

# TRIANGULACIONES Y HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

*Christian Valqui*

## ***Resumen***

*La fórmula de Poincaré-Euler para poliedros convexos se generaliza a través de triangulaciones y la homología simplicial. Esto permite captar de manera intuitiva la idea de homología.*

# 1 La Fórmula de Poincaré-Euler

Euler se dio cuenta en 1752 que en un poliedro convexo siempre se cumple la relación

$$V - A + C = 2,$$

donde  $V$ ,  $A$  y  $C$  son los números de **Vértices**, **Aristas** y **Caras** respectivamente. Esto se verifica rápidamente en un tetraedro ( $V=4$ ,  $A=6$ ,  $C=4$ ), en un cubo ( $V=8$ ,  $A=12$ ,  $C=6$ ) y en un dodecaedro ( $V=12$ ,  $A=30$ ,  $C=20$ ).

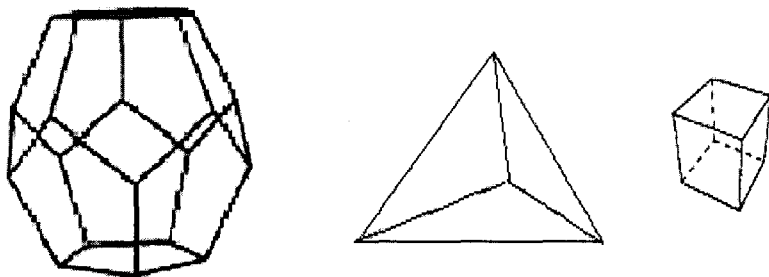


Figura 1.1 *Dodecaedro, Tetraedro y Cubo*



Figura 1.2 *Pelota de fútbol*

También vale para una pelota de futbol estándar con doce paños pentagonales y 20 hexagonales ( $V=60$ ,  $A=90$ ,  $C=32$ ). Una demostración bastante simple es debido a Thurston [2]: Coloquemos el poliedro en el espacio, de modo que ninguna arista esté horizontal – en particular, hay un único vértice máximo  $U$  y un único mínimo  $L$ . Calculemos la cantidad  $V - A + C$  poniendo un signo “+” en cada vértice y en el centro de cada cara, y un signo “-” en el centro de cada arista. Mostraremos que todos los signos se cancelan entre sí, excepto los dos signos “+” en  $U$  y  $L$ .

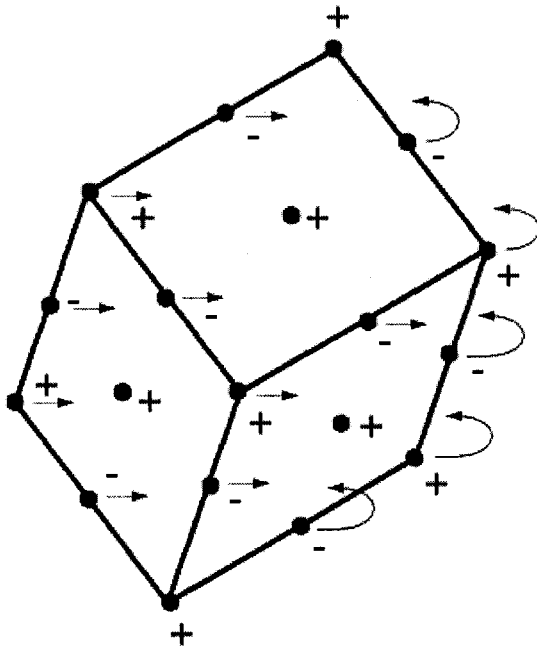


Figura 1.3 *Se gira contra el reloj*

Para esto desplazamos los signos de los vértices y las aristas hacia una cara adyacente. La dirección es determinada por la regla de que cada signo se mueve horizontalmente, en contra del sentido del reloj, visto desde arriba. De esta manera, cada cara recibe los signos correspondientes a un intervalo abierto de su frontera, Arista-cara-arista-...-arista-cara-arista, es decir, una suma total de  $-1+1-1+\dots-1+1-1=-1$ .

