PRO MATHEMATICA

VOLUMEN XXXII/ No 64/2023 ISSN 2305-2430

Diseño y diagramación inicial de K. J. M. Huarcaya Huarcaya

PRO MATHEMATICA

VOLUMEN XXXII/ No 64/2023 ISSN 2305-2430

La revista PRO MATHEMATICA, fundada en 1987, es una publicación del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Está dedicada a artículos de investigación en las áreas de Matemáticas Puras y Aplicadas, y busca mantener un alto estándar tanto en la exposición como en el contenido matemático. Anualmente se edita un volumen compuesto por dos números. La revista publica trabajos originales de investigación o inéditos de divulgación sobre el desarrollo actual en Álgebra, Análisis Matemático, Ciencia de la Computación, Estadística y Probabilidad, Geometría, Investigación de Operaciones, Topología, Matemáticas Aplicadas y Educación Matemática. Todos los artículos son arbitrados. PRO MATHEMATICA se encuentra indexada en el catálogo Latindex y en el sistema Redalyc.

Founded in 1987, PRO MATHEMATICA journal belongs to the Sciences Department, Mathematics Section, of the Pontificia Universidad Católica del Perú. It publishes research articles in the Pure and Applied Mathematics areas, and seeks to maintain a high standard for exposition as well as for mathematical content. A volume composed by two numbers is published every year. The journal publishes original papers on mathematical research or review articles on new developments in the areas of Algebra, Mathematical Analysis, Computer Science, Statistics and Probability, Geometry, Operations Research, Topology, Applied Mathematics and Mathematical Education. All papers are refereed. PRO MATHEMATICA is indexed in the Latindex catalogue and in the Redalyc system.

PRO MATHEMATICA

VOLUMEN XXXII/ No 64/2023 ISSN 2305-2430

CONTENIDO

Pro Mathematica, **32**, *64 (2023), 7-14*

MEROMORPHIC FUNCTIONS ON GERMS OF SURFACES ALONG A RATIONAL CURVE

Maycol Falla Luza[1]

Junio, 2023

(*Presentado por R. Rosas*)

Abstract

We give examples of germs of surfaces containing a rational curve with positive self-intersection and with zero, one or two independent meromorphic functions.

MSC(2020): 51M15 (primary), 32S65 (secondary).

Keywords: *Germs of Surface, Meromorphic Function, Holomorphic Foliation*

1. *Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, Brazil*

1. Introduction

Let X be a complex surface, not necessarily compact, and $Y \subset X$ a smooth rational curve, we denote by (X, Y) the germ of neighborhood. In these notes we study the field $\mathbb{C}(X, Y)$ of germs of meromorphic functions defined on small open sets of X containing Y. Denote by $d = Y^2$ the self-intersection of Y, that is, the degree of the normal bundle $N_{Y|X}$. We say that the pair (X, Y) is a d-neighborhood. In the case $d < 0$ the germ of neighborhood is linearizable and when $d = 0$ is isomorphic to $(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}^1$ (see [6] and [11] respectively), thus we shall focus on the case $d > 0$. In this case, following Andreotti [1] we know that $\mathbb{C}(X, Y)$ has transcendance degree bounded by $2 = \dim X$.

In [4] the authors proved the existence of germs of smooth surfaces X along a smooth rational curve Y with arbitrary positive self-intersection without meromorphic functions other than constants, that is such that $tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y) = 0$. Actually, it is proven that there are germs of surfaces with no foliations containing such rational curves.

On the other hand, in [9] S. Lvovski gives examples of non-algebrizable germs of surfaces X containing a smooth rational curve with any positive self-intersection such that $tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y) = 2$.

Recently, in [5, Theorem A] it is proven that for any complex projective manifold Y of dimension n and any pair of natural numbers (l, m) with $m \geq 2n$ and $l \leq m$, there exists a germ of manifold X of dimension m containing Y such that the normal bundle of Y in X is ample and $tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y) = l$. The construction here is simpler than the one given in [4] and one of the main ingredients is the construction of smooth manifolds transverse to holomorphic foliations.

By a specialization of the method in [5] to the case of $Y \cong \mathbb{P}^1$ we produce examples of germs of surfaces (X, Y) with self-intersection $d \geq 2$ and such that the trascendence degree of $\mathbb{C}(X, Y)$ over $\mathbb{C}$ is arbitrary between 0 and 2. Moreover, with some extra work we can prove the following generalization of [4].

Theorem A. *For any $d \geq 1$ and $l \in \{0, 1, 2\}$ there exists a pair (X, Y), where $Y \cong \mathbb{P}^1$ and X is a germ of surface containing Y such that $Y^2 = d$ and $tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y) = l$. Moreover, in the case $l = 0$ we can find X such that it does not admit any web.*

2. Some preliminaries

We give here some definitions and results that will be used in the proof of our theorem.

Given a field extension $K \subseteq L$, a transcendence basis is a maximal algebraically independent subset S of L over K, that is the elements of S do not satisfy any non-trivial polynomial equation with coefficients in K. Note that if S is a transcendence basis then the extension $K(S) \subseteq L$ is algebraic. All transcendence bases of a field extension have the same cardinality, called the transcendence degree of the extension and denoted by $tr \deg_K L$. If we have two extensions $K \subseteq L \subseteq M$ then $tr \deg_K M = tr \deg_L M + tr \deg_K L$. In particular, if $L \subseteq M$ is an algebraic extension then $tr \deg_K L = tr \deg_K M$. We will use these concepts in the context of germs of neighborhoods and ramified covergins.

Let $\widehat{X}$, X be complex manifolds and $\varpi : \widehat{X} \to X$ a ramified covering of order d with ramification locus $\widehat{Y}$ and branching locus Y, that is:

- $\widehat{Y}$ is the set of points $x \in \widehat{X}$ such that ϖ is not a local biholomorphism at x,
- $Y = \varpi(\widehat{Y})$ and
- The restriction $\varpi : \widehat{X} \setminus \widehat{Y} \to X \setminus Y$ defines an unbranching covering of order d.

We will denote this by $\varpi : (\widehat{X}, \widehat{Y}) \to (X, Y)$. The group

$$Deck(\varpi) = \left\{ \phi \in Aut(\widehat{X}) / \varpi \circ \phi = \varpi \right\}$$

of all automorphisms of the branched covering ϖ is called the deck transformation group. The ramified covering $\varpi : (\widehat{X}, \widehat{Y}) \to (X, Y)$ is said to be Galois if $Deck(\varpi)$ acts transitively on each fiber of ϖ.

Proposition 2.1. *Let $\varpi : (\widehat{X}, \widehat{Y}) \to (X, Y)$ be a Galois ramified covering of order d, then ϖ induces an algebraic extension $\mathbb{C}(X, Y) \subseteq \mathbb{C}(\widehat{X}, \widehat{Y})$. In particular*

$$tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y).$$

Proof. Observe first that ϖ induces, by composition, a natural isomorphism

$$\mathbb{C}^{\varpi}(\widehat{X}, \widehat{Y}) := \{ f \in \mathbb{C}(\widehat{X}, \widehat{Y}) : f \circ \phi = f, \ \forall \phi \in Deck(\varpi) \} \simeq \mathbb{C}(X, Y).$$

Take now $h \in \mathbb{C}(\widehat{X}, \widehat{Y})$ and consider the set of functions $\{ h \circ \phi \, / \, \phi \in Deck(\varpi) \} = \{ h_1 = h, h_2, \ldots, h_d \}$. Then, if $s_j(x_1, \ldots, x_d)$ stands for the symmetric functions on $(x_1, \ldots, x_d)$ we clearly have that $s_j(h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{C}^{\varpi}(\widehat{X}, \widehat{Y})$. So the polynomial $p(T) := (T - h_1) \ldots (T - h_d)$ belongs to $\mathbb{C}^{\phi}(\widehat{X}, \widehat{Y})[T]$ and vanishes at $T = h$, then h is algebraic over $\mathbb{C}(X, Y)$ as we wanted. □

For the sake of completeness we end this section recalling the method used in [5] applied to our particular case $Y \cong \mathbb{P}^1$.

Given a holomorphic foliation $\mathcal{F}$ on a complex manifold W, we say that a submanifold $Z \subset W \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ is weakly transverse to $\mathcal{F}$ if $T_z Z \cap T_z \mathcal{F} = \{0\}$ for every $z \in Z$. For the case $W = \mathbb{P}^N$, the existence of projective manifolds of big codimension weakly transverse to a foliation by curves is achieved by applying Kleinman's transversality of a general translate [8, Theorem 2].

Lemma 2.2 (Lemma 3.5 of [5]). *Let $\mathcal{F}$ be a foliation by curves on $\mathbb{P}^{m+1}$ with isolated singularities. Let $Y \subset \mathbb{P}^{m+1}$ be a projective submanifold of dimension n. If $m \geq 2n$ then Y is weakly transverse to $g^*\mathcal{F}$ for any general $g \in Aut(\mathbb{P}^{m+1})$.*

Take now $Z = \mathbb{P}^1$ linearly embedded on $\mathbb{P}^3$ and $\mathcal{F}$ a foliation by curves weakly transverse to Y. Then for a sufficiently small tubular neighborhood U of Z in $\mathbb{P}^3$, the leaf space $X = U/\mathcal{F}$ of $\mathcal{F}|_U$ is a complex surface and the quotient morphism $\pi : U \to X$ has the following properties (see Proposition 3.1 and Lemma 3.2 of [5])

1. the leaves of $\mathcal{F}|_U$ coincide with the fibers of π; and
2. the morphism π maps Z isomorphically to a submanifold Y of X with normal bundle isomorphic to the quotient of $N_{Z/\mathbb{P}^3}$ by the image of $T_{\mathcal{F}}|_Z$ inside it; and
3. the field of germs of meromorphic functions $\mathbb{C}(X, Y)$ is isomorphic by π^* to the field of germs of meromorphic first integrals of $\mathcal{F}$, $\mathbb{C}(\mathcal{F})$.

3. Proof of Theorem A

Consider the foliation $\mathcal{F}$ on $\mathbb{P}^3$ defined by the vector field

$$v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

with $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Then the Zariski closure of the general leaf of $\mathcal{F}$ has dimension equal to the $\mathbb{Q}$-vector subspace of $\mathbb{C}$ generated by $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$. Acording to [2], there exists a unique foliation by algebraic leaves $\mathcal{G}$ containing $\mathcal{F}$ and such that $\mathbb{C}(\mathcal{F}) = \mathbb{C}(\mathcal{G})$, in particular cod $\mathcal{G} = tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\mathcal{F})$. Thus choosing appropriately the λ's we have that $\mathcal{G}$ has dimension $1, 2$ or 3 and so $\mathbb{C}(\mathcal{F})$ has any transcendence degree between

0 and 2. We conclude that for any $k \geq 1$ and any $l \in \{0, 1, 2\}$ there is a foliation $\mathcal{F}$ on $\mathbb{P}^3$ of degree k with $\mathbb{C}(\mathcal{F})$ of transcendence degree l.

We apply the previous construction to $\mathcal{F}$ and $Z = \mathbb{P}^1$ weakly transversal to $\mathcal{F}$ in order to obtain the germ of surface (X, Y) such that $Y \cong \mathbb{P}^1$ and $tr\deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y) = l$. On the other hand, since $N_Z = \mathcal{O}_Z(1) \oplus \mathcal{O}_Z(1)$ and $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1 - k)$ we have that $Y^2 = \deg N_{Y|X} = 2 - (1 - k) = k + 1$. This proves the theorem for $Y^2 = d \geq 2$.

Take now a 2-neighborhood (X, Y) with $tr\deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X, Y) = l$ and consider the ramified covering

$$\varpi : (\widehat{X}, \widehat{Y}) \to (X, Y)$$

of order 2 totally ramifying over Y and inducing a cyclic covering of order 2 over $X - Y$. Then $\widehat{Y}^2 = 1$ and the pair $(\widehat{X}, \widehat{Y})$ is a 1-neighborhood. By Proposition 2.1 we have that $tr\deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = l$.

Finally, for the case $l = 0$ we will give examples of neighborhoods with no singular webs (in particular without foliations). First observe that any web on X gives place by pull-back to a web on U tangent to $\mathbb{F}|_U$ and we can use [10, Theorem 3.2] to extend this web to $\mathbb{P}^3$ tangent to $\mathbb{F}$. On the other hand it follows from [7, Proposition 3.3] and [3] that a generic foliation $\mathbb{F}$ of degree $k \geq 2$ on $\mathbb{P}^3$ does not admit a tangent web. Therefore we can construct our desired neighborhood (X, Y) for $Y^2 = k + 1 \geq 3$.

Take now a 3-neighborhood (X, Y) with no webs and consider the ramified covering

$$\varpi : (\widehat{X}, \widehat{Y}) \to (X, Y)$$

of order 3 totally ramifying over Y and inducing a cyclic covering of order 3 over $X - Y$ with Galois automorphism ϕ. Then $\widehat{Y}^2 = 1$ and $(\widehat{X}, \widehat{Y})$ does not admit any web. In fact, if $\widehat{\mathbb{W}}$ is a web on $\widehat{X}$ then $\widehat{\mathbb{W}} \boxtimes \phi^*(\widehat{\mathbb{W}}) \boxtimes (\phi^{\circ 2})^*(\widehat{\mathbb{W}})$ would be a web invariant by ϕ therefore inducing by push-forward a web on X, which is imposible.

By a similar argument, we can take a $2:1$ ramified covering of a $+4$-neighborhood (X, Y) in order to establish the case of self-intersection two.

Referencias

[1] A. Andreotti, *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves.* Bull. Soc. Math. France **91** (1963) 1-38.

[2] Philippe Bonnet, *Minimal invariant varieties and first integrals for algebraic foliations.* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **37**, 1 (2006) 1-17.

[3] S. C. Coutinho, J. V. Pereira *On the density of algebraic foliations without algebraic solutions.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **594** (2006) 117-136.

[4] M. Falla Luza, F. Loray, *Neighborhoods of rational curves without functions.* Mathematische Annalen **382** (2022) 1047-1058.

[5] M. Falla Luza, F. Loray, J. V. Pereira, *Submanifolds with ample normal bundle* Bull. Lond. Math. Soc. **56**, 2 (2024) 634-643.

[6] H. Grauert, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen.* Math. Ann. **146** (1962) 331-368.

[7] J. V. Pereira *The characteristic variety of a generic foliation.* Journal of the European Mathematical Society **14**, 1 (2012) 307-319.

[8] S. Kleiman, *The transversality of a general translate.* Compositio Math. **28** (1974) 287 - 297.

[9] S. Lvovski, *On algebraic and non-algebraic neighborhoods of rational curves.* arXiv:2301.10447

[10] H. Rossi, *Continuation of Subvarieties of Projective Varieties.* American Journal of Mathematics **91**, 2 (1969) 565-575.

[11] V. I. Savel'ev, *Zero-type embeddings of the sphere into complex surfaces.* Mosc. Univ. Math. Bull.**37** (1982) 34-39.

Resumen

Damos ejemplos de germenes de superficies conteniendo un curva racional con autointersección positiva y con cero, una o dos funciones meromorfas independientes.

Palabras clave: Germen de superficie. Función meromorfa. Foliación holomorfa.

Presentado: mayo del 2023.
Aceptado: junio del 2023.

Maycol Falla Luza,
Universidade Federal Fluminense,
Rua Prof. Marcos Waldemarde Freitas Reis, S/N,
Niterói, 24210-201, Rio de Janeiro, Brazil.
Email: hfalla@id.uff.br

Pro Mathematica, **32**, *64 (2023), 15-30,* ISSN *1012-3938*

SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES SINGULARES BASADA EN MINIMIZACIÓN

Juan E. Casavilca[1]

octubre, 2023

(*Presentado por R. Chavez*)

Resumen

En este artículo se introduce un nuevo concepto de solución de un sistema lineal singular (sistema descriptor), basado en minimización. Se demuestra que, imponiendo una hipótesis en las matrices del sistema descriptor, la solución basada en minimización existe y es única para cualquier condición inicial. En particular, si la condición inicial es consistente, entonces la solución basada en minimización coincide con la solución clásica. En este trabajo también se da un ejemplo numérico donde se calcula la solución basada en minimización para diferentes condiciones iniciales.

MSC(2020): 93C05.

