

— PRO —
MATHEMATICA

VOLUMEN XXIX / No. 57 / 2016

ISSN 2305-2430

Director

Alfredo Poirier Schmitz

Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú

apoirie@pucp.edu.pe

Consejo Directivo

Johel Beltrán Ramírez

Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú

johel.beltran@pucp.edu.pe

Rudy Rosas Bazán

Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú

rudy.rosas@pucp.pe

Victor Sal y Rosas Celi

Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú

vsalyrosas@pucp.edu.pe

Consejo Editorial

José Manuel Aroca Hernández-Ros

Universidad de Valladolid

aroca@agt.uva.es

Arturo Kohatsu Higa

Osaka University, Japón

arturokohatsu@gmail.com

César Silva

Williams College – Massachusetts, Estados Unidos

cesar.e.silva@williams.edu

Mauricio Zevallos Herencia

IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

amadeus@ime.unicamp.br

Oswaldo Velásquez Castañon
IMCA, Instituto de Matemática y Ciencias Afines
ovelasquez@imca.edu.pe

Abel Cadenillas
University of Alberta, Canadá
acadetil@math.ualberta.ca

Fernando Torres Orihuela
UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Brasil
ftorres@ime.unicamp.br

Richard Gonzales Vilcarromero
Departamento de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú
rgonzalesv@pucp.edu.pe

PRO MATHEMATICA

La revista PRO MATHEMATICA, fundada en 1987, es una publicación del Departamento Académico de Ciencias, Sección Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Esta revista acoge artículos de investigación de alto estándar tanto en exposición como en contenido, sea en matemáticas puras, matemáticas aplicadas o estadística. Anualmente se edita un volumen compuesto de dos números. Todos los artículos pasan por riguroso proceso de arbitraje. PRO MATHEMATICA se encuentra actualmente indexada en el catálogo *Latindex*. Desde el año 2014 la distribución será exclusivamente electrónica.

Founded in 1987, PRO MATHEMATICA is a regular journal published by the Department of Sciences, Mathematics Section, of Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. This journal shelters research papers of high standards, both in content as in exposition, in Pure and Applied Mathematics and Statistics. A volume composed by two numbers is published yearly. All articles are peer refereed. PRO MATHEMATICA nowadays is indexed in the *Latindex* catalog. From 2014 on, the distribution would be exclusively by electronic means.

PRO MATHEMATICA

VOLUMEN XXIX / N° 57 / 2016

ISSN 2305-2430

Liliana Puchuri

Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por
campos cuadráticos reales con centro

Percy Fernández, Nancy Saravia

Polígono de Newton de una foliación de tipo curva
generalizada

A. Miguel Rodríguez

Un teorema de tipo Bott para orbifolds complejos y
aplicaciones

Francisco Ugarte Guerra

Estructura de los grupos abelianos ordenados

A. Gholampour, D. Karp, S. Payne

Cremona Symmetry in Gromov-Witten Theory

CONTENIDO

Liliana Puchuri

Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por campos
cuadráticos reales con centro 11

Percy Fernández, Nancy Saravia

Polígono de Newton de una foliación de tipo curva generalizada 47

A. Miguel Rodríguez

Un teorema de tipo Bott para orbifolds complejos y aplicaciones 83

Francisco Ugarte Guerra

Estructura de los grupos abelianos ordenados 105

A. Gholampour, D. Karp, S. Payne

Cremona Symmetry in Gromov-Witten Theory 129

Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por campos cuadráticos reales con centro

Liliana Puchuri^{1,2}

Setiembre, 2015

Resumen

En el estudio del problema infinitesimal de Hilbert se encuentra inmersa la tarea de analizar la existencia y de acotar el número de ciclos límite de una perturbación lineal de campos hamiltonianos. Como existe una clasificación de campos cuadráticos reales con centro en \mathbb{R}^2 , podemos asociar campos complejos en \mathbb{C}^2 que inducen una foliación en \mathbb{P}^2 . El objetivo de este trabajo es clasificar aquellas foliaciones en \mathbb{P}^2 inducidas por estos campos cuadráticos que sean fibraciones elípticas, es decir, aquellas cuyas curvas de nivel sean de género uno.

MSC(2010): 34C07.

Palabras clave: Ciclos límite, decimosexto problema de Hilbert, foliaciones elípticas.

¹ Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA), Perú.

² Pontificia Universidad Católica del Perú.

1. Introducción

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales nació con los trabajos de Poincaré y Liapunov a finales del siglo XIX y en los inicios del siglo XX. En el problema infinitesimal de Hilbert se observa que vía pequeñas perturbaciones de un campo se puede obtener ciclos límites en el campo perturbado. Este problema está relacionado con la existencia de ciclos límite; por ello, es importante saber cuándo un campo posee un centro, circunstancia referida como *el problema del centro*. Este problema fué resuelto por Poincaré para campos polinomiales. Posteriormente Liapunov lo generalizó para campos vectoriales analíticos. Por el teorema de clasificación de campos vectoriales polinomiales reales con centro, todo campo polinomial con una singularidad no degenerada con centro posee una integral primera de uno de cuatro tipos: *reversible*, *Lotka-Volterra*, *de codimensión cuatro* o *hamiltoniano*. Debido a que todo campo polinomial real induce un campo polinomial complejo, podemos inducir una foliación compleja en el espacio proyectivo complejo de dimensión dos. Se prueba que tales foliaciones inducidas poseen una integral primera racional cuyas curvas de nivel son curvas algebraicas complejas.

En el presente trabajo reproducimos los resultados obtenidos por Gautier [6] para el caso Lotka-Volterra mediante la teoría de foliaciones holomorfas. Además, debido a una imprecisión en la prueba original de Gautier, presentamos nuevos ejemplos de foliaciones elípticas para este caso. Por otro lado, probamos que en los casos hamiltoniano y de codimensión cuatro, las curvas de nivel siempre son de género uno. En el caso reversible, vía mapeos birracionales, las curvas de nivel están dadas por curvas hiperelípticas. En este caso, es fácil calcular el género de las curvas, puesto que el género es invariante por mapeos birracionales.

2. Preliminares

Toda ecuación diferencial cuadrática para la cual el origen es una singularidad no degenerada de tipo centro puede ser llevada mediante

un cambio de coordenadas a la forma

$$\begin{aligned}x' &= y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 \\y' &= -x + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Lema 2.1. *La ecuación diferencial cuadrática (2.1) puede ser escrita en coordenadas complejas como*

$$z' = -iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2,\tag{2.2}$$

para $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Demostración. Ver [8]. □

2.1. Ecuaciones diferenciales cuadráticas con centro

El problema del centro para campos cuadráticos reales fue considerado por primera vez por Kapteyn [7]. En [7], se exhibe un conjunto de condiciones algebraicas sobre los coeficientes de (2.1) para que exista un centro en el origen.

Teorema 2.2 (Kapteyn [7]). *El sistema (2.1) tiene un centro en el origen si y solamente si una de las siguientes condiciones*

1. $a_{2,0} + a_{0,2} = 0$,
2. $a_{1,1} = b_{2,0} = 0$,
3. $0 = a_{1,1} - 2b_{2,0} = -b_{1,1} + 4a_{2,0} + 5a_{0,2} = b_{2,0}^2 + a_{2,0}a_{0,2} + 2a_{0,2}^2$,
4. $-b_{1,1} - 2a_{2,0} = a_{1,1} - 2b_{2,0} = 0$

es satisfecha. □

Por el lema 2.1, la ecuación (2.1) puede ser llevada a la forma

$$z' = -iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2,\tag{2.3}$$

y así tenemos diversos casos que considerar.

Cuando $B = A = 0$ y $C \neq 0$, por medio de rotaciones y dilataciones podemos considerar $C = 1$. De esta manera (2.3) se convierte en

$$z' = -iz + \bar{z}^2. \quad (2.4)$$

Cuando $B = 0$ y $A \neq 0$, nuevamente por medio de una rotación podemos limitarnos a tratar $A = 1$. Luego (2.3) toma la forma

$$z' = -iz + z^2 + C\bar{z}^2. \quad (2.5)$$

Cuando $B \neq 0$, por medio de una homotecia y una rotación podemos considerar $B = 2$, y (2.3) toma la forma

$$z' = -iz + Az^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2. \quad (2.6)$$

Si aplicamos el teorema 2.2 a lo observado anteriormente obtenemos la siguiente información.

Proposición 2.3. *Con la notación de arriba, el origen es un centro de la ecuación (2.3) justamente cuando por medio de una rotación o homotecia una de las siguientes condiciones es satisfecha:*

1. $A = B = 0, C = 1$;
2. $B = 0, A = 1$;
3. $B = 2, A = -1, C \notin \mathbb{R}$;
4. $B = 2, A, C \in \mathbb{R}$;
5. $B = 2, A = 4, |C| = 2, C \notin \mathbb{R}$. □

Teorema 2.4 (Kapteyn [7]). *Existen cinco tipos de sistemas cuadráticos con centro:*

H_1 : $z' = -iz + \bar{z}^2$ (hamiltoniano 1);

Q_3^L : $z' = -iz + z^2 + C\bar{z}^2, C \in \mathbb{C}$ (Lotka Volterra generalizado);

H : $z' = -iz + -z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, C \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (hamiltoniano);

Q_3^R : $z' = -iAz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2$, $A, C \in \mathbb{R}$ (reversible);

Q_4 : $z' = -iz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2$, $|C| = 2$, $C \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (codimensión 4). \square

El lector interesado puede consultar [8] para la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Si la ecuación (2.3) posee un centro, entonces ésta posee una integral de la forma*

1. $P_3 \in \mathbb{R}[x, y]$ (caso H y H_1);
2. $x^p y^q (ax + by + c)^r$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (caso Q_3^L);
3. $x^p (y^2 + P_2(x))^q$, $q \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $P_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ (caso Q_3^R);
4. $\frac{P_3(x, y)^2}{P_2^3(x, y)}$, $P_3 \in \mathbb{R}[x, y]$ y $P_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ (caso Q_4).

La notación $P_i \in \mathbb{R}[x, y]$ indica que P_i es un polinomio de grado i . \square

Diremos que una integral primera es **de tipo 2** (respectivamente **de tipo 3**) si tiene la forma dada en el ítem 2 (respectivamente ítem 3) del teorema 2.5.

2.2. Fórmula de Cerveau-Lins Neto

En esta sección presentaremos una fórmula para calcular el género de una curva irreducible invariante por una foliación mediante herramientas de la teoría de foliaciones. Esto se efectúa por medio de un cierto índice a lo largo de una curva.

Definición 2.6. Sean $U \subset \mathbb{C}^2$, $V \subset \mathbb{C}$ abiertos con $0 \in V$, X un campo vectorial en U y $f : U \rightarrow V$ una función holomorfa. Diremos que $C = f^{-1}(0)$ es **invariante por X** cuando satisface

$$df_q(X(q)) = 0, \quad \text{para todo } q \in C.$$

Teorema 2.7 (Parametrización de Puiseux). Sea $S = \{(x, y) \in U \subset \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ una curva irreducible que pasa por $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ distinta a los ejes coordenados. Entonces existe un germen holomorfo $\theta : V \subset \mathbb{C} \rightarrow U$, con V vecindad de 0, definido como

$$\theta(z) = (z^m, z^n u(z)),$$

tal que

- u es holomorfa con $u(0) \neq 0$;
- se tiene $f(\theta(z)) = 0$, para todo $z \in V$;
- $m_p(f) = \min(m, n)$ es la multiplicidad de f en $(0, 0)$; y
- existe un disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ tal que $\theta : \mathbb{D} \rightarrow \theta(\mathbb{D}) \subset S$ es un homeomorfismo y $\theta|_{\mathbb{D} \setminus \{0\}}$ es holomorfa.

Demostración. Para la prueba ver [5, p. 30]. □

Ejemplo 2.8. Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X(x, y) = (qx, py)$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Consideremos la curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p = y^q\}.$$

Claramente, para $f(x, y) = x^p - y^q$ se tiene $C = f^{-1}(0)$ y C resulta invariante por X . Además, $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, (0, 0))$ definida como $\alpha(t) = (t^q, t^p)$ es una parametrización de Puiseux de C .

La siguiente proposición, que puede ser encontrada en [2], nos ayuda a definir un índice que se presta para calcular el género de una curva algebraica irreducible.