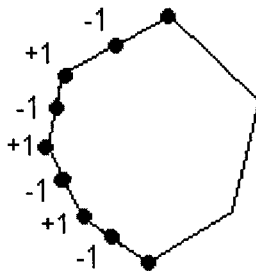


Figura 1.4 *Una cara recibe  $-1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = -1$*

Sumando al  $+1$  que teníamos al centro de la cara, obtenemos una suma total de cero en cada cara. Lo que queda como suma final de todo el poliedro es  $+2$ , correspondiente a  $U$  y  $L$ .  $\square$

Si el poliedro  $P$  no es convexo la suma alternada nos va a dar la característica de Euler (ver definición 3.1),

$$\chi(P) = V - A + C \quad (1.1)$$

siempre y cuando las caras sean polígonos homeomorfos a polígonos convexos. Como ejemplos veamos poliedros que son homeomorfos a superficies de característica cero (el toro  $T$ ) y  $-2$  (el bitoro  $BT$ ). En el primer caso cortamos las caras inferior y superior en trapezios (polígonos convexos) y tenemos que  $C = 16$ ,  $A = 32$  y  $V = 16$ , (ver figura)

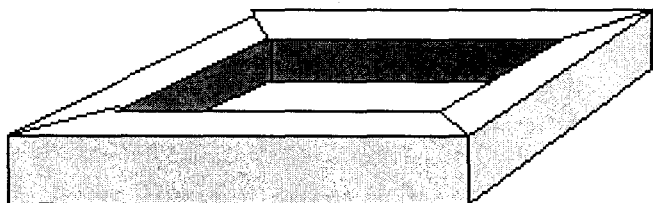


Figura 1.5 Poliedro homeomorfo al toro

y la suma alternada nos da  $\chi(T) = 0$ . Si juntamos dos toros según la figura

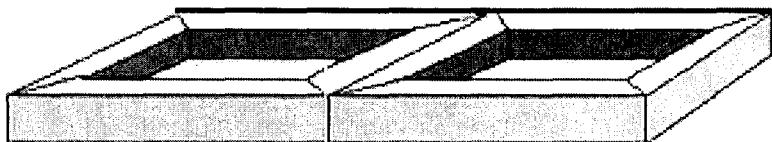


Figura 1.6 Bitoro

se pierden dos caras, pero ninguna esquina ni arista, de modo que  $C = 30$ ,  $A = 64$  y  $V = 32$ . Así  $V - A + C = -2 = \chi(BT)$ .

Notemos que se puede asumir que los poliedros sólo tienen caras triangulares, pues al partir un polígono en un triángulo y en un polígono

con un lado menos,  $V - A + C$  se mantiene constante, pues la cantidad  $V$  de vértices no cambia,  $C$  aumenta en  $+1$ , pero también  $A$  aumenta en  $+1$ . Si hacemos esto con el toro obtenemos una triangulación del toro con  $C = 32$ ,  $A = 48$  y  $V = 16$  (ver figura)

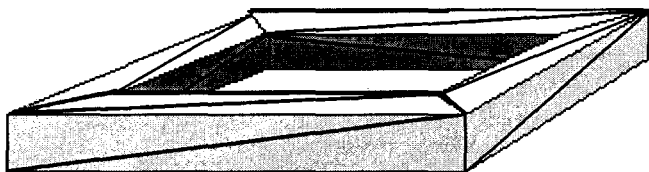


Figura 1.7 Toro triangulado

En lo que sigue vamos a formalizar el concepto de triangulación para poder definir la homología simplicial y analizar su relación con las fórmulas mostradas anteriormente.

## 2 Triangulaciones

En esta parte vamos a generalizar el concepto de triangulación de una superficie, que no es otra cosa que el cubrimiento de la superficie con triángulos de tal manera, que si dos triángulos se intersecan, tienen un lado completo o una esquina en común. Los triángulos son 2-símplices, y en el caso general consideramos  $n$ -símplices.

**Definición 2.1** *El  $n$ -símplice estándar  $\Delta_n$  está dado por*

$$\Delta_n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ tq } \sum_{i=0}^n x_i = 1 \text{ y } x_i \geq 0, \forall i\}$$

*Las  $k$ -caras del  $n$ -símplice estándar son los subconjuntos*

$$\varepsilon_n^{i_1, \dots, i_k} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n, \text{ tq } x_j = 0 \text{ para } j \notin \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

El 0-símplice estándar es el punto  $\{1\} \subset \mathbb{R}$ , el 1-símplice es un trozo de recta, el 2-símplice es un triángulo (ver figura) y el 3-símplice es un

tetraedro (contenido en  $\mathbb{R}^4$ ).