Palabras clave: *sistemas lineales singulares, descomposición en valores singulares, métodos de minimización.*

1. *Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú*

1. Introducción

El estudio de los sistemas lineales singulares se remonta al siglo IXX. El pionero en este campo fue Karl Weierstrass, quien en [20] analiza a los sistemas lineales singulares que poseen la propiedad de regularidad. Posteriormente, Leopold Kronecker en [12] extiende esta teoría para casos generales. Varias décadas después, Gantmacher dedica un capítulo del libro [7] al estudio de los sistemas lineales singulares, realizando aportes a la teoría conocida hasta esa fecha.

En la década de 1970 se presentan las primeras aplicaciones prácticas de los sistemas lineales singulares, esto aconteció en el campo de la economía con los sistemas singulares dinámicos de Leontief [13]. Posterior a ello, las aplicaciones de los sistemas lineales singulares se incrementaron, incursionando en campos como los circuitos eléctricos [16, 17], el análisis demográfico [2], los sistemas a gran escala [4], entre otros. A finales de la década de 1970 y comienzos de la década de 1980 el desarrollo teórico de estos sistemas cobra gran interés, lo que contribuye al aumento de estudios en esta materia. Estos estudios se enfocaron, principalmente, en la existencia y unicidad de soluciones, la controlabilidad y la observabilidad de los sistemas lineales singulares. En este periodo destacan los trabajos de Luenberger [14], Campbell et al. [2, 3], Dziurla y Newcomb [6], Yip y Sincovec [21], entre otros. Años más tarde, Dai en [4] presenta un compendio de la teoría de los sistemas lineales singulares aplicada a los sistemas de control.

Gantmacher [7] y Luenberger [14, 15] afirman que un aspecto importante para la existencia de la solución son las condiciones iniciales consistentes, y que junto con la regularidad del sistema garantizan la unicidad de la solución. Usando una descomposición matricial de Weierstrass es posible obtener de forma explícita esta solución [4, 21, 1]. Además, Ishihara y Terra [10, 11] usan una descomposición matricial en valores singulares para analizar la regularidad y la estabilidad del sistema lineal singular. Una recopilación teórica de estos resultados se encuentra en el libro de Duan [5], y en la tesis de Guerrero [9].

En este artículo, se propone un nuevo concepto de solución del sistema (2.1), basado en minimización. A diferencia de la solución clásica, la solución basada en minimización puede existir sin imponer condiciones iniciales consistentes. En la Sección 2 se introduce la notación utilizada a lo largo de este artículo, y también se presentan las características del sistema (2.1). En la Sección 3 se utiliza la descomposición en valores singulares para demostrar que, bajo ciertas condiciones del sistema, existe una única solución basada en minimización para cualquier condición inicial. Si la condición inicial es consistente, entonces la solución basada en minimización coincide con la solución clásica. En la última sección se presenta un ejemplo numérico que confirma los resultados de este artículo.

2. El sistema y la notación utilizada

El espacio euclideano $n-$dimensional de números reales es denotado por $\mathbb{R}^n$ y el conjunto de números enteros no-negativos, por $\mathbb{Z}_+$. El espacio de matrices de orden $m \times n$ en $\mathbb{R}$ es denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y, de manera breve, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ denota al espacio de matrices de orden $n \times n$. La norma euclideana de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ (inducida por el producto punto usual) es denotada por $||v||$. El complemento ortogonal de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ es denotado por $W^\perp$ y, si v es un vector de $\mathbb{R}^n$, la proyección ortogonal de v sobre W es denotada por $\text{Proy}_W v$. Finalmente, $W_1 \oplus W_2$ denota la suma directa de los subespacios W_1 y W_2 de $\mathbb{R}^n$.

Considere el siguiente sistema:

$$Sx(k+1) = Ax(k)\,, \tag{2.1}$$

donde $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ y $S\,, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sea $\rho = \text{rank}(S) \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Cuando $\rho = n$, el sistema (2.1) es denominado no-singular, de otro modo es llamado singular. En cualquier caso, S tiene una descomposición en valores singulares $S = U\Sigma V^T$ [18, 19, 8], donde

$\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la siguiente matriz diagonal:

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i = j \leq \rho \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_\rho$ son los valores singulares positivos de S. Las matrices $U\,, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonales. Es más, las primeras ρ columnas de U forman una base ortonormal de $R(S)$, imagen de S, y las últimas columnas constituyen una base ortonormal de $R(S)^\perp$. Análogamente, las últimas $n - \rho$ columnas de V forman una base ortonormal de $N(S)$, núcleo de S, y las primeras columnas constituyen una base ortonormal de $N(S)^\perp$.

Finalmente, introducimos la siguiente estructura de Σ, U y V:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_f & U_l \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_f & V_l \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

donde: $\Sigma_f \in \mathcal{M}_{\rho\times n}(\mathbb{R})$, $0 \in \mathcal{M}_{(n-\rho)\times n}(\mathbb{R})$, $U_f \in \mathcal{M}_{n\times\rho}(\mathbb{R})$, $U_l \in \mathcal{M}_{n\times(n-\rho)}(\mathbb{R})$, $V_f \in \mathcal{M}_{n\times\rho}(\mathbb{R})$, y $V_l \in \mathcal{M}_{n\times(n-\rho)}(\mathbb{R})$.

Observación 2.1. Note que cuando $\rho = 0$: $S = 0 = \Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. Σ_f no existe), $U = U_l \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. U_f no existe), y $V = V_l \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. V_f no existe). Y cuando $\rho = n$: S es no-singular, $\Sigma = \Sigma_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U = U_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. U_l no existe), y $V = V_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. V_l no existe).

3. Solución basada en minimización

Definición 3.1. Considere el sistema (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una solución (clásica) de (2.1) con condición inicial x_0 si: $x(0) = x_0$ y $Sx(k+1) = Ax(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Observación 3.2. Cuando el sistema es no-singular ($\rho = n$) la solución clásica existe y se puede encontrar de manera recursiva. Sin embargo, cuando el sistema es singular ($\rho < n$) debemos exigir que $Ax_0 \in R(S)$ para que exista $x(1)$, una solución de la ecuación $Sx(1) = Ax(0)$. En ese sentido, se dice que la condición inicial x_0 debe ser consistente; es una condición necesaria (aunque no suficiente) para la existencia de una solución clásica del sistema singular.

Definición 3.3. Considere el sistema (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se define el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} = \left\{ x : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \middle| \, x(0) = x_0 \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 < \infty \right\}.$$

Observación 3.4. $\mathcal{S}$ no es vacío pues: la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ con $x(0) = x_0$ y $x(k) = 0 \in \mathbb{R}^n$ para $k = 1, 2, \cdots$ es tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = || - Ax(0)||^2 < \infty.$$

Definición 3.5. Considere el sistema (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una solución de (2.1), basada en minimización, si resuelve el siguiente problema:

$$\min_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 .$$

Este artículo da condiciones suficientes para que exista una única solución basada en minimización (Teorema 3.8); antes de ello se enuncian los siguientes lemas.

Lema 3.6. *Considere el sistema* (2.1) *con condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Si* $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *es una sucesión en* $\mathcal{S}$ *entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 &= ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 + \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ ||Proy_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(k+1))||^2 \Big\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

y por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 \geq ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 . \tag{3.2}$$

Demostración. Como $\mathbb{R}^n = R(S) \oplus R(S)^\perp$ [18] , tenemos que, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 &= ||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 \\ &= ||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))||^2 .\end{aligned}$$

Así, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 &= \sum_{k=0}^{N} \Big\{ ||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))||^2 \Big\} \\ &= ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 + \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \Big\{ ||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k+1))||^2 \Big\} + \\ &||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(N+1) - Ax(N))||^2 . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por otro lado, como $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 < \infty$, entonces $\lim_{N\to\infty} ||Sx(N+1) - Ax(N)||^2 = 0$. Y, como

$$0 \leq ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 \leq ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(N+1) - Ax(N))||^2 = 0$.

Finalmente, al tomar límite a ambos lados de (3.3), obtenemos (3.1). Además, como la serie del lado derecho de (3.1) es no-negativa, tenemos la desigualdad (3.2). □

Lema 3.7. *Considere el sistema* (2.1) *y una sucesión* $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *arbitraria. También considere una descomposición en valores singulares* $S = U\Sigma V^T$ *con la notación dada en* (2.2)*,* (2.3) *y* (2.4)*. Para cada* $k \in \mathbb{Z}_+$ *se cumple lo siguiente:*

$$||Proy_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))|| = ||\Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)||\,, \tag{3.4}$$

$$||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(k))|| = ||-U_l^T Ax(k)||\,. \tag{3.5}$$

Demostración. Primero observe que, de la descomposición en valores singulares y de las igualdades (2.2) y (2.3) tenemos:

$$\begin{aligned} U_f^T S &= U_f^T U \Sigma V^T \\ &= U_f^T \begin{bmatrix} U_f & U_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ 0 \end{bmatrix} V^T \\ &= \Sigma_f V^T\,. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} U_f^T(Sx(k+1) - Ax(k)) &= U_f^T Sx(k+1) - U_f^T Ax(k) \\ &= \Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por otro lado, se sabe que las ρ columnas de U_f forman una base ortonormal de $R(S)$. Por tanto, las ρ coordenadas del vector $\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1)-Ax(k))$, en esa base, constituyen el vector columna $U_f^T(Sx(k+1)-Ax(k))$, que es igual a $\Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)$, por la ecuación (3.6). En consecuencia, al tomar la norma euclideana de este último vector, se obtiene el mismo valor que la norma euclideana de $\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1)-Ax(k))$ porque la base en la que se ha escrito esta proyección es ortonormal. Es decir, tenemos la igualdad (3.4).

La igualdad (3.5) se demuestra de manera análoga: Las $n-\rho$ columnas de U_l forman una base ortonormal de $R(S)^\perp$ y por tanto, la norma euclideana del vector $\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))$ es igual a la norma euclideana del vector de coordenadas $-U_l^T Ax(k)$. $\square$

Teorema 3.8. *Considere el sistema* (2.1) *con condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, y una descomposición en valores singulares* $S = U\Sigma V^T$ *con la notación dada en* (2.2)*,* (2.3) *y* (2.4)*. Si* $U_l^T AV_l \in \mathcal{M}_{n-\rho}(\mathbb{R})$ *es una matriz no-singular entonces existe una única sucesión* $\{x(k)\}_{k=0}^\infty$ *en* $\mathcal{S}$ *tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 \tag{3.7}$$

y por tanto, $\{x(k)\}_{k=0}^\infty$ *es la única solución del sistema* (2.1) *basada en minimización.*

Demostración. Primero, siguiendo la notación (2.2), (2.3) y (2.4) observe lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_f \\ -U_l^T AV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ -U_l^T AV_f & -U_l^T AV_l \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

donde $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathbb{R})$ es la matriz diagonal formada por los valores singulares positivos de S. Así, la matriz D es no-singular y como, por hipótesis, $U_l^T AV_l$ también es no-singular, entonces la matriz dada en (3.8) es no-singular.

Segundo, se define una sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ de manera recursiva: Sea $x(0) = x_0$, la condición inicial dada; luego, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, se define el vector $x(k+1)$ como siendo la solución del siguiente sistema (3.9):

$$\begin{bmatrix} \Sigma_f \\ -U_l^T A V \end{bmatrix} \cdot V^T x(k+1) = \begin{bmatrix} U_f^T A x(k) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Note que la solución $x(k+1)$ existe y es única pues, como vimos, la primera matriz del lado izquierdo en (3.9) es no-singular, y la matriz V^T es ortonormal (i.e. $VV^T = I = V^T V$).

Ahora, probaremos que esta sucesión satisface (3.7). Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(k)$ y $x(k+1)$ satisfacen (3.9), es decir:

$$\begin{aligned} \Sigma_f V^T x(k+1) &= U_f^T A x(k) \\ -U_l^T A x(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $||\Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T A x(k)|| = 0$ y $||-U_l^T A x(k+1)|| = 0$; o equivalentemente, $||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))|| = 0$ y $||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k+1))|| = 0$ (vea el Lema 3.7).
Así, para todo $N = 1, 2, \cdots$ se tiene que:

$$||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(1) - Ax(0))||^2 + \sum_{k=1}^{N} ||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 = 0\,, \tag{3.10}$$

$$\text{y} \quad \sum_{k=1}^{N} ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))||^2 = 0\,. \tag{3.11}$$

Si sumamos (3.10) y (3.11) , y recordamos que $\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k)) = \text{Proy}_{R(S)^\perp}(Sx(k+1) - Ax(k))$, tenemos lo siguiente:

$$||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(1) - Ax(0))||^2 + \sum_{k=1}^{N} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = 0\,.$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}||Sx(k+1)-Ax(k)||^2 &= ||\mathrm{Proy}_{R(S)^{\perp}}(Sx(1)-Ax(0))||^2 + \\ &\quad ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(1)-Ax(0))||^2 + \\ &\quad \sum_{k=1}^{N}||Sx(k+1)-Ax(k)||^2 \\ &= ||\mathrm{Proy}_{R(S)^{\perp}}(-Ax(0))||^2 \,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Y al tomar límite a ambos lados de (3.12) se obtiene (3.7). Note que, como la serie es finita, la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\mathcal{S}$.

Ahora probaremos la unicidad. Sea $\{x'(k)\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ que satisface (3.7). Como el Lema 3.6 afirma que se debe cumplir la igualdad (3.1), entonces se tiene lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx'(k+1)-Ax'(k))||^2 + ||\mathrm{Proy}_{R(S)^{\perp}}(-Ax'(k+1))||^2\Big\} = 0\,.$$

Es decir, para cada $k \in \mathbb{Z}_{+}$: $||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx'(k+1) - Ax'(k))|| = 0$ y $||\mathrm{Proy}_{R(S)^{\perp}}(-Ax'(k+1))|| = 0$, o equivalentemente $||\Sigma_f V^T x'(k+1) - U_f^T Ax'(k)|| = 0$ y $|| - U_l^T Ax'(k+1)|| = 0$, o también:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_f \\ -U_l^T AV \end{bmatrix} \cdot V^T x'(k+1) = \begin{bmatrix} U_f^T Ax'(k) \\ O \end{bmatrix} . \tag{3.13}$$

Finalmente, se sigue por inducción que para todo $k \in \mathbb{Z}_{+}$: $x'(k) = x(k)$, ya que $x'(0) = x_0 = x(0)$ y ya que el sistema (3.13) es igual al sistema no-singular (3.9) que define la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$.

Ahora probaremos que esta sucesión es la única solución del sistema (2.1) basada en minimización. Sea $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ arbitraria. El Lema 3.6 nos indica que $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ debe cumplir la desigualdad (3.2) con $x^*(0) = x_0 = x(0)$, y como la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ satisface (3.7), tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}||Sx^*(k+1)-Ax^*(k)||^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty}||Sx(k+1)-Ax(k)||^2\,.$$

Como $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria, entonces $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ resuelve el problema de minimización de la serie. Además, cualquier sucesión en $\mathcal{S}$ cuya serie iguale a $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$ va a satisfacer (3.7) y por tanto, tiene que ser la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$, como vimos arriba. $\square$

Observe que el Teorema 3.8 es válido para cualquier condición inicial x_0 (la hipóteis se refiere al sistema (2.1)); es decir, la solución basada en minimización existe para cualquier condición inicial. Si, además, la condición inicial es consistente (i.e. $Ax_0 \in R(S)$), la solución basada en minimización es la solución clásica. Esto se analiza en el siguiente Corolario.

Corolario 3.9. *Considere la hipótesis del Teorema 3.8. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La condición inicial x_0 es consistente;

(ii) La solución basada en minimización es una solución clásica con condición inicial x_0;

(iii) Existe una única solución clásica con condición inicial x_0.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii): Decir que la condición inicial x_0 es consistente significa que $Ax_0 \in R(S)$ (vea la Observación 3.2), o equivalentemente que $\text{Proy}_{R(S)^{\perp}} Ax_0 = 0$. Además, el Teorema 3.8 garantiza la existencia de la solución basada en minimización $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ con $x(0) = x_0$. En consecuencia, la serie en (3.7) es cero , y por tanto $||Sx(k+1)-Ax(k)|| = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Esto quiere decir que la solución basada en minimización es una solución clásica.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Sólo resta probar la unicidad. Sea $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ la solución basada en minimización con $x(0) = x_0$. Como esta solución es clásica, tenemos que $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = 0$. Por otro lado, cualquier solución clásica $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ con condición inicial $x^*(0) = x_0$ es tal que $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx^*(k+1) - Ax^*(k)||^2 = 0$, y por tanto, es una sucesión en $\mathcal{S}$ que resuelve el problema de minimización. Así, por la unicidad vista en el Teorema 3.8, tiene que ser igual a $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$.