Proposición 2.9. Sea X un campo definido en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$, S una subvariedad invariante de dimensión 1 y $p \in S$ una singularidad aislada de X . Consideremos además una parametrización de Puiseux $\alpha : V \rightarrow U$ en un dominio $V \subset \mathbb{C}$ que contiene p . Entonces existe un único campo vectorial holomorfo X_1 en D que cumple

$$d\alpha \cdot X_1 = X \circ \alpha.$$

En la proposición anterior, dado $X_1(t) = \sum_{i \geq m} a_i t^i$, con $a_m \neq 0$, el valor $i_p(X, S) = m$ es llamado **índice a lo largo de la curva S de X** en p .

Ejemplo 2.10. En el ejemplo 2.8 tenemos

$$X(\alpha(t)) = t(qt^{q-1}, pt^{p-1}) = t\alpha'(t) = \alpha'(t)X_1(t).$$

Al adoptar la notación de la proposición 2.9 se cumple $X_1(t) = t$ y así se tiene $i_p(X, C) = 1$.

Proposición 2.11. Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 dada en coordenadas (x, y) de \mathbb{C}^2 por una forma polinomial $\omega = Pdy - Qdx$. Para una singularidad p de $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2}$ y B una rama local invariante por \mathcal{F} que pasa por p , sea π una explosión en p . Consideremos $B' = \pi^*B$, $E = \pi^{-1}(p)$ y $p' \in E \cap B'$. Entonces se tiene

$$i_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} i_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + m_p(B)(\nu_p(\mathcal{F}) - 1), & \text{si } \pi \text{ es no-dicrítico} \\ i_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + m_p(B)\nu_p(\mathcal{F}), & \text{si } \pi \text{ es dicrítico.} \end{cases}$$

□

Teorema 2.12 (Cerveau y Lins-Neto [4]). Sea \mathcal{F} una foliación sobre \mathbb{P}^2 de grado d y C una curva invariante por \mathcal{F} de grado m . Entonces se cumple

$$\mathcal{X}(C) + m(d-1) = \sum_{p \in C} \sum_{B \in C\{p\}} i_p(\mathcal{F}_1, B), \quad (2.7)$$

donde $\mathcal{X}(C)$ es la característica de Euler del normalizado de C y $C\{p\}$ es el conjunto de ramas que pasan por p . □

2.3. Fibraciones en superficies complejas compactas

Sea X una superficie compacta y S una superficie de Riemann compacta. Diremos que $f : X \rightarrow S$ es una **fibración** si f es un mapeo holomorfo.

Ejemplo 2.13. Sea \mathcal{F} la foliación en \mathbb{P}^2 inducida por dF , donde $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ está dada por

$$F([X : Y : Z]) = \frac{X^3}{Y^2 Z}.$$

En este caso \mathcal{F} posee una única singularidad $p = (0, 0)$. El proceso de desingularización de \mathcal{F} está dado (ver [8, ejemplo 4.13]) por tres explosiones $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Ya que se tiene

$$F_3(s, t) = F \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3(s, t) = s,$$

el mapeo $f = F \circ \pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es holomorfo.

Diremos que $f : X \rightarrow S$ es una **fibración racional** (respectivamente **elíptica**) si f es una fibración tal que todas sus fibras poseen género cero (respectivamente, fibras conexas de género uno) salvo por un número finito de ellas. Observemos que la función f del ejemplo 2.13 es una fibración racional.

Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 . Diremos que \mathcal{F} es una **foliación elíptica** cuando posee una integral primera $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ de modo que si $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^2$ es la desingularización de \mathcal{F} , entonces $F \circ \pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es una fibración elíptica.

En adelante pondremos $\text{gén}(C)$ para aludir al género de la curva C .

2.4. Foliación reversible y de Lotka-Volterra

Un **cambio de variables** en \mathbb{C}^n es un mapeo polinomial

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

tal que cada polinomio f_i es de grado 1 y f es una biyección.

Diremos que una foliación \mathcal{F} en \mathbb{P}^2 es **de tipo 2** (respectivamente **de tipo 3**) si existe un automorfismo $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $T^*\mathcal{F}$ posee una integral primera de tipo 2 (respectivamente de tipo 3).

Diremos que una foliación \mathcal{F} en \mathbb{P}^2 es **reversible** (respectivamente **Lotka-Volterra**) si \mathcal{F} posee integral primera de tipo 3 y no de tipo 2

(respectivamente si \mathcal{F} tiene una integral primera de tipo 2 pero no de tipo 3).

3. Foliaciones de codimensión 4 y de tipo hamiltoniano

En el teorema 2.4 vimos que en el caso de codimensión 4 el sistema queda simplificado a

$$Q_4 : z' = -iz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, \quad |C| = 2,$$

mientras que en el caso hamiltoniano tenemos

$$\begin{aligned} H_1 : z' &= -iz + \bar{z}^2, \quad \text{o} \\ H : z' &= -iz - z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, \quad C \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Proposición 3.1. *Los casos hamiltoniano (H y H_1) y el de codimensión cuatro (Q_4) poseen integrales primeras cuyas fibras genéricas son curvas elípticas.*

Demostración. En el caso H_1 el campo cuadrático $z' = -iz + \bar{z}^2$ posee integral primera $f(x, y) = \frac{1 - 3(x^2 + y^2) + 2y(3x^2 + y^2)}{6}$. Luego, la foliación \mathcal{F} inducida por H_1 en \mathbb{P}^2 posee una integral primera de la forma

$$F(X, Y, Z) = \frac{Z^3 - 3(X^2 + Y^2)Z + 2Y(3X^2 + Y^2)}{6Z^3}.$$

Dado $c \in \mathbb{C}$, sea F_c la fibra de F . Entonces se tiene

$$\text{Sing}(F_c) = \left\{ \frac{\partial F_c}{\partial X} = \frac{\partial F_c}{\partial Y} = \frac{\partial F_c}{\partial Z} = 0 \right\} = \emptyset,$$

cuando $c \neq 1/6, 1/12$, es decir, en tal caso F_c es una curva regular. En particular F_c es de género uno.

Análogamente, en el caso H y el de codimensión 4 se prueba directamente que las fibras genéricas son regulares. \square

4. Clasificación de foliaciones reversibles

Comenzamos observando que toda foliación reversible \mathcal{F} posee una integral primera holomorfa de la forma

$$f(x, y) = x^p(y^2 + P(x))^q, \quad (4.1)$$

donde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}^*$ y $P(x) = ax^2 + bx + c$ satisface $b^2 - 4ac \neq 0$. En efecto, si $b^2 - 4ac = 0$, entonces podemos escribir $P(x) = (x - \lambda)^2$ y con ello $y^2 + P(x) = y^2 + (x - \lambda)^2 = (y - i(x - \lambda))(y + i(x - \lambda))$. Esto implicaría $f(x, y) = x^p(y - i(x - \lambda))^q(y + i(x - \lambda))^q$ con lo que \mathcal{F} sería de tipo 2; una contradicción.

En esta sección probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Una foliación reversible es elíptica si y solo si bajo un cambio de coordenadas afines posee una integral primera de la forma*

$$\begin{aligned} f &= x^{-3}(y^2 + ax^2 + bx + c), & f &= x(y^2 + ax^2 + bx + c), \\ f &= x^{-3/2}(y^2 + ax^2 + bx + c), & f &= x^{-1/2}(y^2 + ax^2 + bx + c), \\ f &= x^{-4}(y^2 + ax^2 + bx + c), & f &= x^2(y^2 + ax^2 + bx + c), \\ f &= x^{-4/3}(y^2 + bx + c), & f &= x^{-2/3}(y^2 + ax^2 + bx), \\ f &= x^{-4/3}(y^2 + ax^2 + bx), & f &= x^{-2/3}(y^2 + bx + c), \\ f &= x^{-5/3}(y^2 + ax^2 + bx), & f &= x^{-1/3}(y^2 + bx + c), \\ f &= x^{-5/4}(y^2 + ax^2 + bx), & f &= x^{-3/4}(y^2 + bx + c), \\ f &= x^{-7/4}(y^2 + ax^2 + bx), & f &= x^{-1/4}(y^2 + bx + c), \\ f &= x^{-5/2}(y^2 + ax^2 + bx), & f &= x^{-1/2}(y^2 + bx + c), \\ f &= x^{-1+\frac{2}{k}}(y^2 + x), k \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}, & f &= x^{-1+\frac{3}{k}}(y^2 + x), k \in \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4.1. Resultados preliminares

Para simplificar los cálculos en el caso de las foliaciones reversibles, estudiemos por separado los casos $p > 0$ y $p < 0$.

Si $p < 0$, la integral primera toma la forma

$$f(x, y) = \frac{(y^2 + ax^2 + bx + c)^q}{x^{p_1}}, \quad p_1 = -p.$$

Sea $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (y^2 + ax^2 + bx + c)^q = tx^{p_1}\}$. Además si $t_1 \in \mathbb{C}^*$ satisface $t_1^q = t$, consideramos la curva

$$C_{t_1} = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : Y^2 + aX^{2q} + bX^q + c = t_1X^{p_1}\}.$$

Lema 4.2. Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $\varphi(X, Y) = (x, y) = (X^q, Y)$. Entonces $\varphi|_{C_{t_1}}$ es una biyección entre C_{t_1} y C_t .

Demostración. Probaremos primero que el mapeo $\varphi|_{C_t}$ es inyectivo. Sean $(X_1, Y_1), (Y_1, Y_2) \in C_t$ sujetos a $\varphi(X_1, Y_1) = \varphi(X_2, Y_2)$. Entonces se tiene $X_1^q = X_2^q$, $Y_1 = Y_2$ y $X_1^{p_1} = t_1^{-1}(Y_1^2 + aX_1^{2q} + bX_1^q + c) = t_1^{-1}(Y_2^2 + aX_2^{2q} + bX_2^q + c) = X_2^{p_1}$. Por otro lado, la condición $\text{mcd}(p_1, q) = 1$ implica que existen enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $mp_1 + nq = 1$. Al tenerse $X_1^{p_1} = X_2^{p_1}$ y $X_1^q = X_2^q$, se pasa a

$$X_1 = X_1^{mp_1+nq} = X_2^{mp_1+nq} = X_2,$$

con lo que $\varphi|_{C_t}$ resulta inyectiva.

Ahora veamos que $\varphi|_{C_{t_1}}$ es sobreyectiva. Sean $(x, y) \in C_t$ y $X \in \mathbb{C}$ tales que $X^q = x$. Entonces se tiene $(X, y) \in C_{t_1}$ y $\varphi(X, y) = (x, y)$, es decir, $C_t \subseteq \varphi(C_{t_1})$. Recíprocamente, para $(x, y) = \varphi(X, Y) = (X^q, Y)$, donde $(X, Y) \in C_{t_1}$, tenemos

$$(y^2 + ax^2 + bx + c)^q = (Y^2 + aX^{2q} + bX^q + c)^q = t_1^q(X^{p_1})^q = tx^{p_1},$$

y así también $(x, y) \in C_t$. □

Sea $U = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 : Z \neq 0\}$ y $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^2; [X : Y : Z] \rightarrow (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}) = (x, y)$. Pongamos

$$F(X, Y, Z) = \frac{(Y^2 + aX^2 + bXZ + cZ^2)^q}{Z^{2q-p_1}X^{p_1}},$$

para el homogeneizado de f .

Proposición 4.3. Sea $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ dada por $[X : Y : Z] \mapsto [X^q : YZ^{p-1} : Z^p]$. Con la notación del lema 4.2 se cumple lo siguiente.

- El mapeo racional F satisface $f \circ \phi = \phi \circ F$.
- Sean C_t^* y $C_{t_1}^*$ las curvas homogeneizadas de C_t y C_{t_1} , respectivamente. Entonces $\Phi|_{C_t^*} : C_t^* \dashrightarrow C_{t_1}^*$ es un mapeo birracional.
- El género $\text{gén}(C_t^*)$, $\text{gén}(C_{t_1}^*)$ de C_t^* , $C_{t_1}^*$, respectivamente, coincide.