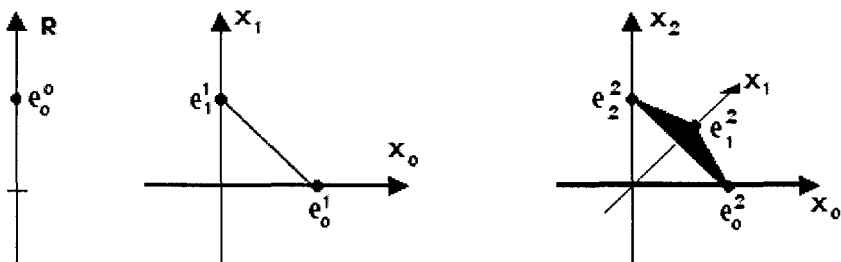


Figura 2.1 Los 0,1,2-simplices estándar

Las 0-caras de  $\Delta_3$  son las esquinas, las 1-caras son las aristas, las 2-caras son las caras propiamente dichas y la única 3-cara es el  $\Delta_3$  mismo.

**Definición 2.2** Sea  $X$  un espacio de Hausdorff. Un atlas simplicial de  $X$  es un conjunto  $S$  de funciones continuas de algún  $\Delta_n$  a  $X$  (las funciones de un  $\Delta_n$  para  $n$  fijo forman un subconjunto de  $S$  denotado por  $S_n$ ) que cumplen las siguientes condiciones:

1.  $X = \bigcup_{s \in S} \text{Im}(s)$
2. Todo  $s$  es inyectivo. Como  $X$  es de Hausdorff y  $\Delta_n$  compacto esto implica que  $s(\Delta_n) = \text{Im}(s)$  es cerrado y homeomorfo a  $\Delta_n$ .
3. Cualesquiera dos funciones  $s, t \in S$  están relacionadas linealmente entre sí.  
 Esto significa que si  $s : \Delta_m \rightarrow X$  y  $t : \Delta_n \rightarrow X$  tienen imágenes no disjuntas, entonces  $s^{-1}t(\Delta_n)$  es una cara de  $\Delta_m$  (y recíprocamente), además  $s^{-1}t$  es una función lineal. Si  $s^{-1}t$  preserva el orden de los vértices para todo  $s, t$ , se dice que el atlas  $S$  es ordenado.
4. La topología de  $X$  está dada por  $S$ . Esto significa que  $A \subset X$  es cerrado si y solamente si  $A \cap \text{Im}(s)$  es cerrado para todo  $s$ .

Ejemplos de atlas simpliciales:

- a) Como primer ejemplo tenemos los poliedros con caras triangulares como el tetraedro o el poliedro de la figura 1.5. Aquí se considera a los triángulos como imágenes de  $\Delta_2$ . Componiendo estas triangulaciones con homeomorfismos de poliedros con superficies obtenemos triangulaciones de superficies. Verifiquemos en este ejemplo

las condiciones de la definición:

La condición 1,  $X$  es igual a la unión, significa que los triángulos cubren a todo el poliedro (o superficie), mientras que la condición 2 significa que los triángulos son no degenerados, es decir imágenes inyectivas de  $\Delta_2$ .

La condición 3 significa que la intersección de dos triángulos debe ser un lado común a ambos, o sino una esquina. En particular, un lado de un triángulo no puede ser la unión de dos lados de otros dos triángulos (ver figura).

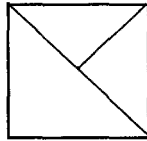


Figura 2.2 *Esto NO es triangulación del cuadrado*

La última condición 4 se cumple en nuestro caso poniendo la topología inducida en la superficie como subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . El objetivo de esta condición es poder seguir usando las herramientas de la topología en espacios simpliciales de dimensión infinita.

b)  $X = \Delta_n$  ,  $S = \{Id\}$

c)  $X = \Delta_n$  y  $S$  se forma de todas las inclusiones ordenadas de símplexes menores como caras, es decir

$$S_k = \{s_n^{i_0, \dots, i_k}\}_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n}$$

con

$$s_n^{i_0, \dots, i_k} : \Delta_k \rightarrow \Delta_n, \quad (t_0, \dots, t_k) \mapsto \sum_{j=0}^k t_j e_{i_j}.$$

Por ejemplo  $s_2^{0,2} = \varepsilon_2^1$  incluye  $\Delta_1$  como cara en  $\Delta_2$ , según la fórmula de arriba, tenemos  $s_2^{0,2}(t_1, t_2) = (t_1, 0, t_2)$  (ver figura).