(iii)⇒(i): Sea $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ la solución clásica con $x(0) = x_0$. Por tanto, $Sx(1) = Ax(0)$, y así $Ax_0 \in R(S)$; es decir la condición inicial x_0 es consistente. □

Corolario 3.10. *Considere la hipótesis del Teorema 3.8. Sea* $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *la solución basada en minimización con condición inicial* $x(0)$, *y sea* $\{x'(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *la solución basada en minimización con condición inicial* $x'(0)$. *Ambas soluciones coinciden (para* $k = 1, 2, \dots$*) si y solo si* $Proy_{R(S)}Ax(0) = Proy_{R(S)}Ax'(0)$.

Demostración. Primero, observe que $\mathrm{Proy}_{R(S)}Ax(0) = \mathrm{Proy}_{R(S)}Ax'(0)$ si solo si $U_f^T Ax(0) = U_f^T Ax'(0)$.

Ahora, de la demostración del Teorema 3.8, se sabe que la solución basada en minimización se calcula de manera recursiva usando el sistema (3.9). Por tanto, si $U_f^T Ax(0) = U_f^T Ax'(0)$ entonces $x(1) = x'(1)$; y por inducción se tiene que ambas soluciones coinciden para $k = 1, 2, \dots$. Y si $U_f^T Ax(0) \neq U_f^T Ax'(0)$ entonces $x(1) \neq x'(1)$ ya que el sistema (3.9) es no-singular (inyectivo); así, ambas soluciones son diferentes. □

4. Ejemplo

Encontraremos soluciones basadas en minimización del sistema (2.1) para las siguientes matrices:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que: $n = 3$, $\rho = 1$ y una descomposición en valores singulares es $S = U\Sigma V^T$, donde $\Sigma = S$ y $U = I = V$. Con esta descomposición calculamos $U_l^T AV_l = I \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que es no-singular; por tanto, el Teorema 3.8 garantiza la existencia de una única solución basada en minimización para cada condición inicial $x(0)$. En este ejemplo, hemos considerado 4 condiciones iniciales diferentes mostradas en la Tabla 1. Para cada caso, se calculó la solución basada en minimización $\{x(k)\}_{k=0}^{N}$, con $N = 10$.

	$x(0)$	$\text{Proy}_{R(S)}Ax(0)$	$\text{Proy}_{R(S)^\perp}Ax(0)$	Suma*
caso 1	$[5\ -5\ -5]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 0\ 0]^T$	0
caso 2	$[5\ -4\ -5]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 1\ 0]^T$	1
caso 3	$[5\ -5\ -4]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 0\ 1]^T$	1
caso 4	$[5\ -4\ -4]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 1\ 1]^T$	2

* Suma $= \sum_{k=0}^{N-1} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$

Cuadro 1: Resultados encontrados para 4 condiciones iniciales diferentes.

Como las 4 condiciones iniciales son tales que $\text{Proy}_{R(S)}Ax(0) = [5\ 0\ 0]^T$ (ver Tabla 1), el Corolario 3.10 nos indica que las 4 soluciones deben coincidir para $k = 1, \cdots, N$. Esto se confirma numéricamente: La Figura 1 muestra que las 4 soluciones difieren apenas en la condición inicial. Finalmente, para cada caso, se calculó el vector $\text{Proy}_{R(S)^\perp}Ax(0)$ así como $\sum_{k=0}^{N-1} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$ (ver Tabla 1). Los resultados confirman lo establecido en el Teorema 3.8: esta suma debe ser igual a la norma al cuadrado del vector proyección. Cabe resaltar que el caso 1 corresponde a una condición inicial consistente y por tanto, la solución es clásica.

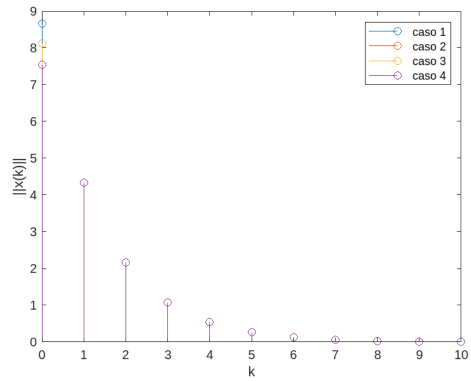

Figura 1: Soluciones basadas en minimización calculadas para 4 condiciones iniciales diferentes.

Referencias

[1] A. A. Belov, O. G. Andrianova, and A. P. Kurdyukov. *Control of discrete-time descriptor systems an anisotropy-based approach*, Springer International Publishing, 2018.

[2] S. L. Campbell. *Singular systems of differential equations*, San Francisco Pitman, 1980.

[3] S. L. Campbell, C. D. Meyer, and N. J. Rose. Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **31** no. 3 (1976) 411–425.

[4] L. Dai, *Lecture notes in control and information sciences*, Springer, 1989.

[5] G. Duan. *Analysis and design of descriptor linear systems*, **23**. Dordrecht Springer, 2010.

[6] B. Dziurla and R. W. Newcomb. *The drazin inverse and semistate equations*, Proceedings of the 4th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 1979.

[7] F. R. Gantmacher. *The theory of matrices*, Chelsea, 1974.

[8] G. H. Golub and V. L. Charles F. *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2013. xiv+756 pp.

[9] J. C. Guerrero, *Análisis de estabilidad de sistemas lineales singulares con saltos markovianos con probabilidades de transición parcialmente conocidas*, Tesis de Maestría,, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2021.

[10] J. Y. Ishihara and M. H. Terra, On the Lyapunov theorem for singular systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**, no. 11 (2002) 1926–1930.

[11] J. Y. Ishihara and M. H. Terra *A new Lyapunov equation for discrete-time descriptor systems*, Proceedings of American Control Conference, vol. 6, 2003.

[12] L. Kronecker. Algebraische reduction der schaaren bilinearer formen, *Sitzungsber. Akad. Wiss Berlin* (1890), 1225–1237.

[13] D. G. Luemberger and A. Arbel, Singular dynamic Leontief systems, *Econometrica* **45** no. 4 (1977) 991–995.

[14] D. G. Luenberger. Time-invariant descriptor systems *Automatica* **14**, no. 5 (1978) 473–480.

[15] D. G. Luenberger. Dynamic equations in descriptor form, I*EEE Transactions on Automatic Control* **22**, no. 3 (1977) 312–321.

[16] R. W. Newcomb. The semistate description of nonlinear time-variable circuits. *IEEE Transactions on Automatic Control* **28** no. 1 (1981) 62–71.

[17] R. W. Newcomb and B. Dziurla, Some circuits and systems applications of semistate theory *Circuits, Systems, and Signal Process* **8** no. 3 (1989) 235–260.

[18] G. Strang. *Linear algebra and its applications*, 3 ed., Brooks/Cole, 1988.

[19] Lloyd N. Trefethen and David Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM, 1997.

[20] K. Weierstrass *Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen* Monatsber. Akad. Wiss. Berlin (1868), 310–338.

[21] E. L. Yip and R. F. Sincovec, Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **26** (1981), no. 3, 702–707.

Abstract

This article introduces a new concept of solution of a linear singular system (descriptor system), based on minimization. It is shown that, by imposing a hypothesis on the matrices of the descriptor system, the minimization-based solution exists and is unique for any initial condition. In particular, if the initial condition is consistent, then the minimization-based solution is equal to the classical solution. Also in this work, a numerical example is given in order to analyze the minimization-based solutions for different initial conditions.

Keywords: linear singular system, singular value decomposition, minimization methods

Presentado: agosto del 2023.
Aceptado: octubre del 2023.

Juan Casavilca,
Pontificia Universidad Católica del Perú,
Av. Universitaria 1801,
San Miguel, 15088, Perú.
Email: casavilca.je@pucp.edu.pe

Pro Mathematica, **32**, *64 (2023), 31-74, ISSN 1012-3938*

CATEGORÍA DE UNA APLICACIÓN Y ANÁLISIS NO LINEAL

Cesar A. Ipanaque Zapata[1]

diciembre, 2023

(*Presentado por R. Chavez*)

Resumen

Un problema clásico en análisis es resolver ecuaciones no lineales de la forma $F(x) = 0$, donde $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua del disco unitario cerrado $D^n \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Una técnica topológica, que existe en la literatura, para la existencia de soluciones de ecuaciones no lineales es la teoría del grado topológico. En este trabajo, usaremos la teoría de categoría de una aplicación para resolver el problema de existencia de soluciones de ecuaciones no lineales. Esta teoría, como mostraremos en este trabajo, da una técnica topológica alternativa para estudiar ecuaciones no lineales.

MSC(2020): 65H20, 55M30; 55P10, 58B05, 55Q05.

Keywords: *Ecuaciones no lineales, Existencia de soluciones, Homotopia, Categoría de una aplicación, Categoría LS, Categoría seccional*

1. *IME, Universidade de São Paulo, Brazil*

1. Introducción

Un problema clásico en análisis es resolver ecuaciones no lineales de la forma

$$F(x) = 0,$$

donde $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua del disco unitario cerrado $D^n \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Note que, si existe $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ tal que $F(x) = 0$, tenemos inmediatamente que tal ecuación admite solución. Así que, en adelante vamos a suponer que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ y consideraremos $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ como la aplicación restricción. Una técnica topológica, que existe en la literatura, para la existencia de ecuaciones no lineales es la teoría del grado topológico. En este trabajo, usaremos la teoría de categoría de una aplicación para resolver el problema de existencia de soluciones de ecuaciones no lineales. Esta teoría, como mostraremos en este trabajo, da una técnica alternativa para estudiar ecuaciones no lineales.

En el Capítulo 2 daremos una revisión de Homotopía. En la Sección 2.1 presentamos la definición y propiedades básicas de la relación de homotopía entre aplicaciones. La relación de homotopía es una relación de equivalencia (Proposición 2.3). Proposición 2.6 establece que la relación de homotopía se mantiene con respecto a la operación de composición. En la Sección 2.2 recordamos la definición y propiedades básicas de nulo homotopía y contráctibilidad. La Proposición 2.10 dice que la composición de dos aplicaciones es nulo homotópica siempre que una de las aplicaciones sea nulo homotópica. El caso particular cuando la identidad es nulo homotópica origina el concepto de contractibilidad (Definición 2.11). Proposición 2.14 muestra que toda aplicación cuyo dominio o codominio sea contráctil es nulo homotópica. Además, la Proposición 2.15 dice que toda aplicación continua con codominio contráctil es homotópica a una aplicación constante deseada. En particular, cualesquier dos aplicaciones con el mismo codominio contráctil son homotópicas (ver Corolario 2.16). La Proposición 2.17 afirma que toda aplicación continua con dominio contráctil y contradominio conexo por caminos es homotópica a una aplicación constante deseada. Como consecuencia, cualesquier dos aplicaciones con el mismo dominio contráctil y el mismo codominio conexo por caminos son homotópicas (Corolario 2.18). En la Sección 2.3 presentamos el concepto y propiedades básicas de retracto y retracto por deformación. Proposición 2.27 dice que todo retracto de un espacio contráctil es contráctil. En particular, tenemos que la esfera unitaria S^{n-1} no es un retracto del disco unitario D^n (Proposición 2.29). Como consecuencia, se establece el famoso teorema del punto fijo de Brouwer (Proposición 2.30). Proposición 2.35 presenta una caracterización de retractos en términos de extensión de aplicaciones. Presentamos también el concepto de equivalencia homotópica (Definición 2.36).

En el Capítulo 3 daremos una revisión de categoría de una aplicación. En la Sección 3.1 presentamos la definición y propiedades básicas de la categoría de una aplicación. Una propiedad es que la categoría de una aplicación es un invariante homotópico (Proposición 3.3). La Proposición 3.5 muestra el comportamiento de la categoría con respecto a la composición. Además, Proposición 3.10 dice que si componemos a una aplicación con una equivalencia homotópica su categoría no se altera. Se cumple que la categoría de una aplicación se puede realizar como la categoría de una fibración (ver Proposición 3.14). En la Sección 3.2 recordamos la definición y propiedades básicas de categoría LS. La categoría LS da una cota superior para la categoría de una aplicación (Proposición 3.19). En particular, se cumple que la categoría de una aplicación con dominio o codominio una esfera es a lo máximo 2 (Corolario 3.21). La Proposición 3.22 da una caracteización de cuando una aplicación continua, con dominio o codominio una esfera, no es nulo homotópica. El comportamiento de la categoría LS para los retractos está dada en la Proposición 3.23. En particular se muestra que la categoría LS es un invariante homotópico (Corolario 3.24). Además, se tiene que la categoría LS de un espacio siempre le gana a la categoría LS de sus retractos (Corolario 3.26). La Proposición 3.28 muestra la categoría de una equivalencia homotópica.

En la Definición 3.30 recordamos la noción de categoría seccional. Una conexión entre categoría, categoría seccional y categoría LS está dada en el Teorema 3.31. La Proposición 3.32 muestra una igualdad entre la categoría de una aplicación, con categoría seccional uno, y la categoría LS de su codomoinio. En particular, se tiene que la categoría de la proyección sobre la primera coordenada definida sobre el espacio de configuraciones ordenado con dos puntos coincide con la categoría del espacio, siempre que tal espacio admita una aplicación continua sin punto fijo (Proposición 3.33).

En el Capítulo 4 usaremos la teoría de categoría de una aplicación para estudiar la existencia de soluciones de ecuaciones no lineales. En la Sección 4.1 se presenta el problema clásico de análisis no lineal, en particular de la existencia de soluciones, el cual pretendemos resolver usando la teoría de categoría de una aplicación. Una conexión entre la existencia de soluciones de una ecuación no lineal y la categoría de una aplicación está dada en el Teorema 4.5. En particular, el Corolario 4.6 presenta una condición en términos de categoría para la existencia de soluciones de una ecuación no lineal. Proposición 4.7 dice que podemos considerar cualquier disco cerrado de cualquier radio y centrado en cualquier punto. Una condición en términos de categoría seccional para la existencia de soluciones está dada en la Proposición 4.11. En la Sección 4.2 presentamos una serie de ejemplos del uso de categoría en la existencia de soluciones de ecuaciones no lineales.

Adicionalmente, en cada capítulo se proponen problemas que pueden ser consideramos como proyectos de investigación a futuro.

2. Preliminares

En la Sección 2.1 presentamos la relación de homotopía entre aplicaciones. En la Sección 2.2 recordamos la definición y propiedades básicas de nulo homotopía y contráctibilidad. En la Sección 2.3 presentamos el concepto y propiedades básicas de retracto y retracto por deformación.

2.1. Homotopía

Presentamos la definición y las propiedades básicas de la relación de homotopía entre aplicaciones. La relación de homotopía es una relación de equivalencia (Proposición 2.3). La Proposición 2.6 establece que la relación de homotopía se mantiene con respecto a la operación de composición.

Note que, toda aplicación de la forma $H : X \times Z \to Y$ define una familia de aplicaciones $\{H_z : X \to Y\}_{z \in Z}$, donde cada $H_z : X \to Y$ está dada por $H_z(x) = H(x, z)$, para todo $x \in X$. Definiremos el concepto de homotopía el cuál será esencial en este trabajo.

Definición 2.1 (Homotopía)**.** Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas.

1. Una *homotopía* de f en g es una aplicación continua de la forma $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

2. Diremos que f es *homotópica* a g, denotado por $f \simeq g$, cuando existe una homotopía de f en g.

Ejemplo 2.2.

(1) Sean X un espacio topológico y $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas. Tenemos que $f \simeq g$. De hecho, consideremos la aplicación $H : X \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$, para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Note que, H es continua (ya que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico). Además, $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$, y $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

(2) Sean $f, g : [0, 1] \to S^1$ aplicaciones continuas dadas por $f(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \forall s \in [0, 1]$, y $g(s) = (1, 0), \forall s \in [0, 1]$. Tenemos que $f \simeq g$. De hecho, consideremos la aplicación $H : [0, 1] \times [0, 1] \to S^1$ dada por $H(s, t) = f((1 - t)s), \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Note que, H está bien definida (ya que $(1 - t)s \in [0, 1]$), es continua (ya que es composición de aplicaciones continuas) y $H(s, 0) = f(s), \forall s \in [0, 1]$, $H(s, 1) = f(0) = (1, 0), \forall s \in [0, 1]$.

Veamos que "$\simeq$" es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathrm{Map}(X,Y)$ de todas las aplicaciones continuas de X en Y.