Demostración. El ítem 1 es trivial. Por el lema 4.2 tenemos que $\varphi : C_t \rightarrow C_{t_1}$ es biyectiva. Así $\Phi|_{C_t^*} : C_t^* \dashrightarrow C_{t_1}^*$ es un mapeo birracional, es decir, se cumple la segunda propiedad. Como el género es invariante por mapeos birracionales, se sigue la tercera parte. \square

Por otro lado, si tenemos $p > 0$, la integral primera de \mathcal{F} , dada en (4.1), toma la forma

$$f(x, y) = x^p(y^2 + ax^2 + bx + c)^q.$$

Análogo al caso $p < 0$, dado $t \in \mathbb{C}^*$, consideremos la curva de nivel

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p(y^2 + ax^2 + bx + c)^q = t\}.$$

También, para $t_1 \in \mathbb{C}^*$ con $t_1^q = t$, consideramos

$$C_{t_1} = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : X^p(Y^2 + aX^{2q} + bX^q + c) = t_1\}.$$

Así como en el lema 4.2, tenemos el siguiente resultado trivial.

Lema 4.4. Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, dado por $\varphi(X, Y) = (X^q, Y)$. Entonces

$$\varphi|_{C_{t_1}} : C_{t_1} \rightarrow C_t$$

es un biholomorfismo. En particular se tiene $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C_{t_1})$. \square

Gracias al lema 4.4, podemos considerar sin pérdida de generalidad $f(x, y) = x^p(y^2 + ax^{2q} + bx^q + c)$ y $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p(y^2 + ax^{2q} + bx^q + c) = t\}$. Además, cada vez que hagamos mención al género de C_t nos referiremos al género de la curva homogeneizada.

Estudiaremos por separado los siguientes casos:

Caso I: $a \neq 0$ y $c \neq 0$ (sección 4.2),

Caso II: $a \neq 0$ y $c = 0$ (sección 4.3),

Caso III: $a = 0$ y $c \neq 0$ (sección 4.4),

Caso IV: $a = 0$ y $c = 0$ (sección 4.5).

4.2. Caso I: $a \neq 0$ y $c \neq 0$

Como comentamos en la sección 4.1, trabajamos con $f(x, y) = x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q + c)$. Además, dado que se tiene $a \neq 0$, por medio del cambio $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, y\right)$, podemos suponer directamente

$$f(x, y) = x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q + c).$$

Ahora consideraremos las posibilidades $p < 0$, $p > 0$ par y $p > 0$ impar.

4.2.1. Subcaso $p < 0$

Como vimos en la sección 4.1, es suficiente calcular el género de $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{2q} + bx^q + c = tx^{-p}\}$. Observemos que C_t es una curva hiperelíptica, esto es, cumple

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)\}.$$

En este caso, es sabido que el género de la superficie puede ser calculado explícitamente.

Teorema 4.5. *La superficie de Riemann S , asociada a una curva de ecuación*

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ son distintos, tiene género $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Demostración. Para la prueba ver [9], página 110. \square

En consecuencia, para calcular el género de C_t debemos hallar las multiplicidades de las raíces de $Q(x) = x^{2q} + bx^q - tx^{-p} + c$. Para ello ofrecemos el siguiente lema.

Lema 4.6. *Para t genérico, las raíces de $Q(x)$ son diferentes y no nulas.*

Demostración. Sea $c_1 \in \mathbb{C}$ una raíz de $Q(x)$. Entonces tenemos $Q(x) = x^{2q} - bx^q + tx^{-p} - c = (x - c_1)^m Q_1(x)$, con $Q_1(c_1) \neq 0$, para cierto $m \geq 0$. Como se tiene $Q(0) = -c \neq 0$ logramos $c_1 \neq 0$. Por otro lado, se tiene

$$Q(\bar{x} + c_1) = \bar{x}^m Q_1(\bar{x} + c_1) = \alpha \bar{x} + \dots, \quad (4.2)$$

donde $\alpha = -\binom{2q}{1}c_1^{2q-1} - b\binom{q}{1}c_1^q + \binom{-p}{1}tc_1^{-p}$. De la ecuación (4.2), dado que t es genérico, obtenemos $\alpha \neq 0$ y así concluimos que $\bar{x}^m Q_1(\bar{x} + c_1)$ es igual a $\alpha \bar{x}$ más términos de orden superior. Esto implica $m = 1$, es decir, que las raíces de $Q(x)$ son genéricamente diferentes y no nulas. \square

Lema 4.7. *Para t genérico, sea*

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = -x^{2q} - bx^q + tx^{-p} - c\}.$$

Entonces C_t tiene género 1 única y exclusivamente si (p, q) es igual a $(-3, 2), (-1, 2), (-4, 1)$ o $(-3, 1)$.

Demostración. Sea t genérico. Por el lema 4.6, las raíces de $Q(x) = -x^{2q} - bx^q + tx^{-p} - c$ son diferentes y no nulas, es decir, se tiene $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_d)$, donde

$$d = \deg(Q) = \begin{cases} 2q, & \text{si } 2q \geq -p, \\ -p, & \text{si } -p > 2q. \end{cases} \quad (4.3)$$

En consecuencia, por el teorema 4.5, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si el grado de Q es 3 ó 4. De (4.3), se desprenden dos posibilidades.

Si $2q \geq -p$ entonces $\deg(Q) = 2q$. Luego, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $2q = 3$ ó 4 , $2q \geq -p$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Así, en este caso, $(p, q) = (-1, 2)$ o $(-3, 2)$.

Si $-p > 2q$ tenemos $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $-p = 3$ ó 4 , $-p > 2q$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Por lo tanto, $(p, q) = (-3, 1)$ o $(-4, 1)$. \square

Podemos resumir el cálculo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 4.8. *Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^2 con integral primera*

$$f(x, y) = \frac{(y^2 + x^2 + bx + c)^q}{x^{-p}}, \quad -p > 0 \text{ y } c \neq 0.$$

Sea C_t una curva de nivel genérica de f . Entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si la foliación \mathcal{F} posee una integral de la forma

- $f = x^{-3}(y^2 + x^2 + bx + c)$,
- $f = x^{-4}(y^2 + x^2 + bx + c)$,
- $f = x^{-\frac{1}{2}}(y^2 + x^2 + bx + c)$,
- $f = x^{-\frac{3}{2}}(y^2 + x^2 + bx + c)$. \square

4.2.2. Caso $p > 0$ y p par

Para p par, digamos $p = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q + c) - t = (x^k y)^2 + x^{p+2q} + bx^{p+q} + cx^p - t.$$

Para $\psi(x, y) = (x, x^k y)$ tenemos $\psi(C_t) = C'_t$, donde

$$C'_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{p+2q} + bx^{p+q} + cx^p = t\}.$$

En este caso $\psi : C_t \dashrightarrow C'_t$ es un mapeo birracional y se tiene $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C'_t)$.

Lema 4.9. *Para t genérico, las raíces de $x^{p+2q} - bx^{p+q} - cx^p - t = 0$ son diferentes y no nulas (esto incluye el caso $c = 0$).*

Demostración. En la demostración del lema 4.6 vimos que $-x^{2q} - bx^q + tx^p - c$ posee raíces diferentes y no nulas para t genérico siempre que se cumpla $c \neq 0$. Pero como se tiene $Q(x) = x^{p+2q} - bx^{p+q} - cx^p - t$ ($t \in \mathbb{C}^*$, significa $t \neq 0$), el resultado se sigue sin necesidad de la hipótesis $c \neq 0$. \square

Lema 4.10. *Con la notación anterior la curva C'_t tiene género uno si y solo si se cumple $(p, q) = (2, 1)$.*

Demostración. Sea $Q(x) = x^{p+2q} + bx^{p+q} + cx^p - t$. Por el lema 4.6, el polinomio $Q(x)$ tiene raíces distintas y no nulas para t genérico. Luego, se tendrá $\text{gén}(C'_t) = 1$ si y solamente si $2q + p = 3$ o $2q + p = 4$. Como p es par, ello solo es posible si $2q + p = 4$ y así obtenemos $q = 1$ y $p = 2$. \square

4.2.3. Caso $p > 0$ y p impar

En este caso se tiene $p = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, y con ello obtenemos

$$x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q + c) - t = \left(\frac{(x^{(p+1)/2}y)^2}{x^{p+1}} + x^{2q} + bx^q + c \right) x^p - t = 0.$$

Con $\psi(x, y) = (x, x^{(p+1)/2}y)$ se tiene $\psi(C_t) = C'_t$, donde $C'_t = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2 : y_1^2 + x_1^{2q+p+1} + bx_1^{p+q+1} + cx_1^{p+1} = tx_1\}$. Nuevamente $\psi : C_t^* \dashrightarrow C'_t$ es un mapa birracional y se cumple $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C'_t)$.

Lema 4.11. *Para t genérico, la curva C'_t tiene género uno si y solamente si $(p, q) = (1, 1)$.*

Demostración. Por el lema 4.9 tenemos que para t genérico la ecuación $x_1^{2q+p} + bx_1^{q+p} + cx_1^p - t$ tiene raíces distintas y no nulas. Luego se tiene $\text{gén}(C'_t) = 1$ si y solo si $2q + p = 2$ o $2q + p = 3$. Como p es impar y se cumple $p > 0$, $q > 0$, ello puede darse exclusivamente con $2q + p = 3$, cuya única solución positiva es $(p, q) = (1, 1)$. \square

Observación 4.12. En los lemas 4.9 y 4.11 no hemos usado el dato $c \neq 0$. Luego, los resultados aplican también con $c = 0$. Esto es, si

$$C : y^2 = -x^{p+2q} - bx^{p+q} + t, \quad p, q > 0,$$

cuando p, q son relativamente primos, para $t \in \mathbb{C}^*$ genérico se tiene $\text{gén}(C) = 1$ si y solamente si $(p, q) = (1, 1)$ o $(1, 2)$.

Lema 4.13. *Sea $p > 0$. Para t genérico consideremos*

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = -x^{2q} - bx^q + tx^p - c\}.$$

Entonces C_t tiene género uno si y solamente si la foliación \mathcal{F} posee una integral de la forma

- $f = x(y^2 + x^2 + bx + c)$ o
- $f = x^2(y^2 + x^2 + bx + c)$. □

4.3. Caso II: $a \neq 0$ y $c = 0$

Al tenerse $a \neq 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que la integral primera es de la forma

$$x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q), \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Nuevamente, estudiaremos los casos $p > 0$, $p < 0$ par y $p < 0$ impar por separado.

4.3.1. Caso $p > 0$

Por la observación 4.12, la curva C_t es elíptica si y solamente si se tiene $(p, q) = (1, 1)$ o $(2, 1)$.

4.3.2. Caso $p < 0$ y p par

Sea $-p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Escribamos $C_t = \{(x, y) : y^2 + ax^{2q} + bx^q = tx^{-p}\}$. Para calcular $\text{gén}(C_t)$ necesitamos establecer antes tres lemas.

Lema 4.14. *Si p es par y está sujeto a $-p \leq q$, entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $(p, q) = (-2, 3)$.*

Demostración. Sea $\psi(x, y) = (x, x^k y)$. Es fácil probar que para t genérico $\psi : C'_t \rightarrow C_t$ es un biholomorfismo, donde $C'_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{p+2q} + bx^{p+q} = t\}$; lo cual lleva a $\text{gén}(C'_t) = \text{gén}(C_t)$. En consecuencia las hipótesis del lema implican que $\deg(C') = p + 2q$ es par y que se satisface $q \leq p + 2q$. De esta manera se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si se cumple $p + 2q = 4$, $q \leq p + 2q$, para p, q relativamente primos. Esto es posible solo con $(p, q) = (-2, 3)$. \square

Lema 4.15. Para $-p \geq 2q$, con p par, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si $(p, q) = (-4, 1)$.

Demostración. Sea $\psi(x, y) = (\frac{1}{x}, y)$ y

$$C'_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{-2q-p} + bx^{-q-p} = t\}.$$

Entonces $\psi|_{C_t} : C_t \dashrightarrow C'_t$ es un mapeo birracional; lo cual implica $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C'_t)$. De esta manera se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $-p - q = 3$ o $-p - q = 4$, con $p < 0$ par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Por lo tanto se obtiene $(p, q) = (-4, 1)$. \square

Lema 4.16. Si se cumple $q < -p < 2q$, con p par, entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $(p, q) = (-4, 3)$.