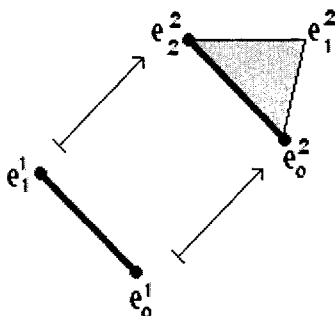


Figura 2.3  $s_2^{0,2} = \varepsilon_2^1: \Delta_1$  como cara de  $\Delta_2$

d) Si  $\phi: \Delta_n \xrightarrow{\cong} B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ , se puede formar el atlas  $\phi S = \{\phi \circ s, s \in S\}$  para cada uno de los dos ejemplos anteriores.

Se puede demostrar las siguientes afirmaciones [1, Prop.V.7.2, V.7.4 y V.7.5]:

1. Todo atlas (ordenado) está contenido en un único atlas maximal (ordenado).
2. Todo atlas maximal contiene a un atlas maximal ordenado que se llama triangulación.
3. Para un atlas simplicial ordenado  $S$  son equivalentes:
  - a)  $S$  es maximal,
  - b)  $s \in S_n \Rightarrow s \circ \varepsilon_n^i \in S_{n-1}$  para todo  $\varepsilon_n^i$ , donde  $\varepsilon_n^i$  son las inclusiones de las  $(n-1)$ -caras en  $\Delta_n$ .
  - c) Dado un punto  $P \in X$ , existe un único  $s \in S$  (en un único  $S_n$ ) de modo que  $P \in s(\overset{\circ}{\Delta}_n)$ .

Notemos que en el ejemplo b) el atlas  $(X = \Delta_n, S = \{Id\})$  no es maximal; un punto de una arista no está en el interior (relativo) de la imagen del único mapa  $s = Id \in S$ .



### 3 Homología Simplicial

Partiendo de un espacio triangulado  $(X, S)$  construimos un complejo de cadenas de grupos abelianos. La homología de este complejo es por definición la homología simplicial de  $X$ . Definimos

$$SP_n := \text{Grupo abeliano libre generado por } S_n$$

y el diferencial  $\partial_n : SP_n \rightarrow SP_{n-1}$  dado por

$$\partial_n(s) = \sum_{i=0}^n (-1)^i s \circ \varepsilon_n^i$$

en la base y extendido linealmente. Definimos la homología simplicial  $HSP(X)$  como la homología del complejo  $(SP_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Sea por ejemplo la triangulación del 2-símplice estándar:

$$S = \{e_0^2, e_1^2, e_2^2, \varepsilon_2^0, \varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, Id\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} SP_0 &= e^0\mathbb{Z} \oplus e^1\mathbb{Z} \oplus e^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3 \\ SP_1 &= \varepsilon_2^0\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_2^1\mathbb{Z} \oplus \varepsilon_2^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3 \\ SP_2 &= Id\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Obviamente  $SP_n = \{0\}$  para  $n \notin \{0, 1, 2\}$ , y los diferenciales relevantes (no nulos)  $\partial_1, \partial_2$  están dados de la siguiente manera en los generadores: El diferencial  $\partial_2$  está definido por

$$\partial_2(Id) = \varepsilon_2^0 - \varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2$$

y  $\partial_1$  definido a través de

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^0 &\mapsto e^0 - e^1 \\ \varepsilon_2^1 &\mapsto e^0 - e^2 \\ \varepsilon_2^2 &\mapsto e^1 - e^2. \end{aligned}$$

Es un cálculo directo verificar que el núcleo de  $\partial_1$  es justamente la imagen de  $\partial_2$  (Ejercicio para el lector). Sabemos además que  $3 = \dim(SP_1) =$

$\dim(\text{Im}(\partial_1)) + \dim(\text{Ker}(\partial_1))$ , que  $\text{Ker}(\partial_0) = SP_0$  y que  $\text{Ker}(\partial_2) = 0$ . Entonces podemos calcular la homología

$$HSP_n(X) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$$

Y obtenemos  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = \{0\}$  y  $H_2 = \{0\}$ .