Proposición 2.3. *La relación "$\simeq$" es una relación de equivalencia en el conjunto* $\mathrm{Map}(X,Y)$*, o sea, cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para* $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$*:* $f \simeq f$ *(Reflexiva).*
2. *Para* $f, g \in \mathrm{Map}(X,Y)$*: Si* $f \simeq g$*, entonces* $g \simeq f$ *(Simétrica).*
3. *Para* $f, g, h \in \mathrm{Map}(X,Y)$*: Si* $f \simeq g$ *y* $g \simeq h$*, entonces* $f \simeq h$ *(Transitiva).*

Demostración.

1. Sea $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$. Definamos $H : X \times [0,1] \to Y$ por $H(x,t) = f(x)$ para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$. Note que, H es una homotopía de f en f. Así, $f \simeq f$.
2. Sean $f, g \in \mathrm{Map}(X,Y)$ tal que $f \simeq g$. Sea $H : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía de f en g. Definamos $\overleftarrow{H} : X \times [0,1] \to Y$ por $\overleftarrow{H}(x,t) = H(x, 1-t)$ para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$. Note que $\overleftarrow{H}$ es una homotopía de g en f. Así, $g \simeq f$.
3. Sean $f, g, h \in \mathrm{Map}(X,Y)$ tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$. Sean $F : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía de f en g y $G : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía de g en h. Definamos $H : X \times [0,1] \to Y$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ G(x, 2t-1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que, H es una homotopía de f en h. Así, $f \simeq h$.

$\square$

Por la Proposición 2.3 podemos considerar el conjunto cociente

$$\mathrm{Map}(X,Y)/\simeq = \{[f] : \ f \in \mathrm{Map}(X,Y)\},$$

donde cada clase de equivalencia $[f] = \{g \in \mathrm{Map}(X,Y) : g \simeq f\}$ es llamada *clase de homotopía* de f. Así, el conjunto cociente $\mathrm{Map}(X,Y)/\simeq$ es llamado *conjunto de clases de homotopía* de X en Y.

Ejemplo 2.4.

(1) Sean $f, g : [0,1] \to S^1$ aplicaciones continuas dadas por $f(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \forall s \in [0,1]$, y $g(s) = -f(s), \forall s \in [0,1]$. Tenemos que $f \simeq g$. De hecho, por el Ítem (2) del Ejemplo 2.2 tenemos que $f \simeq \overline{(1,0)}$ y $g \simeq \overline{(-1,0)}$. Veamos ahora que $\overline{(1,0)} \simeq \overline{(-1,0)}$. Consideremos los caminos $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to S^1$ dados por

$$\gamma_1(s) = \frac{(1-s)(1,0) + s(0,1)}{\|(1-s)(1,0) + s(0,1)\|},$$
$$\gamma_2(s) = \frac{(1-s)(0,1) + s(-1,0)}{\|(1-s)(0,1) + s(-1,0)\|}.$$

El camino $\gamma : [0,1] \to S^1$ dado por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s), & si\ 0 \leq s \leq 1/2; \\ \gamma_2(2s-1), & si\ 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

cumple que $\gamma(0) = (1,0)$ y $\gamma(1) = (-1,0)$. Luego la aplicación $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ dada por $H(s,t) = \gamma(t), \forall (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ es una homotopía de $\overline{(1,0)}$ en $\overline{(-1,0)}$. Así, por la Proposición 2.3 podemos concluir que $f \simeq g$.

(2) Sean $f, g : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aplicaciones continuas tales que para cada $x \in X$ existe $\lambda > 0$ con $g(x) = \lambda f(x)$. Tenemos que $f \simeq g$. De hecho, consideremos la aplicación $H : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x), \forall (x,t) \in X \times [0,1]$. Veamos que H está bien definida, o sea, $H(x,t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para todo

$(x,t) \in X \times [0,1]$. Supongamos que $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$ para algún $(x,t) \in X \times [0,1]$. Note que $0 < t < 1$. Para tal $x \in X$, consideremos $\lambda > 0$ con $g(x) = \lambda f(x)$. Luego,

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + t\lambda f(x) &= (0,0), \\ (1-t)f(x) &= -t\lambda f(x), \\ (1-t)\|f(x)\| &= t\lambda \|f(x)\|, \\ 1-t &= t\lambda. \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando en la igualdad $(1-t)f(x) + t\lambda f(x) = 0$, obtenemos que $2(1-t)f(x) = 0$. Como $f(x) \neq 0$ entonces $t = 1$, lo cual es una contradicción. Así, H está bien definida. Luego, podemos concluir que H es una homotopía de f en g.

Ejemplo 2.5.

(1) *Sean $f, g : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ aplicaciones continuas dadas por $f(x,y) = (x,y), \forall (x,y) \in S^1$, y $g(x,y) = (x,y) + (3,3), \forall (x,y) \in S^1$. Note que, f no es homotópica a g, ya que si $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es una homotopía de f en g entonces existen $(x_0, t_0) \in S^1 \times [0,1]$ tal que $H(x_0, t_0) = (0,0)$, lo cual es una contradicción.*

(2) *Sean $f, g : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ aplicaciones continuas dadas por $f(x,y) = (x,y,0), \forall (x,y) \in S^1$, y $g(x,y) = (x,y,0) + (3,3,0), \forall (x,y) \in S^1$. Veamos que, $f \simeq g$. La aplicación $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $H((x,y),t) = (x,y,t)$, es una homotopía de f en h, donde $h(x,y) = (x,y,1)$. Además, la aplicación $G : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $G((x,y),t) = (1-t)(x,y,1) + tg(x,y)$, es una homotopía de h en g. Así, por la transitividad de la relación de homotopía (ver Proposición 2.3), obtenemos que $f \simeq g$.*

Ahora, veamos que la relación de homotopía se mantiene con respecto a la operación de composición.

Proposición 2.6. *Sean $f, g : X \to Y$ y $f', g' : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Si $f \simeq g$ y $f' \simeq g'$ entonces $(f' \circ f) \simeq (g' \circ g)$.*

Demostración. Sean $H : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía de f en g y $G : Y \times [0,1] \to Z$ una homotopía de f' en g'. Definamos $F : X \times [0,1] \to Z$ por

$$F(x,t) = G(H(x,t),t), \forall (x,t) \in X \times [0,1].$$

Note que, F es una homotopía de $f' \circ f$ en $g' \circ g$. Así, $(f' \circ f) \simeq (g' \circ g)$. $\square$

Corolario 2.7. *Sean $f, g : X \to Y$, $h' : W \to X$ y $h : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Si $f \simeq g$ entonces $f \circ h' \simeq g \circ h'$ y $h \circ f \simeq h \circ g$.*

2.2. Nulo homotopía y espacio contráctil

En esta sección recordamos la definición y propiedades básicas de nulo homotopía y contráctibilidad. La Proposición 2.10 dice que la composición de dos aplicaciones es nulo homotópica siempre que una de las aplicaciones sea nulo homotópica. El caso particular cuando la identidad es nulo homotópica origina el concepto de contractibilidad (Definición 2.11). Proposición 2.14 muestra que toda aplicación cuyo dominio o codominio sea contráctil es nulo homotópica. Además, la Proposición 2.15 dice que toda aplicación continua con codominio contráctil es homotópica a una aplicación constante deseada. En particular, cualesquier dos aplicaciones con el mismo codominio contráctil son homotópicas (ver Corolario 2.16). La Proposición 2.17 afirma que toda aplicación continua con dominio contráctil y contradominio conexo por caminos es homotópica a una aplicación constante deseada. Como consecuencia, cualesquier dos aplicaciones con el mismo dominio contráctil y el mismo codominio conexo por caminos son homotópicas (Corolario 2.18).

Definición 2.8 (Nulo homotopía)**.** Una aplicación continua $f : X \to Y$ es llamada *nulo homotópica* cuando existe una constante $y_0 \in Y$ y una homotopía de f en la aplicación constante $\overline{y_0} : X \to Y,\ x \mapsto y_0$. O sea, existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = \overline{y_0}$ (para algún $y_0 \in Y$). Tal H es llamada *nulo homotopía*.

Ejemplo 2.9. *Toda aplicación constante es nulo homotópica.*

El siguiente resultado muestra que la composición de dos aplicaciones es nulo homotópica siempre que una de las aplicaciones sea nulo homotópica.

Proposición 2.10. *Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Si f o g es nulo homotópica entonces la composición $g \circ f$ es nulo homotópica.*

Demostración. Supongamos que $f \simeq \overline{y_0}$ (para algún $y_0 \in Y$). Por el Corolario 2.7, $g \circ f \simeq g \circ \overline{y_0}$. Pero, $g \circ \overline{y_0} = \overline{z_0}$, donde $z_0 = g(y_0)$. Así, $g \circ f$ es nulo homotópica.

Ahora, supongamos que $g \simeq \overline{z_0}$ (para algún $z_0 \in Z$), aquí la aplicación constante $\overline{z_0}$ es de Y en Z. Nuevamente por el Corolario 2.7, $g \circ f \simeq \overline{z_0} \circ f$. Pero, $\overline{z_0} \circ f$ es la aplicación constante $\overline{z_0}$ de X en Z. Así, $g \circ f$ es nulo homotópica. □

Para un conjunto X, denotemos por $1_X : X \to X$, $x \mapsto x$, a la aplicación identidad. El caso particular cuando la identidad es nulo homotópica origina el concepto de contractibilidad.

Definición 2.11 (Contráctil)**.**

1. Un espacio topológico X es llamado *contráctil* cuando la aplicación identidad $1_X : X \to X$ es nulo homotópica. O sea, existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to X$ tal que $H_0 = 1_X$ y $H_1 = \overline{x_0}$ (para algún $x_0 \in X$).

2. Sea $A \subset X$. Diremos que A es *contráctil en* X cuando la aplicación inclusión $U \hookrightarrow X$ es nulo homotópica. O sea, existe una aplicación continua $H : U \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = x$ para todo $x \in U$ y $H(x,1) = x_0$ para todo $x \in X$ (para algún $x_0 \in X$).

Note que X es contráctil si y solamente si X es contráctil en sí mismo. Además, para $A \subset X$, si A es contráctil entonces A es contráctil en X. La vuelta no es verdad.

Ejemplo 2.12.

(1) *El espacio euclidiano* $\mathbb{R}^d$ *es contráctil. De hecho, la aplicación* $H : \mathbb{R}^d \times [0,1] \to \mathbb{R}^d,\ (x,t) \mapsto H(x,t) = (1-t)x$, *es una homotopía de la identidad* $1_{\mathbb{R}^d}$ *en la aplicación constante* $\overline{0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ x \mapsto 0$.

(2) *La esfera* $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in S^{n+1} : x_{n+2} = 0\}$ *es contráctil en* S^{n+1}. *De hecho, la aplicación* $H : S^n \times [0,1] \to S^{n+1},\ (x,t) \mapsto H(x,t) = \dfrac{(1-t)x + tp_N}{\|(1-t)x + tp_N\|}$, *donde* $p_N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^{n+1}$ *es el polo norte, es una homotopía de la inclusión* $S^n \hookrightarrow S^{n+1}$ *en la aplicación constante* $\overline{p_N} : S^n \to S^{n+1},\ x \mapsto p_N$.

El *cono* para un espacio topológico X es dado por el espacio cociente

$$\mathrm{C}(X) = \frac{X \times [0,1]}{X \times \{0\}}.$$

Ejemplo 2.13. *El cono* $C(X)$ *es contráctil. De hecho, podemos considerar la nulo homotopía* $H : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ *dada por*

$$H([x,s],t) = [x,(1-t)s].$$

Note que, si X es contráctil entonces X es conexo por caminos, o sea, para cualesquier $x, y \in X$ existe un camino continuo $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. De hecho, sea $H : X \times [0,1] \to X$ una aplicación continua tal que $H_0 = 1_X$ y $H_1 = \overline{x_0}$ (para algún $x_0 \in X$). Considere $\gamma : [0,1] \to X$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ H(y, 2-2t), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que, γ es el camino deseado.

Ahora, veamos que toda aplicación cuyo dominio o codominio sea contráctil es nulo homotópica.

Proposición 2.14. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si X o Y es contráctil entonces f es nulo homotópica.*

Demostración. Supongamos que X es contractil, o sea, la aplicación identidad $1_X : X \to X$ es nulo homotópica. Note que $f = f \circ 1_X$. Por otro lado, la Proposición 2.10 implica que $f \circ 1_X$ es nulo homotópica y así f es nulo homotópica.

Ahora, supongamos que Y es nulo homotópica, o sea, la aplicación identidad $1_Y : Y \to Y$ es nulo homotópica. Note que, $f = 1_Y \circ f$. Nuevamente la Proposición 2.10 implica que $1_Y \circ f$ es nulo homotópica y así f es nulo homotópica. □

Además, tenemos que toda aplicación continua con codominio contráctil es homotópica a una aplicación constante deseada.

Proposición 2.15. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua con Y contráctil y $y_0 \in Y$. Entonces $f \simeq \overline{y_0}$.*

Demostración. Sea $H : Y \times [0,1] \to Y$ una aplicación continua con $H_0 = 1_Y$ y $H_1 = \overline{y_1}$ (para algún $y_1 \in Y$). Considere la aplicación $G : X \times [0,1] \to Y$ dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} H(f(x), 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ H(y_0, 2-2t), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que G es una homotopía de f en $\overline{y_0}$. □

Proposición 2.15 implica la siguiente afirmación.

Corolario 2.16. *Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas con Y contráctil. Entonces $f \simeq g$.*

También, la siguiente afirmación muestra que toda aplicación continua con dominio contráctil y contradominio conexo por caminos es homotópica a una aplicación constante deseada.

Proposición 2.17. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua con X contráctil, Y conexo por caminos y $y_0 \in Y$. Entonces $f \simeq \overline{y_0}$.*

Demostración. Sea $H : X \times [0,1] \to X$ una aplicación continua con $H_0 = 1_X$ y $H_1 = \overline{x_1}$ (para algún $x_1 \in X$). Sea $y_1 = f(x_1)$ y considere un camino continuo $\gamma : [0,1] \to Y$ tal que $\gamma(0) = y_1$ y $\gamma(1) = y_0$. Considere la aplicación $G : X \times [0,1] \to Y$ dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} f(H(x,2t)), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ \gamma(2t-1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que G es una homotopía de f en $\overline{y_0}$. $\square$

Proposición 2.17 implica la siguiente afirmación.

Corolario 2.18. *Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas con X contráctil e Y conexo por caminos. Entonces $f \simeq g$.*

Consideremos el espacio infinito-dimensional $\mathbb{R}^\infty$ dado por

$$\mathbb{R}^\infty = \Big\{(x_j) : \ x_j \in \mathbb{R} \text{ y existe } n \geq 1 \text{ tal que } x_j = 0 \text{ para todo } j \geq n\Big\}$$

y $\mathbb{R}^n = \{(x_j) \in \mathbb{R}^\infty : \ x_j = 0 \text{ para todo } j > n\}$. La topología de $\mathbb{R}^\infty$ es tal que $A \subset \mathbb{R}^\infty$ es cerrado (equivalentemente, abierto) si, y solamente si, $A \cap \mathbb{R}^n$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente, abierto), para todo $n \geq 1$. Considere la siguiente aplicación $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ para todo $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$.

La esfera infinito-dimensional S^∞ es el subespacio de $\mathbb{R}^\infty$ dada por

$$S^\infty = \{(x_j) \in \mathbb{R}^\infty : \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots = 1\}.$$

Note que tal suma $x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ es finita.

Ahora, de [4, pg.111], recordemos el concepto de espacio de configuraciones ordenado. Para X espacio topológico y $k \geq 1$, el *k-th espacio de configuraciones ordenado* de X es el subespacio del producto cartesiano $X^k = X \times \cdots \times X$ dado por:

$$\mathrm{Conf}(X,k) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k : \ x_i \neq x_j \text{ para todo } 1 \leq i \neq j \leq k\}.$$

Por convención $\mathrm{Conf}(X,1)=X$.

El siguiente resultado muestra que el espacio de configuraciones $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,k)$ es contráctil, para cada $k\in\{1,2\}$.

Proposición 2.19. *Para $k\in\{1,2\}$, podemos construir explícitamente una nulo homotopía para Conf$(\mathbb{R}^\infty,k)$. En particular, tenemos que Conf$(\mathbb{R}^\infty,k)$ es contráctil.*

Demostración. El caso $k=1$ sigue de [5, Example 1B.3, pg. 88].