Demostración. En este caso, consideremos los mapeos racionales

$$\psi(x, y) = (\frac{1}{x}, y) \quad \text{y} \quad \phi(x, y) = (x^q, y).$$

Para

$$C'_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^q + b = tx^{-p-q}\},$$

se tiene que $\phi \circ \psi|_{C'_t} : C'_t \dashrightarrow C_t$ es un mapeo birracional. Al cumplirse $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C'_t)$ se tendrá $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $q = 3$ o $q = 4$, con $-q < p = 2k < 2q$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Así $(p, q) = (-4, 3)$. \square

Podemos poner toda esta información dentro de un único resultado.

Proposición 4.17. Sea $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = -x^{2q} - bx^q + tx^p - c\}$. Entonces para t genérico la curva C_t tiene género uno si y solamente si la foliación \mathcal{F} posee una integral de la forma

(e) $f = x(y^2 + x^2 + bx + c),$

(f) $f = x^2(y^2 + x^2 + bx + c),$

(g) $f = x^{-2}(y^2 + x^2 + bx + c)^3,$

(h) $f = x^{-4}(y^2 + x^2 + bx + c),$

(i) $f = x^{-4}(y^2 + x^2 + bx + c)^3.$

□

4.3.3. Caso $p < 0$ y p impar

Pongamos $p = 2k - 1$, donde $k \leq 0$ es entero. Vía la transformación $\psi(x, y) = (x, x^{2k}y)$ la curva C_t resulta birracional a $\{(x, y) : y^2 = -x(x^{2q+p} + bx^{p+q} - t)\}$. Por un proceso rutinario obtenemos que los únicos pares posibles para obtener género uno son $(p, q) = (-1, 2), (-3, 1), (-5, 2), (-5, 3), (-5, 4), (-7, 4)$.

4.4. Caso III: $a = 0$ y $c \neq 0$

En este caso la integral primera es de la forma

$$f(x, y) = x^p(y^2 + bx + c)^q, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Al poner $\psi(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$ el mapeo $\psi|_{C_t}$ resulta birracional sobre su imagen. Luego, podemos suponer que se tiene $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \psi(x, y) = x^{-p-2}(y^2 + bx + cx^2)^q = t\}$. En este caso obtenemos la siguiente información.

Proposición 4.18. La foliación $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x^p(y^2 + bx + c)^q)$ es elíptica única y exclusivamente para $(p, q) = (1, 1), (-3, 1), (-3, 2), (-1, 2), (2, 1), (-4, 1), (1, 2), (-4, 3)$ o $(-3, 4)$.

□

4.5. Caso IV: $a = 0$ y $c = 0$

Al tenerse $b^2 - 4ac \neq 0$ se infiere $b \neq 0$. Luego, podemos considerar que la integral primera es de la forma

$$f(x, y) = x^p(y^2 + bx^q).$$

Además, para t genérico se tendrá $C_t = \{x^p(y^2 + bx^q) = t\}$.

Lema 4.19. Si $p > 0$ entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si

$$(p, q) = \begin{cases} (1, 1), (1, 2) & \text{cuando } p \text{ es impar,} \\ (2, 1) & \text{cuando } p \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Si p es par, tenemos

$$x^p(y^2 + bx^q) - t = (x^{\frac{p}{2}}y)^2 + bx^{p+q} - t.$$

Por medio de la aplicación birracional $(x, y) \mapsto (x, x^{p/2}y)$, podemos suponer sin pérdida generalidad que trabajamos con

$$C_t = \{(x, y) : y^2 = -bx^{p+q} + t\}. \quad (4.5)$$

De esta manera el género será uno si y solo si se tiene $p+q = 3$ o $p+q = 4$, con p, q relativamente primos. Esto solo es posible con $(p, q) = (2, 1)$.

Si p es impar, resulta que C_t es birracional a

$$\{(x, y) : y^2 = -x(bx^{p+q} + t)\}. \quad (4.6)$$

En consecuencia se tendrá $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q + 1 = 3$ o $p + q + 1 = 4$, con p, q relativamente primos. En este caso, tenemos solución en $(p, q) = (1, 1), (1, 2)$. \square

Lema 4.20. Si $p < 0$ y $p + q \geq 0$, entonces $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si se tiene $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$.

Demostración. Si p es par, entonces C_t es birracional a $C_t = \{y^2 = -bx^{p+q} + t\}$. Luego, $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q = 3$ ó 4 , con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Es decir, $q \in \mathbb{N}$ y $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$.

Por otro lado, si p es impar, C_t es birracional a $C_t = \{y^2 = -x(bx^{p+q} + t)\}$. Así, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q = 3$ ó 4 , con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Luego, $q \in \mathbb{N}$ y $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$. \square

Lema 4.21. *Si $p < 0$ y $p + q \leq 0$, entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$, $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$ con p par, $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ con p impar y $q \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si p es par, tenemos

$$x^p(y^2 + bx^q) - t = (x^{\frac{p}{2}}y)^2 + bx^{p+q} - t.$$

Luego, por medio de los mapeos birrationales $(x, y) \mapsto (x, x^{\frac{p}{2}}y)$ y $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, y)$, la curva C_t es birracional a

$$y^2 = -bx^{-p-q} + t.$$

Por lo tanto, se satisface $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $-p - q = 3$ ó 4 con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$, lo cual es posible si y solo si $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$.

Por otro lado, si p es impar, la curva C_t es birracional a $C_t = \{y^2 = -x(bx^{p+q} + t)\}$. Debido a ello se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q = 3$ o 4 , con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Por lo tanto, $q \in \mathbb{N}$ y $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$. \square

Puesto todo junto tenemos el siguiente resumen.

Proposición 4.22. *La foliación $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x^p(y^2 + bx^q))$ es elíptica si y solamente si $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$ con p par o $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ con p impar y $q \in \mathbb{N}$.* \square

5. Clasificación de foliaciones Lotka-Volterra

En esta sección estudiaremos las foliaciones que poseen integrales primeras holomorfas de la forma

$$f(x, y) = x^p y^q (ax + by + c)^r, \quad (5.1)$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$. El teorema principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 5.1. *Una foliación Lotka-Volterra bajo un cambio de coordenadas afines es elíptica si y solamente si posee una integral primera de la forma*

$$\begin{aligned} f &= x^3 y^{1+3n} (1+y)^{1+3m}, & f &= x^3 y^{2+3n} (1+y)^{2+3m}, \\ f &= x^4 y^{1+4n} (1+y)^{1+4m}, & f &= x^4 y^{3+4n} (1+y)^{3+4m}, \\ f &= x^6 y^{1+6n} (1+y)^{1+5m}, & f &= x^6 y^{4+6n} (1+y)^{4+6m}, \\ f &= x^4 y^{2(1+2u)} (1+y)^r, r \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}, & f &= x^6 y^{3(1+2u)} (1+y)^r, r \in \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}, \\ f &= xy(1-x-y), & f &= xy(1-x-y)^2, \\ f &= x^2 y(1-x-y)^3, & f &= x^2 y(1-x-y)^4, \\ f &= x^3 y(1-x-y)^4, & f &= x^3 y(1-x-y)^6, \\ f &= x^4 y(1-x-y)^6, & f &= x^2 y^3(1-x-y), \\ f &= x^2 y^4(1-x-y), & f &= x^3 y^4(1-x-y), \\ f &= x^3 y^6(1-x-y), & f &= x^4 y^6(1-x-y), \\ f &= xy^2(1-x-y)^2, & f &= x^4 y^2(1-x-y)^3, \\ f &= xy^3(1-x-y)^4, & f &= x^6 y^3(1-x-y)^4, \\ f &= x^3 y^2(1-x-y)^2, & f &= xy^3(1-x-y)^2, \\ f &= x^4 y^3(1-x-y)^2, & f &= xy^4(1-x-y)^3, \\ f &= x^6 y^4(1-x-y)^3, & f &= x^{-3} y^2(1-x-y)^2, \\ f &= xy^2(1-x-y)^3, & f &= x^{-2} y(1-x-y)^3, \\ f &= x^{-2} y^3(1-x-y), & f &= x^{-1} y^2(1-x-y)^2. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que para $a = b = 0$ la fibra genérica de f posee género 0. Debido a ello, basta estudiar por separado algunos casos.

Caso I: $c \neq 0$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ (sección 5.1),

Caso II: $c \neq 0$, $a = 0$ y $b \neq 0$ (sección 5.2),

Caso III: $c = 0$ (sección 5.3).

5.1. Caso I: $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$

El cambio de variables $(x, y) \mapsto \left(\frac{-cx}{a}, \frac{-cy}{b}\right)$ en (5.1) permite reducir el problema a $-b = -c = a = 1$, de modo que f se simplifica a

$$f(x, y) = x^p y^q (1 - x - y)^r, \quad p, q \in \mathbb{Z}^*, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Lema 5.2. *Dado f como en (5.1), en lo que atañe a curvas de género uno, es suficiente estudiar los casos*

- $p > 0, q > 0$.
- $p < 0, q > 0$ y $p + q + r > 0$.

Demostración. Si en (5.1) tenemos $p = 0$ o $q = 0$, entonces la fibra genérica de f posee género 0. Si $p > 0$ y $q > 0$, caemos en el primer caso. Supongamos se tenga $p < 0$ y $q < 0$. Entonces $\frac{1}{f} = x^{-p} y^{-q} (1 - x - y)^{-r}$ es también una integral primera. Por medio del cambio de variable $(x, y) \mapsto (x, 1 - x - y)$ llegamos al caso $p > 0$ y $q < 0$. Este caso podemos reducirlo, por medio del mapa $(x, y) \mapsto (y, x)$ al caso $p < 0$ y $q > 0$. Consideremos entonces las tres posibilidades.

Si $p + q + r > 0$, nos encontramos en el segundo caso, y no hay nada que añadir.

Si $p + q + r < 0$, efectuamos el cambio $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$ para obtener una integral primera de la forma

$$x^{-(p+q+r)} y^q (1 - x - y)^r. \quad (5.3)$$

Es decir, nos encontramos de vuelta en el primer caso.

Si $p + q + r = 0$, entonces se cumple $r = -q - p$ y tendremos

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{1-x-y} \right)^p \left(\frac{y}{1-x-y} \right)^q = x_1^p y_1^q,$$

con $x_1 = \frac{x}{1-x-y}$ e $y_1 = \frac{y}{1-x-y}$. Luego la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p y^q (1-x-y)^r = t\}$ es birracionalmente equivalente a $C_1 = \{(x, y) : x^p y^q = t\}$. Por lo tanto, no es necesario estudiar este caso pues la integral primera posee fibra genérica de género 0, lo que escapa a nuestro interés. \square

Observación 5.3. En el primer caso del lema anterior, por un cambio de variable afín, podemos asumir $0 < p \leq q \leq r$. En efecto, basta usar los cambios de variables $(x, y) \mapsto (x, 1-x-y)$ o $(x, y) \mapsto (1-x-y, y)$.

Proposición 5.4. Sea $C_{p,q,r} = \{x^p y^q (1-x-y)^r = 1\}$, con $\text{mcd}(p, q, r) = 1$ y sujetos a $0 < p \leq q \leq r$. Entonces $C_{p,q,r}$ es de género 1 si y solo si se tiene $(p, q, r) \in \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)\}$.

Demostración. Sea $f(x, y) = x^p y^q (1-x-y)^r$. Entonces df induce una foliación \mathcal{F} que en coordenadas afines viene dada por la 1-forma holomorfa

$$\omega = y(p - py - (p+r)x)dx + x(q - qx - (q+r)y)dy. \quad (5.4)$$

Además, \mathcal{F} en las coordenadas (u, v) y (s, t) , donde $u = \frac{1}{x}, v = \frac{v}{u}, s = \frac{x}{y}$ y $t = \frac{1}{y}$, queda definida por las 1-formas holomorfas

$$\omega_1 = -v(-(p+r+q) + (p+q)u - (p+q+r)v)du + u(-q + qu - (q+r)v)dv, \quad (5.5)$$

y

$$\omega_2 = s(-p + ps - (p+r)t)dt - t(-(p+q+r) + s(p-q) - (p+q+r)t)ds,$$

respectivamente. Luego \mathcal{F} es de grado 2 pues $L_\infty = \{Z = 0\}$ no es \mathcal{F} -invariante. Además, las singularidades de la foliación están dados por el

conjunto $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{A_0 = [0 : 0 : 1], A_1 = [0 : 1 : 1], A_2 = [1 : 0 : 1], A_3 = [p : q : p + q + r], A_4 = [1 : 0 : 0], A_5 = [1 : -1 : 0], A_6 = [1 : 1 : 0], A_7 = \{[0 : 1 : 0]\}$.