Si tomamos como  $X$  solamente el triángulo que es el borde de  $\Delta_2$ , homeomorfo a  $S^1$ , obtenemos usando los cálculos anteriores que

$$H_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ 0 & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

Notemos que hemos usado el hecho que un homeomorfismo da lugar a un isomorfismo en los complejos simpliciales y por tanto induce un isomorfismo en la homología. Extendiendo nuestro resultado se puede verificar (aunque los cálculos involucrados se hacen cada vez más largos) que para las esferas unitarias  $S^n \approx \Delta_n$  se tiene

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases} \quad (3.1)$$

Notemos que aquí usamos el símbolo  $H(X)$ , que es la homología usual construida a partir del complejo singular de un espacio. Es un teorema (ver [1, Prop. V.8.7]) que la homología simplicial coincide con esta homología, en particular no depende de la triangulación escogida. Este resultado del cálculo de la homología para  $S^n$  es uno de los primeros resultados importantes de las teorías homológicas, pues demuestra que las esferas no pueden ser homeomorfas entre sí (este es un resultado del cual no conozco prueba alguna que no use homología).

Veremos ahora la fórmula de Poincaré-Euler bajo la luz de los resultados nuevos.

**Definición 3.1** *Dado un espacio triangulado  $X$  de dimensión finita  $n$ , la característica de Euler está dada por*

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(H_i(X)).$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(H_i(X)) &= \dim(\text{Ker}\partial_i/\text{Im}(\partial_{i+1})) \\ &= \dim(\text{Ker}(\partial_i)) - \dim(\text{Im}(\partial_{i+1})) \end{aligned}$$

y  $\dim(\text{Ker}(\partial_i)) + \dim(\text{Im}(\partial_i)) = \dim(SP_i)$ .

Esto nos permite calcular

$$\begin{aligned}
 \chi(X) &= \sum_i (-1)^i \dim(H_i(SP(X))) \\
 &= \sum_i (-1)^i [\dim(\text{Ker}(\partial_i)) - \dim(\text{Im}(\partial_{i+1}))] \\
 &= \sum_i (-1)^i \dim(\text{Ker}(\partial_i)) + \sum_i (-1)^{i+1} \dim(\text{Im}(\partial_{i+1})) \\
 &= \sum_i (-1)^i \dim(\text{Ker}(\partial_i)) + \sum_i (-1)^i \dim(\text{Im}(\partial_i)) \\
 &= \sum_i (-1)^i (\dim(\text{Ker}(\partial_i)) + \dim(\text{Im}(\partial_i))) \\
 &= \sum_i (-1)^i \dim(SP_i)
 \end{aligned}$$

Notemos que  $\dim(SP_i)$  es el número de  $i$ -símplices de la triangulación. En el caso de una superficie triangulada como en la primera parte es entonces el número de los vértices (0-símplices), de las aristas (1-símplices) y de las caras triangulares (2-símplices) respectivamente, de modo que la última suma alternada no es otra cosa que  $V - A + C$ , con lo cual queda probada la fórmula (1.1). Notemos que la homología de un poliedro convexo es la misma que la de  $S^2$ , y la característica de Euler de  $S^2$  es 2 (Ya conocemos la homología de las esferas por (3.1)) con lo cual vemos que la fórmula de Euler es un caso particular del cálculo de invariantes homológicas.

Espero que este breve paseo por los orígenes de las teorías homológicas motive a estudiar más a fondo esta herramienta que se ha vuelto indispensable en la matemática moderna.

## Referencias

- [1] ALBRECHT DOLD: *Lectures on Algebraic Topology*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Springer Verlag (1972).

- [2] W.P. THURSTON: *The Geometry and Topology of Three-Dimensional Manifolds*. Notas no publicadas. Referencia encontrada en <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/charges.html>.

*Christian Valqui*  
*Sección Matemática, Departamento de Ciencias*  
*Pontificia Universidad Católica del Perú*  
*cvalqui@pucp.edu.pe*