Para $k=2$, considere la aplicación $H:\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)\times[0,1]\to\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)$ dada por

$$H_t\left((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)\right)=\\ \big(((1-t)x_1,(1-t)x_2+tx_1,\ldots),((1-t)y_1,(1-t)y_2+ty_1,\ldots)\big).$$

Veamos que H está bien definida. Supongamos que

$$((1-t)x_1,(1-t)x_2+tx_1,\ldots)=((1-t)y_1,(1-t)y_2+ty_1,\ldots).$$

Como $t\neq 1$, sigue que $x_1=y_1$ y así $x_2=y_2$, $x_3=y_3,\ldots$, lo cual es una contradicción, ya que $((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots))\in\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)$. Así H es una homotopía entre la identidad $1_{\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)}$ y la aplicación $H_1=T\times T$, recuerde que $T(x_1,x_2,\ldots)=(0,x_1,x_2,\ldots)$.

Considere la aplicación $G:\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)\times[0,1]\to\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)$ dada por

$$G_t\left((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)\right)=\\ ((t,(1-t)x_1,(1-t)x_2,\ldots),(0,(1-t)y_1+t,(1-t)y_2,\ldots)).$$

Veamos que G está bien definida. Supongamos que $(t,(1-t)x_1,(1-t)x_2,\ldots)=(0,(1-t)y_1+t,(1-t)y_2,\ldots)$. Luego, $t=0$ y así $x_1=y_1,x_2=y_2,\ldots$, lo cual es una contradicción, ya que $((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots))\in\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)$. Así, G es una homotopía de $T\times T$ en la aplicación constante $\overline{((1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots))}$.

Por la demostración del Ítem 3 de la Proposición 2.3, tenemos que $F : \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty, 2) \times [0, 1] \to \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty, 2)$ dada por

$$F_t\left((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\right) =$$

$$= \begin{cases} H_{2t}\left((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\right), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ G_{2t-1}\left((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\right), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

es una nulo homotopía de $1_{\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty,2)}$ en $\overline{((1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots))}$. □

Por la Proposición 2.19 formulamos el siguiente problema.

Problema 2.20.

(1) Para $k \geq 3$, construya explícitamente una nulo homotopía para $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^\infty, k)$.

(2) Para cada $k \geq 1$, construya explícitamente una nulo homotopía para $\mathrm{Conf}(S^\infty, k)$. Para el caso $k = 1$, i.e., $\mathrm{Conf}(S^\infty, 1) = S^\infty$, ver [5, Example 1B.3, pg. 88] o [1, Theorem 11.1.3, pg. 332].

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos del espacio X.

1. Se dice que $\mathcal{A}$ es *localmente finita* en X si para cada $x \in X$ existe un abierto U de X tal que el conjunto

$$\{A \in \mathcal{A} : \ U \cap A \neq \varnothing\}$$

   es finito, ver [7, pg. 278].

2. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es un *refinamiento* de $\mathcal{A}$ (o que *refina* a $\mathcal{A}$) si para cada elemento $B \in \mathcal{B}$ existe un elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos, llamamos a $\mathcal{B}$ un *refinamiento abierto* de $\mathcal{A}$; si son conjuntos cerrados, llamamos a $\mathcal{B}$ un *refinamiento cerrado*, ver [7, pg. 280].

3. Se dice que $\mathcal{A}$ tiene *orden* $m + 1$ si algún punto de X pertenece a $m + 1$ elementos de $\mathcal{A}$, y no existe ningún punto en X que pertenezca a más de $m + 1$ elementos de $\mathcal{A}$, ver [7, pg. 347].

Sea X un espacio topológico.

1. Se dice que X es *paracompacto* si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{B}$ que recubre X, ver [7, pg. 288].

2. Se dice que X es de *dimensión finita* si existe algún entero m tal que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X existe un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X que refina a $\mathcal{A}$ y que tiene orden $m+1$ como máximo. La *dimensión topológica (o de cobertura)* de X, denotada por $\dim(X)$, se define como el menor valor m que satisface lo anterior, ver [7, pg. 348].

Observación 2.21. De [10, Theorem 2.1, pg. 29] tenemos que el espacio de configuraciones $\mathrm{Conf}(M,k)$ nunca es contráctil para ningún $k \geq 2$, donde M es una variedad topológica conexa de dimensión finita. Además, es planteada la siguiente conjetura.

Conjetura 2.22. Si X es un espacio paracompacto y conexo por caminos con dimensión de cobertura $1 \leq \dim(X) < \infty$. Entonces los espacios de configuraciones $\mathrm{Conf}(X,k)$ nunca son contráctiles, para $k \geq 2$.

Adicionalmente, planteamos el siguiente problema.

Problema 2.23. Sean B un espacio de Banach de dimensión infinita y $k \geq 1$. ¿El espacio de configuraciones $\mathrm{Conf}(B,k)$ es contráctil?

El caso $k=1$, i.e., $\mathrm{Conf}(B,1)=B$, es inmediato, ya que B es un espacio vectorial topológico.

2.3. Retracto y retracto por deformación

En esta sección presentamos el concepto y propiedades básicas de retracto y retracto por deformación. Proposición 2.27 dice que todo retracto de un espacio contráctil es contráctil. En particular, tenemos que la esfera unitaria S^{n-1} no es un retracto del disco unitario D^n (Proposición 2.29). Como consecuencia, se establece el famoso teorema del punto fijo de Brouwer (Proposición 2.30). Proposición 2.35 presenta una caracterización de retractos en términos de extensión de aplicaciones. Presentamos también el concepto de equivalencia homotópica (Definición 2.36).

Definición 2.24. Sea $A \subset X$.

1. Diremos que A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r \circ inlc_A = 1_A$, donde $incl_A : A \hookrightarrow X$ es la aplicación inclusión, o sea, $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Tal aplicación r es llamada una *retracción* de X en A. Además, se dice que X *se retrae* en A.

2. Diremos que A es un *retracto por deformación* de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r \circ inlc_A = 1_A$ y $incl_A \circ r \simeq 1_X$. Tal aplicación r es llamada una *retracción por deformación* de X en A. Además, se dice que X *se retrae por deformación* en A.

Ejemplo 2.25.

(1) Todo espacio topológico se retrae en cada uno de sus puntos.

(2) Todo espacio topológico contráctil se retrae por deformación en cada uno de sus puntos. Más generalmente, note que si X es contráctil y A es un retracto de X entonces A es un retracto por deformación de X.

(3) $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ se retrae por deformación en la esfera S^m mediante la retracción $r : \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to S^m$, $r(x) = \dfrac{x}{\| x \|}$.

(4) $\mathbb{R}^{m+1} - \{-1, 1\}$ se retrae por deformación en el wedge de esferas $S^m \vee S^m$.

El *cilindro* para un espacio topológico X es dado por el producto cartesiano

$$\mathrm{Cil}(X) = X \times [0, 1].$$

Ejemplo 2.26. $X \times \{0\}$ *es un retracto por deformación del cilindro* $Cil(X)$*. La retracción por deformación es dada por* $r : Cil(X) \to X \times \{0\}$*,* $r(x, s) = (x, 0)$*, para cada* $(x, s) \in Cil(X)$*. La homotopía entre* $i \circ r$ *y la identidad* $1_{Cil(X)}$ *es dada por* $H : Cil(X) \times [0, 1] \to Cil(X)$*,* $H(x, s, t) = (x, ts)$*.*

Un resultado conocido es que la esfera unitaria S^{n-1} no es un retracto del disco unitario $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Más generalmente, tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 2.27. *Sea* X *un espacio contráctil y* $A \subset X$*. Si* A *es un retracto de* X *entonces* A *es contráctil.*

Demostración. Sean $r : X \to A$ una retracción. Note que $1_A = r \circ incl_A$, donde $incl_A : A \hookrightarrow X$. Como X es contráctil entonces la inclusión es nulo homotópica (r también es nulo homotópica), ver Proposición 2.14. Así la identidad 1_A es nulo homotópica (ver Proposición 2.10) y A es contráctil. $\square$

Corolario 2.28. *Sea* X *un espacio contráctil y* $A \subset X$*. Si* A *no es contráctil entonces* A *no es un retracto de* X*.*

Como D^n es contráctil y S^{n-1} no es contráctil, Corolario 2.28 implica la siguiente afirmación.

Proposición 2.29. *La esfera unitaria* S^{n-1} *no es un retracto del disco unitario* D^n*.*

Proposición 2.29 implica el famoso teorema del punto fijo de Brouwer. Se dice que una aplicación continua $f : X \to X$ tiene *punto fijo* cuando existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Caso contrario, diremos que $f : X \to X$ *no tiene punto fijo.*

Proposición 2.30 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Si* $f : D^n \to D^n$ *es una aplicación continua entonces* f *tiene punto fijo.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in X$. Sea $r : D^n \to S^{n-1}$ dada por $r(x)$ =punto de intersección del rayo $\overrightarrow{f(x)x}$ con la esfera S^{n-1}, donde $\overrightarrow{f(x)x}$ es el rayo saliendo de $f(x)$ y pasando por x. Note que r es continua y $r(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Así, r es una retracción de D^n en S^{n-1}, lo cual es una contradicción con la Proposición 2.29. $\square$

El siguiente ejemplo muestra una aplicación continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ sin punto fijo, para cada $n \geq 1$.

Ejemplo 2.31. *Para $n \geq 1$, la traslación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = x + a$, con $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, no tiene punto fijo.*

El siguiente ejemplo muestra una aplicación continua de $(-1, 1)$ en $(-1, 1)$ sin punto fijo.

Ejemplo 2.32. *La aplicación continua $f : (-1, 1) \to (-1, 1),\ f(s) = \dfrac{s}{2} + \dfrac{1}{2}$, no tiene punto fijo.*

En general, se puede verificar que para cada $n \geq 1$, existe una aplicación continua $f : B^n \to B^n$ sin punto fijo, donde $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n :\ ||x|| < 1\}$ es la bola abierta de $\mathbb{R}^n$.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Una *sección* de f es una inversa a derecha de f, o sea, una aplicación $s : Y \to X$ tal que $f \circ s = 1_Y$. Más generalmente, dado un subespacio $A \subset Y$, una *sección local* de f sobre A es una aplicación $s : A \to X$ tal que $f \circ s = incl_A$.

Sean X, Y espacios topológicos. El conjunto

$$\mathrm{Map}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid\ f \text{ es continua}\}$$

de las aplicaciones continuas es dotado de la *topología compacto-abierta* que tiene como subbase los conjuntos de la forma $U^K = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) :\ f(K) \subset U\}$, donde $K \subset X$ es compacto y U es un conjunto abierto en Y (ver [1, Definition 1.2.1, pg. 2]).

Observación 2.33. Para un espacio topológico X.

(1) Existe $\varphi : X \to \mathrm{Conf}(X, 2)$ una sección continua de la proyección $\pi : \mathrm{Conf}(X, 2) \to X$, $\pi(x, y) = x$, si, y solamente si, existe una aplicación continua $f : X \to X$ sin punto fijo.

(2) De [11, Proposition 4.2, pg. 571] se tiene que, si existe $s : \mathrm{Conf}(X, 2) \times X \to \mathrm{Map}([0, 1], \mathrm{Conf}(X, 2))$ una sección continua de la aplicación $e_\pi : \mathrm{Map}([0, 1], \mathrm{Conf}(X, 2)) \to \mathrm{Conf}(X, 2) \times X$, $e_\pi(\gamma) = (\gamma(0), \pi(\gamma(1)))$, entonces X es contráctil y existe una aplicación continua $f : X \to X$ sin punto fijo. Además, si la proyección $\pi : \mathrm{Conf}(X, 2) \to X$, $\pi(x, y) = x$ es una fibración, se tiene que el regreso también vale (ver [11, Corollary 4.8, pg. 574]).

Debido al Ítem (2) de la Observación 2.33 planteamos el siguiente problema.

Problema 2.34. Sea X un espacio contráctil tal que existe una aplicación continua $f : X \to X$ sin punto fijo. ¿Existe $s : \mathrm{Conf}(X, 2) \times X \to \mathrm{Map}([0, 1], \mathrm{Conf}(X, 2))$ sección continua de la aplicación $e_\pi : \mathrm{Map}([0, 1], \mathrm{Conf}(X, 2)) \to \mathrm{Conf}(X, 2) \times X$, $e_\pi(\gamma) = (\gamma(0), \pi(\gamma(1)))$?

Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $g : A \to Y$ una aplicación continua. Una *extensión* de g sobre X es una aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$. De [6, Proposition 7.1, pg. 10] tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.35. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. A es un retracto de X si, y solamente si, para cualquier espacio topológico Y, cada aplicación continua $g : A \to Y$ tiene una extensión sobre X.*

Demostración. Veamos la ida. Sea $r : X \to A$ una retracción. Tenemos que $g \circ r : X \to Y$ es una extensión de g sobre X, ya que, para $a \in A$, tenemos $(g \circ r)(a) = g(r(a)) = g(a)$. Ahora, veamos el regreso. Para $g = 1_A$, por hipótesis tenemos que, existe $r : X \to A$ extensión de 1_A sobre X. Note que, r es una retracción. $\square$

Definición 2.36 (Equivalencia homotópica)**.** Sean X, Y espacios topológicos.

1. Se dice que X *domina* a Y si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq 1_Y$.

2. Una aplicación continua $f : X \to Y$ es llamada una *equivalencia homotópica* si existe una aplicación continua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Tal g es llamada *inversa homotópica* de f.

3. Se dice que X es *equivalente homotópico* a Y, denotado por $X \simeq Y$, cuando existe una equivalencia homotópica $f : X \to Y$.

Note que la relación "$\simeq$" es una relación de equivalencia. Así, cuando $X \simeq Y$ diremos que X e Y tienen el *mismo tipo de homotopía*.

Ejemplo 2.37.

1. *Todo espacio topológico domina a sus retractos.*

2. *Si A es un retracto por deformación de X entonces A y X tienen el mismo tipo de homotopía, i.e., $A \simeq X$.*

Ejemplo 2.38. *Sea X un espacio topológico.*

1. *X es contráctil si, y solamente si, $X \simeq \{*\}$.*

2. *$C(X) \simeq \{*\}$.*

3. *$Cil(X) \simeq X$.*

3. Categoría de una aplicación

En este capítulo daremos una revisión de categoría de una aplicación. En la Sección 3.1 presentamos la definición y propiedades básicas de la categoría de una aplicación. En la Sección 3.2 recordamos la definición y propiedades básicas de categoría LS.

3.1. Definiciones básicas

En esta sección presentamos la definición y propiedades básicas de la categoría de una aplicación. Una propiedad es que la categoría de una aplicación es un invariante homotópico (Proposición 3.3). La Proposición 3.5 muestra el comportamiento de la categoría con respecto a la composición. Además, Proposición 3.10 dice que si componemos a una aplicación con una equivalencia homotópica su categoría no se altera. Se cumple que la categoría de una aplicación se puede realizar como la categoría de una fibración (ver Proposición 3.14).

De [2, Definition 1.1, pg. 265] tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. La *categoría* de f, denotada por $\mathrm{cat}(f)$, es el menor entero positivo n tal que existen $U_1, \ldots, U_n$ abiertos de X tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ y cada aplicación restricción $f_{|U_i} : U_i \to Y$ es nulo homotópica. En caso que no exista tal entero n, escribiremos $\mathrm{cat}(f) = \infty$.

Note que $\mathrm{cat}(f) = 1$ si y solamente si f es nulo homotópica.

Ejemplo 3.2.

(1) La categoría de cualquier aplicación constante $\overline{y_0} : X \to Y$, $\overline{y_0}(x) = y_0$, *es igual a* 1.

(2) Sea $f : X \to Y$ *una aplicación continua. Si* X *o* Y *es contráctil, entonces, por la Proposición 2.14, tenemos que* $\mathrm{cat}(f) = 1$.

Tenemos que la categoría $\mathrm{cat}(-)$ es un invariante homotópico.

Proposición 3.3. *Sean* $f, g : X \to Y$ *aplicaciones continuas. Si* $f \simeq g$ *entonces* $\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(g)$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{cat}(f) \leq \mathrm{cat}(g)$. Supongamos que $\mathrm{cat}(g) = n$ y consideremos $U_1, \ldots, U_n$ abiertos de X tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ y cada aplicación restricción $g_{|U_i} : U_i \to Y$ es nulo homotópica.

Note que $g_{|U_i} = g \circ incl_{U_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, donde $incl_{U_i} : U_i \hookrightarrow X$ es la aplicación inclusión. Luego,

$$\begin{aligned} f_{|U_i} &= f \circ incl_{U_i} \\ &\simeq g \circ incl_{U_i} && \text{(sigue del Corolario 2.7)} \\ &= g_{|U_i}, \end{aligned}$$

así $f_{|U_i}$ es nulo homotópica, ya que $g_{|U_i}$ es nulo homotópica. Luego, $\mathrm{cat}(f) \leq n = \mathrm{cat}(g)$. Análogamente, se tiene que $\mathrm{cat}(g) \leq \mathrm{cat}(f)$. Por lo tanto, $\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(g)$. □

El regreso de la Proposición 3.3 no vale. Así, es natural plantear el siguiente problema.