Queda claro que $C = C_{p,q,r}$ es de grado $p+q+r$ y satisface $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \{A_4, A_5, A_6\}$. Para calcular el género recurrimos al teorema 2.12, es decir ponemos

$$2 - 2 \text{gén}(C) = \sum_{i=4}^6 i(\mathcal{F}, B_{A_i}) - (p + q + r)(2 - 1), \quad (5.6)$$

donde B_{A_i} son las ramas locales de C en A_i , con $i = 4, 5, 6$.

Calculemos explícitamente $m(\mathcal{F}, B_{A_4})$, las demás multiplicidades son análogas. En coordenadas (u, v, U_1) , tenemos $A_4 = (0, 0)$, mientras la curva C está dada por

$$v^q(1 - u + vu)^r = u^{p+q+r}.$$

Por otro lado, de la ecuación (5.5), la parte lineal del campo asociado en la singularidad A_4 posee autovalores $(q, p+r)$. Pongamos $\lambda = \frac{q}{p+q+r}$. Tenemos dos posibilidades.

Si $\lambda \notin \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}$, entonces por el teorema de la forma normal de Poincaré (ver [3]) existe un biholomorfismo $\varphi : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ con $\varphi(0) = 0$ que satisface $\varphi^*(\omega_1) = (p + q + r)vdu - qudv$.

Si $\lambda = \frac{q}{p+q+r} \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}$, por la forma normal de Dulac (ver [3]), existe un biholomorfismo $\varphi : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ con $\phi(0) = 0$ que satisface $\phi^*(\omega_1) = vdu - (\lambda u + \epsilon v^n)dv$, donde $n = \lambda$ o $\lambda^{-1} \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in \{0, 1\}$. Como \mathcal{F} admite integral primera, se tiene $\epsilon = 0$.

En ambos casos, existe un biholomorfismo ϕ que satisface

$$\omega_1 = (p + q + r)vdu - qudv \quad \text{y} \quad C = \{v^q - u^{p+q+r} = 0\}.$$

Como $i(\mathcal{F}, B_{A_4})$ es invariante por biholomorfismos podemos trabajar en estas coordenadas. Ahora, como se tiene

$$v^q - u^{p+q+r} = \prod_{k=0}^{m-1} \left(v^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p+q+r}{m}} \right),$$

donde $m = \text{mcd}(p + q + r, q) = \text{mcd}(p + r, q)$, se concluye que $B_k = \{v^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p+q+r}{m}} = 0\}$, $i = 0, \dots, m-1$, son las ramas locales de C que pasan por A_4 . Cada rama B_k de C en A_4 está parametrizada localmente por $(t^{\frac{q}{m}}, -e^{2\pi i \frac{k}{m}} t^{\frac{p+r}{m}})$, de donde se sigue la igualdad

$$i(\mathcal{F}, B_k) = 1, \text{ para } k = 0, \dots, m-1.$$

Análogamente, existen $n = \text{mcd}(p, q + r)$ ramas locales B_j' en A_5 tales que $i(\mathcal{F}, B_j') = 1$, y existen $l = \text{mcd}(r, p + q)$ ramas locales B_j'' , tales que $i(\mathcal{F}, B_j'') = 1$. Al poner todo junto llegamos a

$$\sum_{i=4}^6 i(\mathcal{F}, B_{A_i}) = m + n + l,$$

Al sustituir en (5.6) logramos

$$2 - 2 \text{gén}(C) = m + n + l - (p + q + r). \quad (5.7)$$

En consecuencia, C es elíptica si y solamente si se cumple

$$p + q + r = m + n + l. \quad (5.8)$$

Veamos para qué valores se satisface (5.8). Como $m = \text{mcd}(q, r + p) \leq q$, $n = \text{mcd}(p, r + q) \leq p$ y $l = \text{mcd}(r, p + q) \leq r$, se tiene (5.8) si y solo si $\text{mcd}(q, p + r) = q$, $\text{mcd}(p, q + r) = p$ y $\text{mcd}(r, p + q) = r$.

A fin de tener $\text{mcd}(q, p + r) = q$, $\text{mcd}(p, q + r) = p$ y $\text{mcd}(r, p + q) = r$ deben existir $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ sujetos a

$$r + p = \alpha q, \quad r + q = \beta p, \quad p + q = \gamma r.$$

De estas igualdades obtenemos

$$(\alpha + 1)q = (\beta + 1)p, \quad (5.9)$$

$$(\beta + 1)p = (\gamma + 1)r, \quad (5.10)$$

$$(\gamma\beta - 1)p = (\gamma + 1)q. \quad (5.11)$$

Como se tiene $p \leq q \leq r$, de (5.9) y (5.10) concluimos $\beta \geq \alpha \geq \gamma$. Por otro lado, de (5.9) y (5.11) obtenemos

$$\frac{q}{p} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} = \frac{\gamma\beta - 1}{\gamma + 1},$$

de donde se logra

$$\alpha\gamma\beta = 2 + \alpha + \beta + \gamma, \quad \beta \geq \alpha \geq \gamma. \quad (5.12)$$

Al final tenemos diversas posibilidades.

Si $\alpha = \beta$, la ecuación (5.12) se reduce a $\beta^2\gamma = 2 + 2\beta + \gamma$, lo cual es equivalente a $2 = \gamma(\beta - 1)$. Esto solo es posible con $(\beta, \gamma) = (3, 1)$ o $(2, 2)$, de donde obtenemos dos ternas $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 3, 1)$ y $(2, 2, 2)$. Luego, de las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) y de los valores obtenidos para (α, β, γ) , se logra $(p, q, r) = (1, 1, 2)$ o $(1, 1, 1)$.

Análogamente, si $\alpha = \gamma$, entonces $\gamma^2\beta = 2 + 2\gamma + \beta$ equivale a $2 = \beta(\gamma - 1)$. Como se tiene $\gamma \leq \beta$ se sigue $\gamma = \beta = 2$, y así $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 2, 2)$ y $(p, q, r) = (1, 1, 1)$.

Si $\beta > \alpha > \gamma$, de (5.12) obtenemos

$$\alpha\beta\gamma < 2 + 3\beta,$$

que equivale a $\beta(\gamma\alpha - 3) < 2$. Luego, si $\alpha\gamma > 3$, la ecuación anterior implica que $\beta = 1$, una contradicción. Por lo tanto, $\alpha\gamma \leq 3$ que, junto con $\gamma < \alpha$, implica $\gamma = 1$ y $\alpha = 2$ o 3 . Sin embargo, $\alpha = 3$ y $\gamma = 1$ en (5.12) implican $\beta = 3$, otra contradicción. Entonces $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ y, por (5.12), $\beta = 5$. Así obtenemos la terna $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 5, 1)$ y $(p, q, r) = (1, 2, 3)$. \square

Ahora estudiaremos en detalle el segundo caso del lema 5.2.

Proposición 5.5. Sea $C_{p,q,r} = \{y^q(1 - x - y)^r = x^p\}$, donde $p > 0$, $q > 0$, $-p+q+r > 0$ y $\text{mcd}(p, q, r) = 1$. Entonces se tiene $\text{gén}(C_{p,q,r}) = 1$

si y solamente si (p, q, r) pertenece a la siguiente tabla

p	q	r	p	q	r	p	q	r	p	q	r
2	1	3	2	3	1	1	2	2	3	2	2
2	1	4	2	4	1	1	2	3	1	3	2
3	1	4	3	4	1	4	2	3	4	3	2
3	1	6	3	6	1	1	3	4	1	4	3
4	1	6	4	6	1	6	3	4	6	4	3

Demostración. Sea $C = \{y^q(1-x-y)^r = x^p\}$ y $f(x, y) = \frac{y^q(1-x-y)^r}{x^p}$. Entonces df induce una foliación \mathcal{F} dada por las formas

$$\omega = y(-p + py - (-p + r)x)dx + x(q - qx - (q + r)y)dy, \quad (5.13)$$

$$\omega_1 = -v(-(p + r + q) + (p + q)u - (p + q + r)v)du + u(-q + qu - (q + r)v)dv, \quad (5.14)$$

en las coordenadas (x, y) y (u, v) , respectivamente. Luego $\deg(\mathcal{F}) = 2$ y $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{A_0 = [0 : 0 : 1], A_1 = [0 : 1 : 1], A_2 = [1 : 0 : 1], A_3 = [-p : q : -p + q + r], A_4 = [1 : 0 : 0], A_5 = [1 : -1 : 0], A_6 = [1 : 1 : 0], A_7 = [1 : 0 : 0]\}$. Por su parte, la curva C tiene grado $q + r$ y cumple $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \{A_0, A_1, A_4, A_6\}$.

Calculemos $i(\mathcal{F}, B_{A_0})$, donde B_{A_0} es una rama local de C en A_0 . Por el mismo argumento de la proposición 5.4, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que se tiene

$$\omega = -pydx + qxdy \quad \text{y} \quad C_{p,q,r} = \{y^q - x^p = 0\}.$$

Sea $m = \text{mcd}(p, q)$. Dada la factorización

$$y^q - x^p = \prod_{k=0}^{m-1} (y^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} x^{\frac{p}{m}}),$$

se tiene que en A_0 existen m ramas $B_k = \{y^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} x^{\frac{p}{m}} = 0\}$ tales que $i(\mathcal{F}, B) = 1$. Análogamente, en A_1 (resp. A_4 y A_6), existen $n =$

$\text{mcd}(p, r)$ (respectivamente $l = \text{mcd}(r, -p + q + r)$ y $k = \text{mcd}(q, -p + q + r)$) ramas locales B tales que $i(\mathcal{F}, B) = 1$. Al reemplazar en (5.6) se llega a

$$2 - 2 \text{gén}(C) = m + n + l + k - (q + r).$$

De este modo $C_{p,q,r}$ es una curva elíptica si y solamente si se tiene

$$q + r = m + n + l + k. \quad (5.15)$$

La proposición se sigue en virtud de [1, Lemma 4.8]. \square

5.2. Caso II: $a = 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$

Al tenerse $bc \neq 0$, podemos suponer que la integral primera tiene la forma $f(x, y) = x^p y^q (\frac{b}{c}y + 1)^r$. Tras un cambio de variable $y \mapsto \frac{c}{b}y$, podemos suponer además $b = c = 1$ y

$$f(x, y) = x^p y^q (y + 1)^r. \quad (5.16)$$

Lema 5.6. *Con las notación anterior, por medio de un cambio birracional de variables, podemos suponer $p > 0$ y $q > 0$.*

Demostración. Si $p < 0$, hacemos el cambio birracional $(x, y) \mapsto (1/x, y)$. Luego se tendrá $f(x, y) = x^{-p} y^q (y + 1)^r$ y así todo se reduce a $p > 0$. Si $q < 0$ se tiene

$$x^p y^q (y + 1)^r = (xy^{-n})^p y^{q+np} (y + 1)^r, \quad (5.17)$$

para todo n . En particular existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q + n_0 p > 0$. Luego, por medio del mapa $(x, y) \mapsto (xy^{-n_0}, y)$ podemos reducir todo a $q > 0$. \square

Esto naturalmente deriva en la siguiente proposición.

