta^3 - 3\delta)/6 & \\ \bar{c}^2(1 - \delta^3)/3 - \bar{c}(1 - \delta^2)(1 + \delta\bar{c}) + (1 - \delta)(1 + \delta\bar{c})^2 & & \end{bmatrix}$$

Algebra simple nos muestra que  $M_T(c, \bar{c}, \delta) \Rightarrow v_1^2 + \sigma^2 M(c, \bar{c}, \delta)$  y el resultado del teorema se desprende utilizando (A.5). La demostración para el Modelo II es enteramente análoga y, por ende, se omite. El resultado establecido en (16) se desprende utilizando el hecho que  $S(\bar{\alpha}, \delta) = u^{\bar{\alpha}'} u^{\bar{\alpha}} - M_T(c, \bar{c}, \delta)$ , depende de  $\delta$  solo a través del término  $M_T(c, \bar{c}, \delta)$ , que entra con un signo negativo y, por tanto, se toma el *supremum* en vez del *infimum*.

## REFERENCIAS

ANDREWS, D.W.K.

1993 «Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point». *Econometrica*, 61(4), pp. 821-856.

BANERJEE, A., R. LUMSDAINE y J.H. STOCK

1992 «Recursive and Sequential Test of the Unit Root and Trend Break Hypothesis: Theory and International Evidence». *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, pp. 271-287.

BHARGAVA, A.

1986 «On the Theory of Testing Unit Roots in Observed Time Series». *Review of Economics Studies*, 53(3), pp. 369-384.

CAMPBELL, J.Y. y N.G. MANKIW

1987 «Permanent and Transitory Components in Macroeconomics Fluctuations». *American Economic Review: Papers and Proceedings*, 77, pp. 111-117.

1988 «Are Output Fluctuations Transitory?». *Quarterly Journal of Economics*, 102, pp. 857-880.

CAMPBELL, J.Y. y P. PERRON

1991 «Pitfalls and Opportunities: What Macroeconomists Should Know About Unit Roots». En O.J. Blanchard y S. Fischer (eds.), *NBER Macroeconomics Annual*, 6, pp. 141-201.

CHRISTIANO, L.J.

1992 «Searching for a Break in GNP». *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, pp. 237-250.

CLARK, P.K.

1988 «The Cyclical Component of U.S. Economic Activity». *Quarterly Journal of Economics*, 102, pp. 798-814.

COCHRANE, J.H.

1987 «How Big is the Random Walk in GNP?». *Journal of Political Economy*, 96, pp. 893-920.

DICKEY, D.A. y W.A. FULLER

1979 «Distribution of the Estimator for Autoregressive Time Series with a Unit Root». *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427-431.

DUFOUR, J.-M. y M. KING

1991 «Optimal Invariant Test for the Autocorrelation Coefficient in Linear Regressions with Stationary or Nonstationary Errors». *Journal of Econometrics*, 47, pp. 115-143.

ELLIOTT, G., T. ROTHENBERG y J.H. STOCK

1996 «Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root». *Econometrica*, 64, pp. 813-839.

NG, S. y P. PERRON

2001 «Unit Root Tests in ARMA Models with Data Dependent Methods for the Selection of the Truncation Lag». *Econometrica*, 69(6), pp. 1519-1554.

NG, S. y P. PERRON

1997 «Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power», manuscrito. Boston College.

NELSON, C.R. y C.I. PLOSSER

1982 «Trends and Random Walks in Macroeconomics Time Series: Some Evidence and Implications». *Journal of Monetary Economics*, 10, pp. 139-162.

PERRON, P.

1989 «The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis». *Econometrica*, 57, pp. 1361-1401.

1997 «Further Evidence of Breaking Trend Functions in Macroeconomics Variables». *Journal of Econometrics*, 80, pp. 355-385.

PERRON, P. y S. NG

1996 «Useful Modifications to Some Unit Root Tests with Dependent Errors and Their Local Asymptotic Properties». *Review of Economics Studies*, 63, pp. 435-463.

1998 «An Autoregressive Spectral Density Estimator at Frequency Zero for Nonstationarity Tests». *Econometric Theory*, 14, pp. 560-603.

PHILLIPS, P.C.B

1987 «Time Series Regression with Unit Roots». *Econometrica*, 55, pp. 277-302.

PHILLIPS, P.C.B y P. PERRON

1988 «Testing for a Unit Root in Time Series Regression». *Biometrika*, 75, pp. 335-346.

SAID, S.E. y D.A. DICKEY

1984 «Testing for Unit Roots in Autoregressive Average Models of Unknown Order». *Biometrika*, 71, pp. 599-608.

SARGAN, J.D. y A. BHARGAVA

1983 «Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with First Order Moving Average Errors When the Root Lies on the Unit Circle». *Econometrica*, 51(3), pp. 799-820.

SHAPIRO, M. y M. WATSON

1988 «Sources and Business Cycles Fluctuations». En S. Fischer (ed.), *NBER Macroeconomics Annual*, 3, pp. 111-148.

STOCK, J.H.

1990 «A Class of Tests for Integration and Cointegration», manuscrito no publicado. Kennedy School of Government, Harvard University.

1994 «Unit Roots, Structural Breaks and Trends». En D.L. McFaden y R.F. (eds.), *Handbook of Econometrics*, IV, pp. 2740-2841.

VOGELSANG, T.J. y P. PERRON

1998 «Additional Tests for a Unit Root Allowing the Possibility of Breaks in the Trend Function». *International Economic Review*, 39(4), pp. 1073-1100.

ZIVOT, E y D.W.K. ANDREWS

1992 «Further Evidence of the Great Crash, the Oil-Price Shock and the Unit Root Hypothesis». *Journal of Business and Economics Statistics*, 10, pp. 251-270.