Problema 3.4. Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas. ¿Existen condiciones para f, g tales que el regreso de la Proposición 3.3 sea verdad, o sea, si $\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(g)$ implica que $f \simeq g$?

Ahora veamos el comportamiento de $\mathrm{cat}(-)$ con respecto a la composición.

Proposición 3.5. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Tenemos*

$$\mathrm{cat}(g \circ f) \leq \mathrm{mín}\{\mathrm{cat}(f), \mathrm{cat}(g)\}.$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{cat}(g \circ f) \leq \mathrm{cat}(f)$. Supongamos que $\mathrm{cat}(f) = n$ y consideremos $U_1, \ldots, U_n$ abiertos de X tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ y cada aplicación restricción $f_{|U_i} : U_i \to Y$ es nulo homotópica. Note que

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{|U_i} &= (g \circ f) \circ incl_{U_i} \\ &= g \circ (f \circ incl_{U_i}) \\ &= g \circ f_{|U_i}, \end{aligned}$$

luego, aplicando la Proposición 2.10, obtenemos que $(g \circ f)_{|U_i}$ es nulo homotópica, ya que $f_{|U_i}$ es nulo homotópica. Así, $\mathrm{cat}(g \circ f) \leq n = \mathrm{cat}(f)$.

Ahora, veamos que $\mathrm{cat}(g\circ f)\leq \mathrm{cat}(g)$. Supongamos que $\mathrm{cat}(g)=n$ y consideremos $V_1,\ldots,V_n$ abiertos de Y tales que $Y=V_1\cup\cdots\cup V_n$ y cada aplicación restricción $g_{|V_i}:V_i\to Z$ es nulo homotópica. Para cada $i=1,\ldots,n$, considere $U_i=f^{-1}(V_i)$. Note que, cada V_i es abierto de X y $X=U_1\cup\cdots\cup U_n$. Además,

$$\begin{aligned}(g\circ f)_{|U_i}&=(g\circ f)\circ incl_{U_i}\\&=g\circ(f\circ incl_{U_i})\\&=g\circ\left(incl_{V_i}\circ f_|\right)\\&=(g\circ incl_{V_i})\circ f_|\\&=g_{|V_i}\circ f_|,\end{aligned}$$

donde $f_|:U_i\to V_i$ está dada por $f_|(x)=f(x)$ para todo $x\in U_i$. Luego, nuevamente aplicando la Proposición 2.10, obtenemos que $(g\circ f)_{|U_i}$ es nulo homotópica, ya que $g_{|V_i}$ es nulo homotópica. Así, $\mathrm{cat}(g\circ f)\leq n=\mathrm{cat}(g)$.

Por lo tanto, $\mathrm{cat}(g\circ f)\leq \mathrm{mín}\{\mathrm{cat}(f),\mathrm{cat}(g)\}$. $\square$

Por la demostración de la Proposición 3.5 obtenemos que la Proposición 2.10 implica la Proposición 3.5. La vuelta también vale.

El siguiente ejemplo muestra que la desigualdad en la Proposición 3.5 puede ser estricta.

Ejemplo 3.6. *Considere el wedge $S^n\vee S^n=S^n\times\{1\}\cup\{1\}\times S^n$ junto con las aplicaciones $g:S^n\vee S^n\to S^n\vee S^n$ y $f:S^n\vee S^n\to S^n\vee S^n$ dadas por*

$$f(x,y)=\begin{cases}(1,1), & si\ y=1;\\(1,y), & si\ x=1.\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}(x,1), & si\ y=1;\\(1,1), & si\ x=1.\end{cases}$$

Note que f y g no son nulo homotópicas. Por otro lado $f\circ g=\overline{(1,1)}$. Así, $\mathrm{cat}(f\circ g)=1$ y $\mathrm{mín}\{\mathrm{cat}(f),\mathrm{cat}(g)\}\geq 2$.

Además, la Proposición 3.5 implica una secuencia de números naturales limitada y decreciente $(\text{cat}(f^n))_{n\geq 1}$, donde f^n es la n-th iterada, $f^n = f \circ \cdots \circ f$, de una autoaplicación $f : X \to X$.

Corolario 3.7. *Sea $f : X \to X$ una aplicación continua. Para cualquier $n \geq 1$, tenemos*

$$1 \leq \cdots \leq \text{cat}(f^{n+1}) \leq \text{cat}(f^n) \leq \cdots \leq \text{cat}(f^2) \leq \text{cat}(f).$$

No conocemos un ejemplo de una autoaplicación $f : X \to X$ tal que $\text{cat}(f \circ f) < \text{cat}(f)$. Del Corolario 3.7 tenemos que existe $n_0 \geq 1$ tal que $\text{cat}(f^n) = \text{cat}(f^{n_0})$, para todo $n \geq n_0$. Luego, podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea $f : X \to X$ una aplicación continua. Denotemos por

$$\text{cat}_f = \text{mín}\{n_0 : \ \text{cat}(f^n) = \text{cat}(f^{n_0}), \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$
$$\text{cat}(f^\infty) = \text{cat}(f^{\text{cat}_f}).$$

cat_f y $\text{cat}(f^\infty)$ son nuevos invariantes numéricos que no han sido estudiados. Así, presentamos el siguiente problema.

Problema 3.9. Sea $f : X \to X$ una aplicación continua. Estudiar cat_f y $\text{cat}(f^\infty)$.

Ahora veamos que, si componemos a una aplicación con una equivalencia homotópica su categoría no se altera.

Proposición 3.10. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas.*

(1) Si existe $h : Y \to X$ continua tal que $f \circ h \simeq 1_Y$ entonces $\text{cat}(g \circ f) = \text{cat}(g)$.

(2) Si existe $g' : Z \to Y$ continua tal que $g' \circ g \simeq 1_Y$ entonces $\text{cat}(g \circ f) = \text{cat}(f)$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cat}(g \circ f) = k$ y considere $W_1, \ldots, W_k$ abiertos de X tales que $X = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ y cada restricción $(g \circ f)_{|W_j} : W_j \to Z$ es nulo homotópica.

(1) Para cada $j = 1, \ldots, k$, consideremos $U_j = h^{-1}(W_j)$. Note que cada U_j es abierto de Y y $Y = U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Además, para cada $j = 1, \ldots, k$, tenemos:

$$\begin{aligned} g_{|U_j} &= g \circ incl_{U_j} \\ &= (g \circ 1_Y) \circ incl_{U_j} \\ &\simeq (g \circ (f \circ h)) \circ incl_{U_j} \qquad \text{(del Corolario 2.7, } f \circ h \simeq 1_Y) \\ &= ((g \circ f) \circ h) \circ incl_{U_j} \\ &= (g \circ f) \circ (h \circ incl_{U_j}) \\ &= (g \circ f) \circ (incl_{W_j} \circ h_|) \\ &= \big((g \circ f) \circ incl_{W_j}\big) \circ h_| \\ &= (g \circ f)_{|W_j} \circ h_|, \end{aligned}$$

donde $h_| : U_j \to W_j$ está dada por $h_|(x) = h(x)$, para todo $x \in U_j$. Así, por la Proposición 2.10, sigue que $g_{|U_j}$ es nulo homotópica, ya que $(g \circ f)_{|W_j}$ es nulo homotópica. Luego, $\mathrm{cat}(g) \leq k = \mathrm{cat}(g \circ f)$. Además, por la Proposición 3.5, obtenemos que $\mathrm{cat}(g \circ f) = \mathrm{cat}(g)$.

(2) Para cada $j = 1, \ldots, k$, tenemos:

$$\begin{aligned} f_{|W_j} &= f \circ incl_{W_j} \\ &= (1_Y \circ f) \circ incl_{W_j} \\ &\simeq ((g' \circ g) \circ f) \circ incl_{W_j} \qquad \text{(del Corolario 2.7, } g' \circ g \simeq 1_Y) \\ &= (g' \circ (g \circ f)) \circ incl_{W_j} \\ &= g' \circ \big((g \circ f) \circ incl_{W_j}\big) \\ &= g' \circ (g \circ f)_{|W_j}. \end{aligned}$$

Así, nuevamente por la Proposición 2.10, sigue que $f_{|W_j}$ es nulo homotópica, ya que $(g \circ f)_{|W_j}$ es nulo homotópica. Luego, $\mathrm{cat}(f) \leq$

$k = \mathrm{cat}(g \circ f)$. Además, nuevamente por la Proposición 3.5, obtenemos que $\mathrm{cat}(g \circ f) = \mathrm{cat}(f)$.

$\square$

Proposición 3.10 implica directamente el siguiente resultado.

Corolario 3.11. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua.*

(1) Si $r : Z \to X$ es una retracción de Z en X entonces $\mathrm{cat}(f \circ r) = \mathrm{cat}(f)$.

(2) Si Y es un retracto de W entonces $\mathrm{cat}(incl_Y \circ f) = \mathrm{cat}(f)$*, donde $incl_Y : Y \hookrightarrow W$ es la inclusión.*

Ejemplo 3.12. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua.*

(1) Del Ejemplo 2.26 tenemos que X es un retracto por deformación del cilindro $Cil(X)$ cuya retracción por deformación está dada por $r : Cil(X) \to X$, $r(x, s) = x$, para cada $(x, s) \in Cil(X)$. Sea $F : Cil(X) \to Y$, $F(x, s) = f(x)$ y note que $F = f \circ r$. Así, por el Corolario 3.11 obtenemos que $\mathrm{cat}(F) = \mathrm{cat}(f)$*. Note también que $f = F \circ incl_X$, donde $incl_X : X \hookrightarrow Cil(X)$, $incl_X(x) = (x, 0)$, es la inclusión.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cil}(X) \arrow[d, bend right, "r"'] \arrow[dr, "F"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

(2) Nuevamente, por el Ejemplo 2.26 tenemos que Y es un retracto por deformación del cilindro $Cil(Y)$. Así, por la Proposición 3.10 obtenemos que $\mathrm{cat}(incl_Y \circ f) = \mathrm{cat}(f)$*, ya que la inclusión $incl_Y : Y \hookrightarrow Cil(Y)$, $incl_Y(y) = (y, 0)$, es una equivalencia homotópica.*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Cil}(Y) \\ X \arrow[ur, "incl_Y \circ f"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, hook, "incl_Y"'] \end{tikzcd}$$

De [5, p. 407] recordemos la siguiente construcción y definición.

Definición 3.13. Para una aplicación continua $f : X \to Y$, considere el espacio

$$E_f = \{(x,\gamma) \in X \times \mathrm{Map}([0,1],Y) \mid \ \gamma(0) = f(x)\},$$

donde $\mathrm{Map}([0,1],Y)$ es el espacio de todos los caminos $[0,1] \to Y$. La aplicación

$$\rho_f : E_f \to Y,\ (x,\gamma) \mapsto \rho_f(x,\gamma) = \gamma(1)$$

es una fibración.

Además, la proyección sobre la primera coordenada $\pi : E_f \to X,\ (x,\gamma) \mapsto x$ es una equivalencia homotópica con inversa homotópica $c : X \to E_f$ dada por $x \mapsto (x, \gamma_{f(x)})$, donde $\gamma_{f(x)}$ es el camino constante en $f(x)$. Así, tenemos una factorización

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \left(X \xrightarrow{c} E_f \xrightarrow{\rho_f} Y\right),$$

la cual es una composición de una equivalencia homotópica seguida por una fibración. Además, note que la proyección $\pi : E_f \to X,\ (x,\gamma) \mapsto x$ es una retracción por deformación de E_f en X. Luego, aplicando la Proposición 3.10 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.14. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Tenemos que*

$$\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(\rho_f).$$

De [5, p. 348], una *aplicación celular* $f : X \to Y$, entre complejos CW, es una aplicación continua tal que $f(X^q) \subset Y^q$, para todo $q \geq 0$. Aquí X^q denota el q-esqueleto de X, o sea, el conjunto de todas la células de dimensión menor o igual que q.

Observación 3.15. Sean X, Y complejos CW y $f : X \to Y$ una aplicación continua. De [5, Theorem 4.8, p. 349], Teorema de aproximación celular, tenemos que existe una aplicación celular $g : X \to Y$ tal que $g \simeq f$.

Ejemplo 3.16. *Sea* $f : S^n \to S^m$ *una aplicación continua, con* $n < m$*. Veamos que* $\mathrm{cat}(f) = 1$*. Consideremos sobre* S^n *su estructura celular estándar, o sea, una única célula de dimensión* 0 *y una única célula de dimensión* n*. Así,* $(S^n)^q = \{*\}$*, para cada* $q < n$*, y* $(S^n)^n = S^n$*. Por el Teorema de aproximación celular (ver Observación 3.15), existe una aplicación celular* $g : S^n \to S^m$ *tal que* $g \simeq f$*. Note que* $g(S^n) \subset \{*\}$*. Así,* g *es una aplicación constante. Luego,* f *es nulo homotópica.*

3.2. Categoría de Lusternik-Schnirelmann

En esta sección recordamos la definición (Definición 3.17) y propiedades básicas de categoría LS. La categoría LS da una cota superior para la categoría de una aplicación (Proposición 3.19). En particular, se cumple que la categoría de una aplicación con dominio o codominio una esfera es a lo máximo 2 (Corolario 3.21). La Proposición 3.22 da una caracteización de cuando una aplicación continua, con dominio o codominio una esfera, no es nulo homotópica. El comportamiento de la categoría LS para los retractos está dada en la Proposición 3.23. En particular se muestra que la categoría LS es un invariante homotópico (Corolario 3.24). Además, se tiene que la categoría LS de un espacio siempre le gana a la categoría LS de sus retractos (Corolario 3.26). La Proposición 3.28 muestra la categoría de una equivalencia homotópica. En la Definición 3.30 recordamos la noción de categoría seccional. Una conexión entre categoría, categoría seccional y categoría LS está dada en el Teorema 3.31. La Proposición 3.32 muestra una igualdad entre la categoría de una aplicación, con categoría seccional uno, y la categoría LS de su codomoinio. En particular, se tiene que la categoría de la proyección sobre la primera coordenada definida sobre el espacio de configuraciones ordenado con dos puntos coincide con la categoría del espacio, siempre que tal espacio admita una aplicación continua sin punto fijo (Proposición 3.33).

De [3, Definition 1.1, pg. 1] recordemos la noción de categoría de Lusternik-Schnirelmann o simplemente categoría LS de un espacio topológico.

Definición 3.17 (Categoría LS)**.** Sea X un espacio topológico. La *categoría LS* de X, denotado por $\text{cat}(X)$, es el menor entero positivo k tal que existen $U_1, \ldots, U_k$ abiertos de X tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ y cada inclusión $U_j \hookrightarrow X$ es nulo homotópica. En el caso que no exista tal entero k escribiremos $\text{cat}(X) = \infty$.

Note que $\text{cat}(1_X) = \text{cat}(X)$ para cualquier espacio topológico X. Además, $\text{cat}(X) = 1$ si y solamente si X es contráctil.

Ejemplo 3.18.

(1) $\text{cat}(\mathbb{R}^n) = 1$ *para cualquier* $n \geq 0$.

(2) $\text{cat}(S^m) = 2$ *para todo* $m \geq 0$. *De hecho, como* S^m *no es contráctil, tenemos que* $\text{cat}(S^m) \geq 2$. *Por otro lado, considere* $U_1 = S^m \setminus \{p_N\}$ *y* $U_2 = S^m \setminus \{p_S\}$, *donde* p_N *y* p_S *son el polo norte y sur, respectivamente. Claramente, cada* U_i *es abierto de* S^m *y* $S^m = U_1 \cup U_2$. *Además, cada* U_i *es contráctil, ya que es homeomorfo a* $\mathbb{R}^m$, *usando la proyección estereográfica. En particular, cada* U_i *es contráctil en* S^m. *Así,* $\text{cat}(S^m) \leq 2$.

Proposición 3.5 implica la siguiente afirmación.