Proposición 5.7. *La curva algebraica*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p y^q (1 + y)^r = 1\},$$

con $p, q, r \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(p, q, r) = 1$, es elíptica si y solamente si bajo permutaciones de $\{y = 0\}$ y $\{y + 1 = 0\}$ se encuentra en la siguiente lista:

$$\begin{aligned} x^3 y^{1+3n} (1+y)^{1+3m} &= 1, & x^3 y^{2+3n} (1+y)^{2+3m} &= 1, \\ x^4 y^{1+4n} (1+y)^{1+4m} &= 1, & x^4 y^{3+4n} (1+y)^{3+4m} &= 1, \\ x^6 y^{1+6n} (1+y)^{1+5m} &= 1, & x^6 y^{4+6n} (1+y)^{4+6m} &= 1, \\ x^4 y^{2(1+2u)} (1+y)^r &= 1, \quad r \in \mathbb{Z}^* \setminus 2\mathbb{Z}, \\ x^6 y^{3(1+2u)} (1+y)^r &= 1, \quad r \in \mathbb{Z}^* \setminus 3\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Demostración. Como trabajamos con $t^* \in \mathbb{C}$ genérico, podemos reducir todo a $t = 1$. Sea entonces $C = C_{p,q,r} = \{x^p y^q (1-x-y)^r = 1\}$ y $f = x^p y^q (1-x-y)^r$. Tal como en la proposición 5.5, df induce una foliación \mathcal{F} en \mathbb{P}^2 que en las coordenadas (x, y) , (u, v) y (s, t) viene dada por

$$\omega = \frac{df}{x^{p-1} y^{q-1} (y+1)^{r-1}} = py(1+y)dx + x(q + (q+r)y)dy \quad (5.18)$$

$$= u(qu + (q+r)v)dv - v((p+q)u + (p+q+r)v)du, \quad (5.19)$$

$$= ps(s+1)dt - t(p+q+r+s(p+q))ds, \quad (5.20)$$

respectivamente. De esta manera se tiene $\deg(\mathcal{F}) = 2$, pues L_∞ no es \mathcal{F} -invariante. Además, el grado de $C_{p,q,r}$ es $p+q+r$ y $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \{A_3 = [1:0:0], A_4 = [0:1:0]\}$. Así, por el teorema 2.12 tenemos

$$2 - 2 \text{gén}(C) = \sum_{B_{A_3}} m(\mathcal{F}, B_{A_3}) + \sum_{B_{A_4}} m(\mathcal{F}, B_{A_4}) - (p+q+r)(2-1), \quad (5.21)$$

donde B_{A_3} y B_{A_4} son las ramas locales de C en A_3 y A_4 .

Sea B_{A_3} una rama local de C en A_3 . Entonces en las coordenadas (u, v, U_1) , se tendrá $A_3 = (0, 0)$ y $C_{p,q,r} = \{v^q(u+v)^r - u^{p+q+r} = 0\}$. De la ecuación (5.19) concluimos que \mathcal{F} es dada en una vecindad de U_{A_3} de A_3 por

$$u(qu + (q+r)v)dv - v((p+q)u + (p+q+r)v)du.$$

Luego, si $\pi_{A_3} : \tilde{U}_{A_3} \rightarrow U_{A_3}$ es el *blow-up* en A_3 , entonces $\pi_{A_3}^* \mathcal{F}$ en las coordenadas (u, t) , con $v = ut$, viene dada por

$$\omega_{p_1} = -t(p + pt)du + u(q + (q + r)t)dt, \quad (5.22)$$

y, en las coordenadas (s, t) , con $u = vt$, por

$$\omega_{p_2} = p(t - t^2)du + u(-r + (q + r)t)dt. \quad (5.23)$$

Con $\tilde{C} = \{f(u, t) = t^q(1+t)^r - u^p\}$ el transformado estricto de C se tiene $\pi_{A_3}^* \mathcal{F} \cap \tilde{C} = \{p_1 = (0, 0), p_2 = (0, -1)\}$. En las formulas (5.22) y (5.23), como $\pi_{A_3}^* \mathcal{F}$ posee integral primera, gracias a los teoremas de linealización de Poincaré y Dulac, podemos suponer sin pérdida de generalidad que se cumple

$$\omega_{p_1} = -ptdu + qudt, \quad \omega_{p_2} = ptdu - rudt.$$

Sea \tilde{B}_{p_1} una componente de la curva $t^q = u^p$ o de la curva $t^r = u^p$. Para $m = \text{mcd}(p, q)$ se tiene

$$t^q - u^p = \prod_{k=0}^{m-1} (t^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p}{m}}).$$

Por lo tanto, se satisface $\tilde{B}_{p_1} = \{t^{\frac{q}{m}} = e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p}{m}}\}$ para algún $k \in \{0, \dots, m-1\}$. En particular, se logra $i(\pi_{A_3}^* \mathcal{F}, \tilde{B}_{p_1}) = 1$. Por el teorema 2.11, como A_3 es una singularidad no dicrítica, si $\pi(\tilde{B}_{p_1}) = B_{A_3}$ tenemos

$$i(\mathcal{F}, B_{A_3}) = i(\pi_{A_3}^* \mathcal{F}, \tilde{B}_{p_1}) + m_{A_3}(B_{A_3})(l-1) = 1 + m_{A_3}(B_{A_3}), \quad (5.24)$$

donde m_{A_3} es la multiplicidad de la rama B_{A_3} . De esta manera por (5.24), para calcular $i(\mathcal{F}, B_{A_3})$ es suficiente calcular $m_{A_3}(B_{A_3})$. Como $\tilde{\alpha}_i(z) = (z^{\frac{q}{m}}, z^{\frac{p}{m}})$ es una parametrización de Puiseux para la rama \tilde{B}_{p_1} , se concluye que $\alpha_i(z) = (z^{\frac{q}{m}}, e^{2\pi i \frac{k}{mq}} z^{\frac{p}{m}})$ es una parametrización de Puiseux de B_{A_3} . Del teorema de parametrización de Puiseux se obtiene $m_{A_3}(B_{A_3}) = \min(\frac{q}{m}, \frac{p+q}{m}) = \frac{q}{m}$. Luego, al reemplazar en (5.24) logramos

$$i(\mathcal{F}, B_{A_3}) = 1 + \frac{q}{m}.$$

Análogamente, si \tilde{B}_{p_2} es una de las ramas de la curva $t^r = u^p$ que pasan por p_2 , se tendrá $i(\mathcal{F}, B_{A_3}) = 1 + \frac{r}{n}$, donde $\pi(\tilde{B}_{p_2}) = B_{A_3}$. Además, existen $l = \text{mcd}(p, q + r)$ ramas en A_4 , tales que $i(\mathcal{F}, B_{A_4}) = 1$. Por lo tanto en (5.21) conseguimos

$$2-2 \text{gén}(C) = \sum_{i=1}^m (1 + \frac{q}{m}) + \sum_{i=1}^n (1 + \frac{r}{n}) + \sum_{i=1}^l -(p+q+r)(2-1) = m+n+l-p.$$

En pocas palabras, se tendrá $\text{gén}(C) = 1$ si y solamente si $p = m + n + l$.

Al poner $n = \text{mcd}(p, r)$, $m = \text{mcd}(p, q)$ y $l = \text{mcd}(p, q + r)$ existirán valores $\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ sujetos a

$$p = n\gamma, \quad p = m\beta, \quad p = l\alpha.$$

De estas ecuaciones, debido a la condición $p = m + n + l$, se pasa a

$$\gamma\beta\alpha = \gamma\alpha + \beta\alpha + \beta\gamma. \quad (5.25)$$

Como las variables α, β, γ en (5.25) son permutables, calcularemos las soluciones en el caso $\gamma \leq \alpha \leq \beta$. Si $\alpha = \beta$ o $\alpha = \gamma$, la terna tendrá que ser $(\gamma, \alpha, \beta) = (2, 4, 4)$ o $(3, 3, 3)$. Analicemos cada caso por separado.

Para el caso $(\gamma, \alpha, \beta) = (3, 3, 3)$, se tiene $p = 3n = 3m = 3l$ y $m = n = l$. Como p, q, r no tienen factores comunes se cumplirá $n = m = l = 1$ y $p = 3$. Por el algoritmo de la división, existen enteros $u, t \in \mathbb{N}$ sujetos a $r = 3u + t$, con $0 \leq t < 3$. Al ser p, r relativamente primos, esto fuerza $t = 1, 2$. En consecuencia r puede ser de la siguiente formas

$$r = 3u + 1 \text{ o } r = 3u + 2. \quad (5.26)$$

Análogamente, existen $v, s \in \mathbb{N}$ tales que $q = 3v + s$, con $0 \leq s < 3$. Como $\text{mcd}(p, q) = 1$ se tiene $s = 1$ o 2 , lo que implica $q = 3v + 1$ o $q = 3v + 2$, respectivamente. De esto, como además se tiene $\text{mcd}(3, q + r) = 1$, por la ecuación (5.26), obtenemos

$$(p, q, r) = (3, 3v + 1, 3u + 1) \text{ o } (3, 3v + 2, 3u + 2). \quad (5.27)$$

Ahora veamos el caso $(\gamma, \alpha, \beta) = (2, 4, 4)$. En este caso, $p = 2n = 4n = 4l$, así $m = l$ y $n = 2l = 2m$. Como $\text{mcd}(p, q, r) = 1$ tenemos $l = m = 1$, $n = 2$ y $p = 4$. Similarmente al caso anterior, existen enteros u, v y t, s tales que $q = 4u + t$ y $r = 4v + s$, con $0 \leq s, t < 4$. Como $m = \text{mcd}(p, q) = n = \text{mcd}(p, r) = 1$ y $l = \text{mcd}(p, q + r) = 2$, entonces $t, s \neq 0$ y $t + s$ es par y no es múltiplo de 4. Por lo tanto, obtenemos las familias de soluciones

$$\begin{aligned}(p, q, r) &= (4, 4u + 1, 4v + 1), \quad u, v \in \mathbb{N}, \\(p, q, r) &= (4, 4u + 3, 4v + 3), \quad u, v \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Si $\beta > \alpha > \gamma$, por (5.25), $\gamma = 2$, $\alpha = 3$ y $\beta = 6$. En este caso, $p = 2n = 6m = 3l$. Como $\text{mcd}(p, q, r) = 1$ entonces $m = 1$, $n = 3$ y $l = 2$ y $p = 6$. Por el mismo argumento que en los casos anteriores, obtenemos $(p, q, r) = (6, 6u + 1, 6v + 3)$ o $(p, q, r) = (6, 6u + 5, 6v + 3)$, con $u, v \in \mathbb{N}$. \square

5.3. Caso III: $c = 0$

En este caso se tiene $b \neq 0$ y $a \neq 0$. Por medio del cambio de coordenadas $x \mapsto \frac{x}{a}$ y $y \mapsto \frac{y}{b}$ podemos suponer $a = b = 1$ y $f(x, y) = x^p y^q (x + y)^r$. Por medio del cambio birracional $(x', y') \mapsto (x', \frac{x'}{y'})$, reducimos el trabajo a $f(x', y') = x'^{p+q+r} y'^q (1 + y')^r$ y regresamos al caso 5.2.

Referencias

- [1] BUENO, O. AND PUCHURI, L., *A new proof of the classification of Elliptic Foliations induced by real Quadratic Fields with center*. ArXiv e-prints 1606.00098v1, 2016.
- [2] CAMACHO, C., LINS NETO, A., AND SAD, P., *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geom. 20, 1 (1984), 143–174.

- [3] CAMACHO, C., AND SAD, P., *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. [16th Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.
- [4] CERVEAU, D., AND LINS NETO, A., *Holomorphic foliations in $\mathbf{CP}(2)$ having an invariant algebraic curve*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41, 4 (1991), 883–903.
- [5] FERNANDEZ, P., *Topología de las singularidades de curvas analíticas irreducibles planas*. Master’s thesis, Universidade Federal Fluminense, 1998.
- [6] GAUTIER, S., *Quadratic centers defining elliptic surfaces*. Journal of Differential Equations, 12 (2008), 3545–3569.
- [7] KAPTEYN, W., *On the midpoints of integral curves of differential equations of the first order and the first degree*. Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. 19 (1911), 1446–1457.
- [8] PUCHURI, L., *Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por campos cuadráticos reales con centro*. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Ingeniería, 2015.
- [9] REYSSAT, E., *Quelques Aspects Des Surfaces de Riemann*. Birkhäuser-Verlag, 1989.

Abstract

Embedded in the study of Hilbert’s infinitesimal problem is the question of existence and number of limit cycles of linear perturbations of Hamiltonian fields. Since there is available a classification of real quadratic fields with center in \mathbb{R}^2 , we can match them with complex fields in \mathbb{C}^2

that induce a foliation in \mathbb{P}^2 . Our objective is to classify the foliations in \mathbb{P}^2 induced by the fields obtained by said classification of quadratic fields with center which are elliptic fibrations, that is, the ones with level curves of genus one.

keywords: Limit cycles, Hilbert's 16th problem, elliptic foliations.