Proposición 3.19. *Sea* $f : X \to Y$ *una aplicación continua. Tenemos que*

$$cat(f) \leq \text{mín}\{\text{cat}(X), \text{cat}(Y)\}.$$

Demostración. Note que $f = f \circ 1_X$ y $f = 1_Y \circ f$. Luego, por la Proposición 3.5, tenemos que $\text{cat}(f) \leq \text{cat}(X)$ y $\text{cat}(f) \leq \text{cat}(Y)$. □

Ejemplo 3.20. *Sea* X *un espacio topológico y* $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x, x)$, *la aplicación diagonal. Tenemos que* $\text{cat}(\Delta) = \text{cat}(X)$. *De hecho, por Proposición 3.19, tenemos que* $\text{cat}(\Delta) \leq \text{cat}(X)$. *Por otro lado, note que* $1_X = p_1 \circ \Delta$, *donde* $p_1 : X \times X \to X$, $p_1(x_1, x_2) = x_1$, *es la proyección en la primera coordenada. Luego, por la Proposición 3.5, sigue que* $\text{cat}(X) = \text{cat}(1_X) \leq \text{cat}(\Delta)$.

Ahora veamos que la categoría de una aplicación con dominio o codominio una esfera es a lo máximo 2.

Corolario 3.21. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si X o Y es una esfera entonces*

$$cat(f) \in \{1, 2\}.$$

Demostración. Del Ítem (2) del Ejemplo 3.18 tenemos que $\mathrm{cat}(X) = 2$ o $\mathrm{cat}(Y) = 2$. Luego, por la Proposición 3.19, sigue que $\mathrm{cat}(f) \leq 2$. □

Así, podemos dar una caracterización de cuando una aplicación continua, con dominio o contradominio una esfera, no es nulo homotópica.

Proposición 3.22. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua con X o Y una esfera. Tenemos que $cat(f) = 2$ si, y solamente si, f no es nulo homotópica.*

Demostración. Por la definición de categoría, note que, si $\mathrm{cat}(f) = 2$ entonces f no es nulo homotópica. Ahora, si f no es nulo homotópica entonces, nuevamente por la definición de categoría, sigue que $\mathrm{cat}(f) \geq 2$. Luego, por el Corolario 3.21, concluimos que $\mathrm{cat}(f) = 2$. □

Ahora, veamos el comportamiento de la categoría LS para los retractos. Para ello, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.23. *Sean X, Y espacios topológicos. Si X domina a Y, entonces*

$$cat(Y) \leq cat(X).$$

Equivalentemente, si $cat(Y) > cat(X)$ entonces X no domina a Y.

Demostración. Sean $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ aplicaciones continuas tales que $f \circ g \simeq 1_Y$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{cat}(Y) &= \mathrm{cat}(1_Y) \\
&= \mathrm{cat}(f \circ g) && \text{(sigue de la Proposición 3.3)} \\
&\leq \text{mín}\{\mathrm{cat}(f), \mathrm{cat}(g)\} && \text{(sigue de la Proposición 3.5)} \\
&\leq \mathrm{cat}(X) && \text{(sigue de la Proposición 3.19)}
\end{aligned}$$

□

En particular, obtenemos que la categoria LS es un invariante homotópico.

Corolario 3.24. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $X \simeq Y$ entonces* $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$.

La vuelta del Corolario 3.24 no es válida. Luego, es natural formular el siguiente problema.

Problema 3.25. Sean X, Y espacios topológicos. Existen condiciones para X e Y tales que la vuelta del Corolario 3.24 sea válida, o sea, si $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$ implique que $X \simeq Y$?

Además, tenemos que la categoría LS de un espacio siempre le gana a la categoría LS de sus retractos.

Corolario 3.26. *Si A es un retracto de X entonces* $\mathrm{cat}(A) \leq \mathrm{cat}(X)$.

Ejemplo 3.27. *Como $cat(D^n) = 1$ y $cat(S^{n-1}) = 2$, por el Corolario 3.26, podemos concluir que la esfera S^{n-1} no es un retracto del disco D^n.*

Como una aplicación directa de la Proposición 3.3 junto con la Proposición 3.10, tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 3.28. *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica con inversa homotópica $g : Y \to X$. Entonces,* $\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(g) = \mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$.

Demostración. Por la Proposición 3.3, tenemos que $\mathrm{cat}(1_X) = \mathrm{cat}(g \circ f)$ y $\mathrm{cat}(1_Y) = \mathrm{cat}(f \circ g)$. Por la Proposición 3.10, sigue que $\mathrm{cat}(g \circ f) = \mathrm{cat}(f)$ (ya que g es una equivalencia homotópica) y $\mathrm{cat}(g \circ f) = \mathrm{cat}(g)$ (ya que f es una equivalencia homotópica). Análogamente, nuevamente por la Proposición 3.10, sigue que $\mathrm{cat}(f \circ g) = \mathrm{cat}(f)$ (ya que g es una equivalencia homotópica). Por lo tanto, $\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(g) = \mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$. □

El siguiente ejemplo muestra que $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}\left(\mathrm{Map}([0,1], X)\right)$.

Ejemplo 3.29. *Sea X un espacio topológico. Considere las aplicaciones $\psi : X \to \mathrm{Map}([0,1], X)$, $\psi(x) = \overline{x}$, donde $\overline{x}$ es el camino constante en x, y la aplicación $\varphi : \mathrm{Map}([0,1], X) \to X$, $\varphi(\alpha) = \alpha(0)$. Note que, $\varphi \circ \psi = 1_X$ y $\psi \circ \varphi \simeq 1_{\mathrm{Map}([0,1],X)}$ (de hecho, podemos considerar la homotopía $H : \mathrm{Map}([0,1], X) \times [0,1] \to \mathrm{Map}([0,1], X)$, $H(\alpha, t)(s) = \alpha(ts)$). Así, ψ es una equivalencia homotópica con inversa homotópica φ. Luego, aplicando la Proposición 3.28, obtenemos que* $\mathrm{cat}(\varphi) = \mathrm{cat}(\psi) = \mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}\,(\mathrm{Map}([0,1], X))$.

De [2, Definition 2.1, p. 268] recordemos la noción de categoría seccional o género de una aplicación. Inicialmente este invariante numérico fue estudiado por Schwarz en [9] para fibraciones.

Definición 3.30. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. La *categoría seccional* de f, denotada por $\mathrm{secat}(f)$, es el menor entero positivo k tal que existen $U_1, \ldots, U_k$ abiertos de Y tales que $Y = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ y para cada U_j existe una aplicación continua $s_j : U_j \to X$ con $f \circ s_j \simeq incl_{U_j}$, donde $incl_{U_j} : U_j \hookrightarrow Y$ es la aplicación inclusión.

Note que $\mathrm{secat}(f) = 1$ si, y solamente si, existe una aplicación continua $s : Y \to X$ tal que $f \circ s \simeq 1_Y$. Además, secat es un invariante homotópico, o sea, si $f \simeq g$ entonces $\mathrm{secat}(f) = \mathrm{secat}(g)$ (ver [2, p. 268]). Adicionalmente, si Y es conexo por caminos, entonces $\mathrm{secat}(f) \leq \mathrm{cat}(Y)$ (ver [2, p. 268]).

El siguiente resultado muestra que la categoría de una aplicación junto con su categoría seccional superan a la categoría de su contradominio.

Teorema 3.31. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Tenemos*

$$\mathrm{cat}(f) \cdot \mathrm{secat}(f) \geq \mathrm{cat}(Y).$$

Demostración. Sean $\mathrm{cat}(f) = n$ y $\mathrm{secat}(f) = m$. Consideremos $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ con cada U_j abierto de X tal que cada restricción $f_{|U_j} : U_j \to Y$ es nulo homotópica. También, consideremos $Y = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ con cada V_i abierto de Y tal que existe una aplicación continua $s_i : V_i \to X$

con $f \circ s_i \simeq incl_{V_i}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, defina $V_{j,i} = s_i^{-1}(U_j)$. Note que cada $V_{j,i}$ es abierto de Y y $Y = \bigcup_{j=1,i=1}^{n,m} V_{j,i}$. Además,

$$\begin{aligned}
incl_{V_{j,i}} &= incl_{V_i} \circ incl_{V_{j,i}}^{V} && (incl_{V_{j,i}}^{V_i} : V_{j,i} \hookrightarrow V_i)\\
&\simeq (f \circ s_i) \circ incl_{V_{j,i}}^{V_i}\\
&= f \circ (s_i \circ incl_{V_{j,i}}^{V_i})\\
&= f \circ (incl_{U_j} \circ (s_i)_|) && ((s_i)_| : V_{j,i} \to U_j,\ (s_i)_|(x) = (s_i)(x))\\
&= (f \circ incl_{U_j}) \circ (s_i)_|\\
&= f_{|U_j} \circ (s_i)_|.
\end{aligned}$$

Así, cada $incl_{V_{j,i}}$ es nulo homotópica, ya que $f_{|U_j}$ es nulo homotópica. Luego, $\mathrm{cat}(Y) \leq nm = \mathrm{cat}(f) \cdot \mathrm{secat}(f)$. $\square$

Teorema 3.31 junto la Proposición 3.19 implican la siguiente afirmación.

Proposición 3.32. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si* $\mathrm{secat}(f) = 1$ *entonces* $\mathrm{cat}(f) = \mathrm{cat}(Y)$.

Note que, la vuelta de la Proposición 3.32 no vale.

Recordemos que

$$\mathrm{Conf}(X, 2) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : \ x_1 \neq x_2\}$$

denota el espacio de configuraciones ordenado de dos puntos en X. Consideremos $\pi^X : \mathrm{Conf}(X, 2) \to X,\ \pi^X(x_1, x_2) = x_1$, la proyección en la primera coordenada. Note que $\mathrm{cat}(\pi^X) = 1$ para todo X espacio topológico contráctil.

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.33. *Si π^X admite una sección continua entonces* $\mathrm{cat}(\pi^X) = \mathrm{cat}(X)$.

Demostración. Aplicar la Proposición 3.32. $\square$

Ejemplo 3.34.

(1) La aplicación $s : S^n \to \mathrm{Conf}(S^n, 2)$, $s(x) = (x, -x)$, *es una sección continua de* $\pi^{S^n} : \mathrm{Conf}(S^n, 2) \to S^n$. *Luego, por la Proposición 3.33, tenemos que* $\mathrm{cat}\left(\pi^{S^n}\right) = 2$, *ya que* $\mathrm{cat}(S^n) = 2$.

(2) Sea G *un grupo topológico con por lo menos dos elementos. Tenemos que* $\mathrm{cat}(\pi^G) = \mathrm{cat}(G)$. *De hecho, como* G *tiene al menos dos elementos, podemos tomar un elemento* $h \in G \setminus \{e\}$, *donde* e *es el elemento neutro del grupo* G. *Luego, la aplicación* $s : G \to \mathrm{Conf}(G, 2)$, $s(g) = (g, gh)$, *es una sección continua de* π^G. *Nuevamente, por la Proposición 3.33, tenemos que* $\mathrm{cat}(\pi^G) = \mathrm{cat}(G)$.

No conocemos un ejemplo de espacio topológico X tal que $\mathrm{cat}(\pi^X) < \mathrm{cat}(X)$. Así, planteamos el siguiente problema.

Problema 3.35. Sea X un espacio topológico. ¿Es verdad que $\mathrm{cat}(\pi^X) = \mathrm{cat}(X)$?

En particular, planteamos el siguiente problema.

Problema 3.36. ¿Es verdad que $\mathrm{cat}(\pi^{\mathbb{R}P^{2n}}) = \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^{2n})$?

Más generalmente, planteamos el siguiente problema.

Problema 3.37. Sea X un espacio topológico. Calcular $\mathrm{cat}(\pi^X_{k,r})$, donde $\pi^X_{k,r} : \mathrm{Conf}(X, k) \to \mathrm{Conf}(X, r)$, $\pi^X_{k,r}(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_r)$, es la proyección en las r primeras coordenadas ($r \leq k$). Además, $\mathrm{Conf}(X, k) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k : \; x_i \neq x_j \text{ para todo } i \neq j\}$ denota el *espacio de configuraciones ordenado* de k puntos en X.

Ver [11] para algunos resultados parciales de $\mathrm{secat}(\pi^X_{k,r})$.

4. Aplicaciones en análisis no lineal

En este capítulo usaremos la teoría de categoría de una aplicación para estudiar la existencia de soluciones de ecuaciones no lineales. En la Sección 4.1 presentamos una conexión entre la existencia de soluciones de una ecuación no lineal y homotopía. En la Sección 4.2 presentamos una serie de ejemplos del uso de categoría en la existencia de soluciones de ecuaciones no lineales.

4.1. Ecuaciones no lineales

En esta sección se presenta el problema clásico de análisis no lineal, en particular de la existencia de soluciones, el cual pretendemos resolver usando la teoría de categoría de una aplicación. Una conexión entre la existencia de soluciones de una ecuación no lineal y la categoría de una aplicación está dada en el Teorema 4.5. En particular, el Corolario 4.6 presenta una condición en términos de categoría para la existencia de soluciones de una ecuación no lineal. Proposición 4.7 dice que podemos considerar cualquier disco cerrado de cualquier radio y centrado en cualquier punto. Una condición en términos de categoría seccional para la existencia de soluciones está dada en la Proposición 4.11.

Un problema clásico en análisis es resolver ecuaciones no lineales de la forma

$$F(x) = 0, \tag{4.1}$$

donde $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua del disco unitario cerrado $D^n \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Note que, si existe $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ tal que $F(x) = 0$, tenemos inmediatamente que la ecuación (4.1) admite solución. Así que, en adelante vamos a suponer que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ y consideraremos $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ como la aplicación restricción.

Definición 4.1. Sean $X \subset Z$ y $Y \subset W$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Diremos que una aplicación continua $\varphi : Z \to W$ es una *extensión* de f cuando $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 4.2. *Sea* $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación continua tal que* $F(x) \neq 0$*, para cualquier* $x \in S^{n-1}$ *y considere* $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ *la aplicación restricción. Tenemos que* F *es una extensión de* $F_|$*.*

En [8, Theorem 1.1.1, p. 1] se presentó la siguiente afirmación y su demostración fue dejada como ejercicio. Esta afirmación muestra una conexión entre la existencia de soluciones de ecuaciones y homotopía. En esta sección presentamos una demostración de esta afirmación. Sea $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}$ y considere $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción.

Teorema 4.3. *Cada extensión* $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^m$ *de* $F_|$ *admite un cero, o sea, existe* $x \in D^n$ *tal que* $\varphi(x) = 0$*, si y solamente si la restricción* $F_|$ *no es nulo homotópica.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por contradicción. Supongamos que $F_|$ es nulo homotópica y considere una nulo homotopía $H : S^{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ con $H_0 = F_|$ y $H_1 = \overline{c}$, para alguna constante $c \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Defina la aplicación $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^m$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c, & \text{si } 0 \leq \| x \| \leq 1/2; \\ H\left(\dfrac{x}{\| x \|}, 2 - 2 \| x \|\right), & \text{si } 1/2 \leq \| x \| \leq 1. \end{cases}$$

Note que φ es una extensión de $F_|$ y $\varphi(x) \neq 0$ for any $x \in D^n$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F_|$ no es nulo homotópica.

($\Leftarrow$) Por contradicción. Supongamos que existe una extensión $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^m$ de $F_|$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, para cualquier $x \in D^n$. Considere la homotopia $H : S^{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ dada por

$$H(x,t) = \varphi\left((1-t)x\right).$$

Note que H cumple que $H_0 = F_|$ y $H_1 = \overline{c}$, donde $c = \varphi(0) \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Luego, $F_|$ es nulo homotópica. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cada extensión $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^m$ de $F_|$ admite un cero. $\square$

Teorema 4.3 implica el siguiente resultado que muestra una condición homotópica para la existencia de solución de una ecuación.

Corolario 4.4. *Sea $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}$ y considere $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción. Si la restricción $F_|$ no es nulo homotópica entonces la ecuación $F(x) = 0$ admite solución.*

Demostración. Aplicando el Teorema 4.3 junto con el Ejemplo 4.2, obtenemos que existe $x \in D^n$ ($x \notin S^{n-1}$) tal que $F(x) = 0$. □

Usando la Proposición 3.22 podemos expresar el Teorema 4.3 en términos de categoría.

Teorema 4.5. *Sea $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}$ y considere $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción. Cada extensión $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^m$ de $F_|$ admite un cero, o sea, existe $x \in D^n$ tal que $\varphi(x) = 0$, si y solamente si $\mathrm{cat}(F_|) = 2$.*

En particular, el Corolario 4.4 en términos de categoría queda dado de la siguiente manera.