Liliana Puchuri

Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA)
Calle Los Biólogos 245
Urb. San César - Primera Etapa, La Molina
Perú

Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel
Perú
lpuchuri@pucp.pe

Polígono de Newton de una foliación de tipo curva generalizada

Percy Fernández^{1,2}, Nancy Saravia^{1,2,3,4}

Marzo, 2016

Resumen

Foliaciones de tipo curva generalizada son una clase de foliaciones que tienen una reducción de singularidades similar a la que existe para curvas. Camacho, Lins Neto and Sad mostraron que aquellas que son no dicríticas tienen la misma reducción que la de su conjunto de separatrices. En este artículo presentamos una prueba novedosa del teorema de Dulac utilizando técnicas de Rouillé. Este teorema muestra que para foliaciones no dicríticas de tipo curva generalizada su polígono de Newton y el su conjunto de sepatrices coinciden. Mediante el teorema de Dulac retornamos a un resultado conjeturado por Loray que no es del todo cierto, como fue anotado por Fernández, Mozo y Neciosup.

MSC(2010): 37F75.

Palabras clave: foliaciones, polígono de Newton de una foliación, foliaciones de tipo curva generalizada.

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú.

² DGI 2015-1-0045, PUCP.

³ PAID 2014-0009, PUCP.

⁴ Beca Marco Polo 2015, PUCP

1. Introducción

Consideremos un germen de foliación \mathcal{F}_ω definido por una 1-forma holomorfa ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con una singularidad en $0 \in \mathbb{C}^2$. El origen es una **singularidad simple** de \mathcal{F}_ω si existen coordenadas locales (x, y) que permiten escribir $\omega = (\lambda x dy - \mu y dx) + \omega_1$, donde $\text{mult}(\omega_1) \geq 2$ y

1. $\lambda\mu \neq 0$ y $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$, o
2. $\lambda\mu = 0$ y $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Las singularidades del tipo 1) son llamadas **singularidades no degeneradas**, mientras que las del tipo 2) se conocen como **sillas nodo**. Por el teorema de Seidenberg [20] toda singularidad se puede reducir a singularidades simples mediante un número finito de explosiones.

Una foliación \mathcal{F}_ω de tipo **curva generalizada** es por definición una foliación cuya reducción admite solo singularidades simples no degeneradas. En general, no es suficiente hacer la reducción de singularidades del conjunto de separatrices para desingularizar la foliación \mathcal{F}_ω . Sin embargo, Camacho, Lins Neto y Sad [4] muestran que las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas tienen la misma reducción de singularidades que la de su conjunto de separatrices (ver sección 3).

La **multiplicidad** en $0 \in \mathbb{C}^2$ de la foliación \mathcal{F}_ω dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$, se define como $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$. En [4] se muestra que la multiplicidad de una curva generalizada es un invariante topológico; con ello se extiende el resultado al caso de curvas. El **número de Milnor** $\mu(\mathcal{F}_\omega)$ de \mathcal{F}_ω se define como la multiplicidad de intersección $\mu(\mathcal{F}_\omega) = (A, B)_0$. En [4] se demuestra que si \mathcal{F}_ω tiene un número finito de separatrices y $\mathcal{C}_f : f = 0$ es una ecuación reducida de sus separatrices, entonces se tiene $\mu(\mathcal{F}_\omega) \geq \mu(f)$ y se cumple la igualdad si y solo si \mathcal{F}_ω es de tipo curva generalizada. Además, en este caso se satisface $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega) = \text{mult}(\mathcal{C}_f) - 1$.

Denotamos por $\mathcal{N}(\omega)$ al polígono de Newton de ω . En este trabajo, vía técnicas de Rouillé ([19]), presentamos una prueba de un resultado de Dulac (ver [9]).

Teorema 1.1. *Si ω_1 y ω_2 son dos foliaciones de tipo curva generalizada no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices, entonces se tiene*

$$\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2).$$

Como consecuencia del teorema 1.1 se obtiene que las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas tienen el mismo polígono de Newton que el de su conjunto de separatrices.

Como aplicación del teorema 1.1 probamos un resultado que involucra las singularidades de tipo nilpotente. Un germen de foliación \mathcal{F}_ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se llama **nilpotente** si está generado por un campo de vectores X con parte lineal nilpotente y no nula. El resultado más significativo sobre las singularidades nilpotentes fue dado por F. Takens en 1974 [22]. Dicho resultado indica que, formalmente, podemos expresar el campo X en la forma

$$X = (y + a(x)) \frac{\partial}{\partial x} + b(x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.1)$$

con $\text{ord}(a), \text{ord}(b) \geq 2$. La presentación del campo dada en (1.1) se denomina **forma normal de Takens**. Consideremos $n = \text{ord}(b) + 1 \geq 3$ y $m = \text{ord}(a) \geq 2$. La foliación que define el campo X dado en (1.1) se escribe

$$\omega = -b(x)dx + (y + a(x))dy.$$

Un cambio de coordenadas en x permite tomar x' tal que $-b(x)dx = \frac{n}{2}(x')^{n-1}dx'$. Al reexpresar x como x' se obtiene así

$$\omega = \frac{1}{2}d(x^n + y^2) + \tilde{a}(x)dy.$$

Luego, al menos formalmente, toda foliación nilpotente se encuentra generada por una 1-forma del tipo

$$d(y^2 + x^n) + x^m u(x)dy, \quad (1.2)$$

donde $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $u(0) \neq 0$, $m \geq 2$ y $n \geq 3$.

Las singularidades nilpotentes han sido estudiadas por muchos autores. En el proceso de reducción de singularidades se consideran tres casos $2m > n$, $2m = n$ y $2m < n$.

D. Cerveau y R. Moussu [6] estudian las formas dadas en (1.2) cuando $n < 2m$, $u(0) \neq 0$ y $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. En este caso, la foliación tiene una curva invariante analíticamente equivalente a $y^2 - x^n = 0$ (por esta razón estas foliaciones son llamadas **cuspidales**). En el estudio de estas foliaciones, es interesante escribir explícitamente aquellas que tienen $y^2 - x^n = 0$ como separatriz. D. Cerveau y R. Moussu [6] muestran que estas foliaciones pueden ser definidas por una 1-forma holomorfa

$$\omega = d(y^2 - x^n) + A(x, y)(nydx - 2xdy). \quad (1.3)$$

R. Meziani [16] estudia el caso $n = 2m$ bajo condiciones genéricas sobre $u(0)$. En caso de no satisfacerse estas condiciones, la foliación tiene una silla-nodo en su reducción de singularidades o es dicrítica. Se trata de una foliación que no es curva generalizada, y la reducción de singularidades requiere un mayor número de explosiones que las necesarias para reducir el conjunto de separatrices.

El caso $2m < n$ es estudiado por M. Berthier, R. Meziani y P. Sad [1] cuando la silla-nodo que aparece tras la reducción de singularidades admite dos separatrices analíticas. Si dicha silla-nodo solo admite una separatriz analítica (y una separatriz formal), el caso es estudiado por E. Stróżyńska [21], quien utiliza de manera fuerte el trabajo de Martinet y Ramis [14].

F. Loray [13] estudia las formas del tipo (1.3) desde un punto de vista más general y obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2. *La foliación \mathcal{F}_ω dada por*

$$\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$$

admite la misma reducción que $d(y^p - x^q)$ cuando se satisface

$$\text{ord}_{(p,q)} \Delta(x, y) > \frac{pq - p - q}{\text{mcd}(p, q)}.$$

□

Según F. Loray, que una foliación como la dada en la proposición 1.2 tenga la misma reducción que su separatriz $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ debiera ser equivalente a que se cumpla $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q$; y así fue como enunció originalmente la proposición. Sin embargo, Fernández, Mozo y Neciosup [10] proporcionan un contraejemplo cuando p y q no son coprimos; ello muestra que la condición de Loray es suficiente mas no necesaria.

En este trabajo como consecuencia del teorema 1.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Si la foliación $\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$ es de tipo curva generalizada con $\text{mcd}(p, q) = 1$, entonces se cumple*

$$\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q.$$

El teorema 1.3 muestra que el resultado de Loray es cierto para el caso p y q coprimos cuando la foliación es curva generalizada.

2. Curvas analíticas planas

Denotemos por $\mathbb{C}[[x, y]]$ el anillo de series de potencias formales en dos variables con coeficientes en \mathbb{C} y por $\mathbb{C}\{x, y\}$ el subanillo de $\mathbb{C}[[x, y]]$ formado por series de potencias que convergen en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$. Una serie convergente define una función holomorfa en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$ y, recíprocamente, toda función holomorfa admite localmente una representación única como serie de potencias en $0 \in \mathbb{C}^2$. Denotaremos por \mathcal{M}_2 el ideal maximal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ generado por x e y .

Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una serie convergente. Toda serie de potencias convergente f se escribe como suma de polinomios homogéneos, llamados **componentes homogéneas** de f , esto es, tenemos $f(x, y) = \sum_k f_k(x, y)$, donde $f_k(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ es homogéneo de grado k .

Se denomina **forma inicial** de f a la componente homogénea de menor grado. El **orden** de f , denotado por $\text{ord}(f)$, se define como el

grado de su forma inicial. Por convención, cuando $f(x, y)$ es idénticamente nula, ponemos $\text{ord}(f) = \infty$.

Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica compleja u holomorfa** en $a \in U$ si coincide en un entorno de a con una serie de potencias convergente. Diremos que f es analítica en U si lo es en todo punto de U .

Dada una función analítica $f(x, y)$ definida en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$, definimos el conjunto de ceros de f por $\{f(x, y) = 0\}$, el cual será denotado por \mathcal{C}_f . Este conjunto es la **curva analítica compleja** definida por f . El germen de \mathcal{C}_f en $0 \in \mathbb{C}^2$ será denotada por $(\mathcal{C}_f, 0)$, y será referida como **germen de curva analítica compleja** definida por f en el origen.

Obsérvese que $\mathbb{C}\{x, y\}$ es isomorfo al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un punto $a \in \mathbb{C}^2$.

Ejemplo 2.1. La curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ define un germen de curva analítica.

Notemos que un producto $u \cdot f$ determina el mismo germen de curva analítica que f cuando u no se anula en un entorno del origen (y por consiguiente representa una unidad de $\mathbb{C}\{x, y\}$). Por otro lado, sabemos que $\mathbb{C}\{x, y\}$ es un dominio de factorización única, y si tenemos

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_l^{r_l},$$

donde los f_i son irreducibles y $r_i \in \mathbb{N}$, entonces el germen $\mathcal{C}_f : f = 0$ coincide con el germen $f_1 \cdot f_2 \cdots f_l = 0$; de donde obtenemos la descomposición

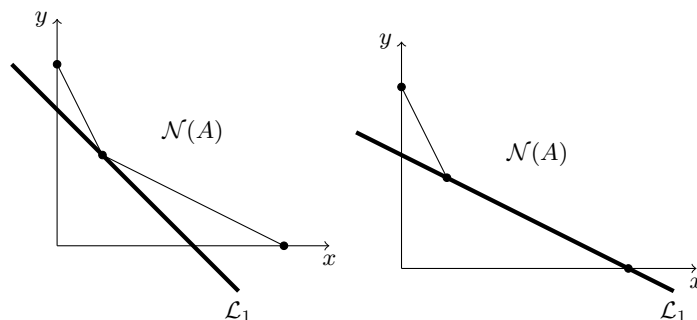
$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{f_l}.$$

Llamaremos **rama analítica** a todo germen de curva analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$, donde f es irreducible como elemento de $\mathbb{C}\{x, y\}$. Así, todo germen de curva analítica es unión de ramas analíticas. Dado que ya hemos definido el orden de una serie analítica de potencias, podemos definir la **multiplicidad del germen de una curva analítica** \mathcal{C}_f como el orden

de f . Diremos que el germen de curva es **regular** si su multiplicidad es igual a uno. Si la multiplicidad es mayor que uno, el germen de curva es **singular**.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}^2$. Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ a la envolvente convexa de $A + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$, donde $+$ denota la suma de Minkowski. Además denotaremos por $\mathcal{N}(A)$ el borde de $\mathcal{D}(A)$.

Si L es un lado del polígono $\mathcal{N}(A)$, denotamos por \mathcal{L} a la recta que contiene dicho lado. Decimos que una recta \mathcal{L}_1 es **recta de apoyo** de $\mathcal{N}(A)$ si cumple $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ y $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{L}_1^+$ (ver Anexo (8.1)).



Obsérvese que la intersección de una recta de apoyo de $\mathcal{N}(A)$ con dicho polígono contiene a un único vértice de $\mathcal{N}(A)$ o bien a todo un lado compacto del mismo.