Corolario 4.6. *Sea $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}$ y considere $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción. Si $\mathrm{cat}(F_|) = 2$ entonces la ecuación $F(x) = 0$ admite solución.*

Corolario 4.6 implica el siguiente resultado. El cual dice que podemos considerar cualquier disco cerrado de cualquier radio y centrado en cualquier punto. Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, el *disco cerrado* en $\mathbb{R}^n$ de *radio* r y *centro* x_0 está dado por $D^n_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x - x_0|| \leq r\}$ y la *esfera* en $\mathbb{R}^n$ de *radio* r y *centro* x_0 está dada por $S^{n-1}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x - x_0|| = r\}$.

Proposición 4.7. *Sea $F : D^n_r(x_0) \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}_r(x_0)$ y considere $F_| : S^{n-1}_r(x_0) \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción. Si $\mathrm{cat}(F_|) = 2$ entonces la ecuación $F(x) = 0$ admite solución.*

Demostración. Considere el homeomorfismo $\varphi : D^n_r(x_0) \to D^n,\ \varphi(x) = \frac{1}{r}(x - x_0)$, cuya inversa es la aplicación $\psi : D^n \to D^n_r(x_0),\ \psi(y) = ry + x_0$. Note que $\varphi(x) \in S^{n-1}$, para todo $x \in S^{n-1}_r(x_0)$, y $\psi(y) \in S^{n-1}_r(x_0)$, para todo $y \in S^{n-1}$. Considere la aplicación $G : D^n \to \mathbb{R}^m,\ G(y) = F(\psi(y)) = F(ry + x_0)$. Como $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}_r(x_0)$, tenemos que $G(y) \neq 0$, para cualquier $y \in S^{n-1}$. Además,la aplicación restricción $G_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ cumple $G_| = F_| \circ \psi_{|S^{n-1}}$, donde $\psi_{|S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}_r(x_))$ es la aplicación restricción. Luego, por la Proposición 3.28, se tiene que $\mathrm{cat}(G_|) = \mathrm{cat}(F_|) = 2$. Así, por el Corolario 4.6 tenemos que la ecuación $G(y) = 0$ tiene solución, o sea, existe $y' \in D^n$ tal que $G(y') = 0$. Luego, el punto $x' = \psi(y') = ry' + x_0 \in D^n_r(x_0)$ es una solución de la ecuación $F(x) = 0$. $\square$

Note que, el regreso del Corolario 4.6 no vale.

La demostración del Teorema 4.3 (equivalentemente Teorema 4.5) fue realizada por contradicción. En particular, la existencia de solución no es constructiva. Así, un problema interesante es el siguiente:

Problema 4.8. Sea $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S^{n-1}$ y considere $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción. Suponga que $\mathrm{cat}(F_|) = 2$ y $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^m$ es una extensión de $F_|$. Encuentre un método para construir un cero de φ, o sea, para encontrar un $x \in D^n$ tal que $\varphi(x) = 0$.

La siguiente observación muestra una limitación del Corolario 4.6.

Observación 4.9. Para $n < m$, por el *Teorema de aproximación celular* (ver [5, Theorem 4.8, p. 349]), se tiene que cualquier aplicación continua $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ es nulo homotópica (ver [5, Corollary 4.9, p. 349]), o sea, su categoría $\mathrm{cat}(f) = 1$. En este caso el Corolario 4.6 no será posible usarlo.

Para subsanar la deficiencia del Corolario 4.6 presentada en la Observación 4.9 se puede reemplazar el conjunto unitario $\{0\}$ por cualquier subespacio no vacío $C \subset \mathbb{R}^m$.

Sean $C \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto no vacío y $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \notin C$, para cualquier $x \in S^{n-1}$ y considere $F_| : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - C$ la aplicación restricción. Suponga que $\text{cat}(F_|) = 2$. Se tiene que la ecuación $F(x) \in C$ admite solución, o sea, existe un $x_0 \in D^n$ tal que $F(x_0) \in C$.

Por otro lado, en el Corolario 4.6, si cambiamos el n-disco D^n por el disco infinito dimensional D^∞ de $\mathbb{R}^\infty$ y la $(n-1)$-esfera S^{n-1} por la esfera infinito-dimensional S^∞, se tiene que cualquier aplicación continua $f : S^\infty \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ es nulo homotópica, o sea, $\text{cat}(f) = 1$. Ya que, S^∞ es contráctil, ver [5, Example 1B.3, pg. 88] o [1, Theorem 11.1.3, pg. 332]. Así, una versión análoga del Corolario 4.6 en espacios de dimensión infinita no será posible usarlo. Un problema natural es extender el Corolario 4.6 para espacios de dimensión infinita, de manera análoga como es extendida la teoría del grado topológico para espacios de dimensión infinita (ver [8, Chapter 2]).

Problema 4.10. Extienda el Corolario 4.6 para espacios de dimensión infinita.

Usando la Proposición 3.32 junto con la Proposición 4.7 obtenemos una condición en términos de categoría seccional para la existencia de soluciones.

Proposición 4.11. *Sea $F : D_r^n(x_0) \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua tal que $F(x) \neq 0$, para cualquier $x \in S_r^{n-1}(x_0)$ y considere $F_| : S_r^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ la aplicación restricción. Si $\text{secat}(F_|) = 1$ entonces la ecuación $F(x) = 0$ admite solución.*

Demostración. Como $\text{secat}(F_|) = 1$, por la Proposición 3.32, tenemos que $\text{cat}(F_|) = \text{cat}(\mathbb{R}^m - \{0\}) = 2$. Así, aplicando la Proposición 4.7, sigue que la ecuación $F(x) = 0$ admite solución. □

4.2. Ejemplos

En esta sección presentamos una serie de ejemplos del uso de categoría en la existencia de ecuaciones no lineales.

Ejemplo 4.12. *Sea $F : D^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua tal que $F(x)$ nunca apunta en dirección opuesta a x para cualquier $x \in S^{n-1}$, i.e., $F(x) \neq \lambda x$, para todo $\lambda < 0$, para todo $x \in S^{n-1}$. Entonces la ecuación*

$$F(x) = 0, \tag{4.2}$$

tiene solución. De hecho, podemos considerar la homotopía $H : S^{n-1} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ dada por

$$H(x, t) = (1 - t)x + tF(x).$$

Note que, $H_0 = incl_{S^{n-1}}$ y $H_1 = F_|$, donde $incl_{S^{n-1}} : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es la aplicación inclusión. Del Ítem (3) del Ejemplo 2.25 tenemos que la inclusión $incl_{S^{n-1}} : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es una equivalencia homotópica, luego, por la Proposición 3.28, se tiene que $\mathrm{cat}(incl_{S^{n-1}}) = \mathrm{cat}(S^{n-1}) = 2$ (para la última igualdad ver Ítem (2) del Ejemplo 3.18). Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{cat}(F_|) &= \mathrm{cat}(incl_{S^{n-1}}) \qquad \textit{(sigue de la Proposición 3.3)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Luego, por el Corolario 4.6, la ecuación (4.2) tiene solución.

El siguiente ejemplo dice que podemos obtener una versión del Ejemplo 4.12 para un disco de cualquier radio y centrado en el origen.

Ejemplo 4.13. *Sean $r > 0$ y $F : D^n_r(0) \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua tal que $F(x)$ nunca apunta en dirección opuesta a x para cualquier $x \in S^{n-1}_r(0)$, i.e., $F(x) \neq \lambda x$, para todo $\lambda < 0$, para todo $x \in S^{n-1}_r(0)$. Entonces la ecuación*

$$F(x) = 0,$$

tiene solución. De hecho, podemos considerar el homeomorfismo $\varphi : D^n_r(0) \to D^n$, $\varphi(x) = \frac{1}{r}(x)$, cuya inversa es la aplicación $\psi : D^n \to D^n_r(0)$, $\psi(y) = ry$. Note que $\varphi(x) \in S^{n-1}$, para todo $x \in S^{n-1}_r(0)$, y $\psi(y) \in S^{n-1}_r(0)$, para todo $y \in S^{n-1}$. Considere la aplicación $G : D^n \to$

$\mathbb{R}^m$, $G(y) = F(\psi(y)) = F(ry)$. Como $F(x) \neq \lambda x$, para todo $\lambda < 0$, para todo $x \in S_r^{n-1}(0)$, tenemos que $G(y) \neq \lambda y$, para todo $\lambda < 0$, para todo $y \in S^{n-1}$. Luego, aplicando el Ejemplo 4.12 a G, tenemos que existe $y_0 \in D^n$ tal que $G(y_0) = 0$. Así, $x_0 = ry_0 \in D_r^n(0)$ es una solución para la ecuación $F(x) = 0$.

Ejemplo 4.13 implica el siguiente resultado.

Ejemplo 4.14. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua tal que $\dfrac{\langle F(x), x\rangle}{\| x \|} \to +\infty$ uniformemente cuando $\| x \| \to +\infty$. Entonces la ecuación*

$$F(x) = 0, \tag{4.3}$$

tiene solución. De hecho, sea $R > 0$ tal que $\langle F(x); x\rangle \geq 0$, para cualquier $\| x \| = R$. Si $F(x_0) = 0$ para algún $\| x_0 \| = R$, no hay nada que hacer. Supongamos que, $F(x) \neq 0$, para cualquier $\| x \| = R$. Entonces $F(x)$ nunca apunta en dirección opuesta a x, para cualquier $\| x \| = R$. Luego, por el Ejemplo 4.13, tenemos que la ecuación (4.3) tiene solución.

5. Conclusiones

Una técnica topológica, que existe en la literatura, para la existencia de ecuaciones no lineales es la teoría del grado topológico. En este trabajo, usamos la teoría de categoría de una aplicación para resolver el problema de existencia de soluciones de ecuaciones no lineales. Esta teoría, como mostramos en este trabajo, da una técnica alternativa para estudiar ecuaciones no lineales.

Agradecimientos

Estas Notas fueron preparadas como material académico para ser usadas durante la visita científica realizada por el autor en la

Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) en Lima, Perú, entre el período del 17 al 24 de Julio del 2023. El autor desea agradecer la subvención#2022/16695-7, São Paulo Research Foundation (FAPESP) por el apoyo financiero. Adicionalmente desea agradecer al Departamento de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) por todo el apoyo brindado durante la visita científica. En particular, el autor considerablemente agradece a los profesores Roland Rabanal, Percy Braulio Fernandez Sanchez y Jorge Chávez.

Referencias

[1] M. A. Aguilar, S. Gitler & C. Prieto, C. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint* 2002. New York: Springer.

[2] I. Berstein & T. Ganea, T. The category of a map and of a cohomology class. *Fundamenta Mathematicae*, **50**, 3 (1962) 265-279.

[3] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea & Tanré, D. *Lusternik-Schnirelmann Category*. Mathematical Surveys and Monographs, 103. 2003.

[4] E. Fadell & L. Neuwirth Configuration spaces. *Mathematica Scandinavic* **10** (1962) 111-118.

[5] A. Hatcher *Algebraic Topology.* 2002. `http://www. math. cornell. edu/ hatcher/AT/ATpage. html`.

[6] S. T. Hu *Homotopy theory.* Academic press 1959.

[7] J. R Munkres. *Topología.* 2da edición. Prentice Hall. 2000

[8] L. Nirenberg *Topics in nonlinear functional analysis* **6**. American Mathematical Society 1974.

[9] A. S. Schwarz *The genus of fiber space.* American Mathematical Society Translations. Series 2, **55**: Eleven papers on topology and algebra (1966) 49-140.

[10] C. A. I. Zapata Non-contractible configuration spaces. *Morfismos* **22** (2018) 27-39.

[11] C. A. I. Zapata & J. González Sectional category and the fixed point property. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **56**, 2 (2020) 559-578.

Abstract

A classic problem in analysis is to solve nonlinear equations of the form $F(x) = 0$, where $F : D^n \to \mathbb{R}^m$ is a continuous map of the closed unit disk $D^n \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. A topological technique, which exists in the literature, for the existence of solutions of nonlinear equations is the topological degree theory. In this work, we will use the category of a map theory to solve the problem of existence of solutions of nonlinear equations. This theory, as we will show in this work, provides an alternative topological technique to study nonlinear equations.

Keywords: Non linear equations, existence of solutions, homotopy, category of a map, LS category, sectional category

Presentado: octubre del 2023.
Aceptado: diciembre del 2023.

Cesar A. Ipanaque Zapata,
Departamento de Matemática
IME Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010, CEP: 05508-090
São Paulo-SP, Brazil
Email:cesarzapata@usp.br

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

PRO MATHEMATICA publica artículos que presenten resultados originales de investigación, así como trabajos inéditos de divulgación, de todas las áreas matemáticas. Artículos de otras ciencias también pueden ser aceptados si presentan resultados matemáticos interesantes.

Procedimiento editorial. Los autores deben enviar sus manuscritos originales vía email en formato PDF. Cuando un artículo tenga más de un autor, se debe indicar cuál de ellos recibirá la correspondencia. Todos los artículos recibidos en PRO MATHEMATICA son sometidos a arbitraje. Si una contribución es aceptada, se les pedirá a los autores que envíen una copia electrónica del manuscrito en formato TEX, preferiblemente en LATEX. En tal caso, el manuscrito se editará de acuerdo al estilo de la revista, y se les pedirá a los autores que lean cuidadosamente las pruebas de imprenta. Una vez que el artículo haya sido publicado, el autor corresponsal recibirá una copia electrónica del trabajo.

Preparación del manuscrito. El manuscrito debe estar escrito en castellano o en inglés, y debe incluir un título completo y un título abreviado, un resumen, una lista de palabras clave, y los códigos del sistema de clasificación «Mathematics Subject Classification» más reciente (actualmente MSC 2020). Se ruega a los autores proporcionar su resumen en ambos idiomas: castellano e inglés. Las referencias bibliográficas deben incluir solamente trabajos citados en el texto, y se deben enumerar en orden alfabético siguiendo los criterios aplicados en las publicaciones de la AMS (www.ams.org/journals). Si el artículo incluyera gráficos de cualquier tipo, éstos deberán ser incluidos en formato EPS, JPG o PDF. Las figuras y las tablas se deben identificar mediante cifras arábigas o letras entre paréntesis. Las leyendas deben ser breves y claras. Cada autor deberá mencionar su(s) filiación(es) institucional(es) o centro de trabajo, según sea el caso, su dirección postal y su dirección de correo electrónico.

Compromiso de Integridad. El envío de un manuscrito conlleva un compromiso por parte de su(s) autor(es) de que (1) no ha sido publicado anteriormente, (2) no ha sido enviado a otra revista, (3) su publicación ha sido aprobada por todos los co-autores, y (4) tiene autorización para utilizar todo material protegido por derechos de autor que contenga.

Toda correspondencia deberá estar dirigida a:

PRO MATHEMATICA:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias
Apartado 1761
Lima 100, Perú
Correo electrónico: promathematica@pucp.edu.pe

INFORMATION FOR AUTHORS

The journal PRO MATHEMATICA publishes papers from all areas of mathematics. We welcome papers presenting original research results as well as expository/survey articles. Papers from other sciences may be accepted provided they present interesting mathematical results.

Editorial Procedure. Please submit your original manuscripts via e-mail as PDFfiles. For papers written by more than one author, please mention which of them is to receive the correspondence. All papers received for possible publication in PRO MATHEMATICA are refereed. When a contribution is accepted, the authors will be requested to submit an electronic version of their manuscript in TEXformat, preferably in LATEX. In this case, the manuscript will be edited according to the style of the journal and authors will be requested to read the galley proofs carefully. Once an article is published, the corresponding author will receive an issue of the journal as well as an electronic version of their paper.

Manuscript Preparation. Manuscripts should be written in Spanish or in English, and must include a full title and an abbreviated title, a short abstract, a list of keywords, and the Mathematics Subject Classification code(s) of the most recent classification system (currently MSC 2020). Please, you provide your abstract and list of keywords in both languages: Spanish and English. The bibliographical references should include only works that are cited in the text, and must be ordered alphabetically as suggested by the AMS (www.ams.org/journals). If the paper contains any graphical materials, they should be included in EPS, JPG or PDF format. Figures and Tables should be identified by means of Arabic numerals or letters between parentheses. Legends should be brief and self-explanatory. Each author must include their current affiliation(s), mailing address and e-mail address.

Statement of integrity. The submission of a manuscript carries with it the author's assurance that (1) it has not been published elsewhere, (2) it is not under consideration for publication in other journals, (3) its publication has been approved by all coauthors, and (4) permission has been obtained for any copyrighted material used in it.

All correspondence should be addressed to:

PRO MATHEMATICA:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias
Apartado 1761
Lima 100, Perú
Correo electrónico: promathematica@pucp.edu.pe