La recta \mathcal{L} tiene **inclinación** μ si $-\frac{1}{\mu}$ es su pendiente.

Observación 2.2. Si el polígono $\mathcal{N}(A)$ corta los ejes coordenados, los ejes son rectas de apoyo de $\mathcal{N}(A)$.

Dado un germen de curva analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$ donde $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, el **soporte** de \mathcal{C}_f , denotado por $\text{Sop}(f)$, se define por

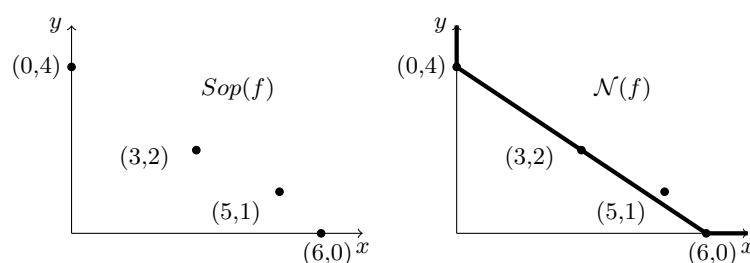
$$\text{Sop}(f) = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}.$$

El **polígono de Newton** de \mathcal{C}_f , denotado por $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(\text{Sop}(f))$, es el borde de $\mathcal{D}(\text{Sop}(f))$. Observemos que se tiene $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(uf)$ para todo $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$, siempre que $u(0, 0) \neq 0$.

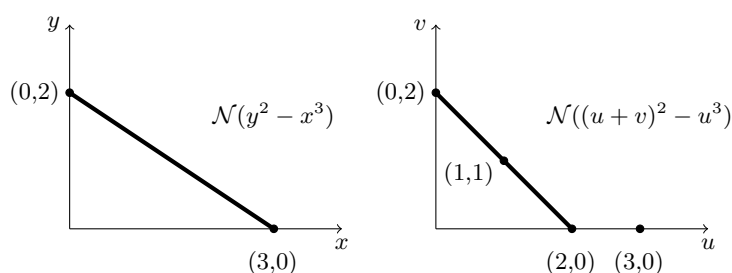
Ejemplo 2.3. El soporte de $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ es

$$\text{Sop}(f) = \{(0, 4), (3, 2), (6, 0), (5, 1)\},$$

y lo dibujamos en la siguiente figura, así como su polígono de Newton.



Ejemplo 2.4. Para el germen de curva $\mathcal{C}_f : y^2 - x^3 = 0$ tenemos que su soporte es dado por $\text{Sop}(f(x, y)) = \{(3, 0), (0, 2)\}$. Si hacemos el cambio de coordenadas $x = u$ e $y = u + v$ el soporte del germen de curva en las nuevas coordenadas es $\text{Sop}(f(u, v)) = \{(3, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$. Concluimos que los polígonos $\mathcal{N}(y^2 - x^3)$ y $\mathcal{N}((u + v)^2 - u^3)$ no son iguales como muestra la siguiente figura. En consecuencia el polígono de Newton de una curva depende de las coordenadas.



Denotamos $\mathbb{C}\{x\}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}\{x^{1/n}\}$ el **anillo de series de potencias fraccionarias** con coeficientes en \mathbb{C} . Si $\gamma \in \mathbb{C}\{x\}^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\gamma = \sum_i a_i x^{i/n}$. Llamamos **orden** de γ a $\text{ord}(\gamma) = \min\{i/n : a_i \neq 0\}$.

Teorema 2.5 (Teorema de Newton, [12, Theorem 3.8]). *Sea $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $f(0, 0) = 0$ y $f(0, y) \neq 0$. Entonces existe $\gamma(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$ con $\gamma(0) = 0$ tal que $f(x, \gamma(x)) = 0$.* \square

Diremos que $y(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$ es una **raíz de Newton-Puiseux** del germen de curva $\mathcal{C}_f : f(x, y) = 0$ si $f(x, y(x)) = 0$.

Recordemos que f es **polinomio de Weierstrass** en y si es de la forma

$$f(x, y) = y^m + a_1(x)y^{m-1} + a_2(x)y^{m-2} + \cdots + a_m(x),$$

donde $n \geq 1$ y $\text{ord}(a_i(x)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Al aplicar el teorema de preparación de Weierstrass (cf. [12]) a $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ obtenemos $f = u \cdot f^*$, con $f^* \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass. Para el estudio que realizamos aquí es indiferente considerar la serie f o su polinomio de Weierstrass.

Lema 2.6 ([8, Lemme 8.4.2]). *Sea $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass de orden n con raíces $\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)$ en $\mathbb{C}^*\{x\}$. Entonces su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene tantos lados compactos como los distintos órdenes aparecen entre los $\gamma_k(x)$. A cada lado de inclinación μ y extremos (i_1, j_1) e (i_2, j_2) , con $j_1 > j_2$, le corresponde una recta de ecuación $i + \mu j = c_k$, cuya altura es igual al número de raíces con ese orden; estas raíces quedan por lo tanto parametrizadas por*

$$y(x) = a_i x^\mu + \eta_i(x),$$

con $\text{ord}(\eta_i(x)) > \mu$ y $a_i \neq 0$. \square

Teorema 2.7 (Teorema de Puiseux, [8, Théoreme 8.6.1]). *Sea \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible con multiplicidad n . Si $y(x) = \sum_{i \geq n} a_i x^{i/n}$*

es una raíz de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_f y ε es una raíz primitiva n -ésima de la unidad, entonces

$$y_j(x) = y(\varepsilon^j x) = \sum_{i \geq n} a_i \varepsilon^{ij} x^{i/n},$$

con $j \in \{1, \dots, n\}$, son todas las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f . \square

El teorema de Newton afirma que existe una raíz de Newton-Puiseux, y el teorema de Puiseux nos dice cómo obtenerlas en el caso de una curva irreducible. Si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es irreducible, por el teorema de preparación de Weierstrass y el teorema 2.7 podemos escribir

$$f(x, y) = u(x, y) \prod_{j=1}^n \left(y - (y(\varepsilon^j x^{1/n})) \right),$$

donde $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ satisface $u(0, 0) \neq 0$. Si hacemos $x = t^n$, donde t es una nueva variable, las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f se dejan escribir como series de potencias enteras en t de la forma

$$\begin{cases} x(t) &= t^n \\ y(t) &= \sum_{i \geq n} a_i t^i, \end{cases}$$

llamadas **parametrizaciones de Puiseux** del germen de curva \mathcal{C}_f .

Ejemplo 2.8. El germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$ es irreducible y sus raíces de Newton-Puiseux son

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_2(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_3(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{i}{69}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_4(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{i}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots. \end{aligned}$$

Por tanto una parametrización de \mathcal{C}_f es dada por

$$\begin{cases} x(t) &= t^4 \\ y(t) &= t^6 + \frac{1}{2}t^7 - \frac{1}{64}t^9 + \dots. \end{cases}$$

Como consecuencia del lema 2.6 y del teorema 2.7 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.9. *Si \mathcal{C}_f es un germen de curva irreducible en $\mathbb{C}\{x, y\}$, entonces su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene un único lado compacto.*

Demostración. Como por hipótesis \mathcal{C}_f es irreducible, todas las raíces tienen el mismo orden. Así, el polígono tiene un solo lado compacto. \square

El recíproco del corolario 2.9 no es verdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. Si consideramos el germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 = 0$, notamos que su polígono $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto sin ser la curva irreducible.

Sea \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible y supongamos que la inclinación del lado compacto de $\mathcal{N}(f)$ es ν y que $i + \nu j = c$ sea la recta que lo contiene. Por convexidad de $\mathcal{N}(f)$ podemos expresar

$$f(x, y) = \sum_{i+\nu j=c} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+\nu j>c} a_{ij} x^i y^j. \quad (2.1)$$

Sean \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible y \mathcal{C}_g un germen de curva cualquiera. Definimos la **multiplicidad de intersección** de \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g en el origen como

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \text{ord}_t(g(\gamma(t))),$$

donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de la rama \mathcal{C}_f .

Proposición 2.11 ([12, Proposition 4.12]). *Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g dos gérmenes de curvas cualesquiera. Entonces se tiene*

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)},$$

donde (f, g) denota el ideal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ generado por f y g . \square

Decimos que la recta $ax + by = 0$ es **recta tangente** a la curva $\mathcal{C}_f : f = 0$ si dicha recta es un factor lineal de su forma inicial.

Dos gérmenes de curvas \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g son **transversales** si sus rectas tangentes son distintas.

Teorema 2.12 ([12, Theorem 4.14]). *Sean \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g y \mathcal{C}_h gérmenes de curvas. Entonces la multiplicidad de intersección verifica las siguientes propiedades:*

1. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 < \infty$ si y solo si f y g son primos en $\mathbb{C}\{x, y\}$,
2. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = (\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f)_0$,
3. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g \mathcal{C}_h)_0 = (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 + (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_h)_0$,
4. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \text{ord}(f)\text{ord}(g)$ si y solo si f y g son transversales,
5. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g - \mathcal{C}_h \mathcal{C}_f)_0 = (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0$. □

3. Foliaciones

Para presentar la noción de foliación singular, introduciremos algunos conceptos básicos.

Una **forma de grado 1** (o una **1-forma**) definida sobre una variedad compleja M de dimensión n es una aplicación que asocia a cada punto $p \in M$ una aplicación lineal $\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\omega_p(v) = \omega(p, v)$ para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$.

Una 1-forma diferencial ω es **integrable** cuando el producto exterior satisface $\omega \wedge d\omega = 0$.

Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$. Una **foliación holomorfa singular de codimensión uno** en M es un objeto \mathcal{F} dado por colecciones $\{\omega_i\}_{i \in I}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{g_{ij}\}_{U_i \cup U_j \neq \emptyset}$ que cumplen

- i) $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cobertura abierta de M , esto es $M = \bigcup_{i \in I} U_i$;
- ii) $\{\omega_i\}$ es una 1-forma diferencial holomorfa integrable no idénticamente nula en U_i ;

- iii) g_{ij} es una función holomorfa no nula en $U_i \cap U_j$;
- iv) si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ en $U_i \cap U_j$.

Para cada forma ω_i consideramos el conjunto singular dado por

$$S_i = \text{Sing}(\omega_i) = \{p \in U_i : \omega_i(p) = 0\}.$$

Es claro que S_i es un subconjunto analítico de U_i . De (iii) y (iv) depende la igualdad $S_i \cap U_i \cap U_j = S_j \cap U_i \cap U_j$. Así, la unión $\bigcup_{i \in I} S_i$ define un subconjunto analítico S de M el cual será denotado por $\text{Sing}(\mathcal{F})$ y llamado el **conjunto singular** de \mathcal{F} .

Dada la 1-forma diferencial $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$, las series A y B son llamadas **coeficientes de ω** . Denotamos por \mathcal{F}_ω el **germen de foliación singular** definida por ω y asumiremos en todo momento que los coeficientes de ω no admiten factores comunes.

Sea \mathcal{F}_ω el germen de foliación dado por $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. Diremos que el origen es **singularidad aislada** de \mathcal{F}_ω si $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ y $\text{Sing}(\mathcal{F}_\omega) = \{(0, 0)\}$. La **multiplicidad del germen de foliación \mathcal{F}_ω** será denotada por $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega)$ y definida como $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$.

Llamamos **solución** del germen de la foliación \mathcal{F}_ω dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ en el origen a una parametrización $(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^2$ tal que $x(0) = y(0) = 0$ y

$$A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Sea \mathcal{F}_ω el germen de foliación dado por una 1-forma holomorfa en el origen de \mathbb{C}^2 . Decimos que la curva \mathcal{C}_f es **invariante** por \mathcal{F}_ω si

$$\omega \wedge df = f \cdot \eta,$$

donde η es una 2-forma (i.e., $\eta = gdx \wedge dy$, con $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$). Si \mathcal{C}_f es irreducible, será **separatriz** de \mathcal{F}_ω .

Consideraremos $(\mathcal{C}_{f_j})_{j=1}^r$ el conjunto de todas las separatrices de la foliación no dicrítica $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$. A cada separatriz \mathcal{C}_{f_j} le corresponde

$f_j = 0$ irreducible con $f_j \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Denotemos por $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ a la unión $\bigcup \mathcal{C}_{f_j}$ de todas las separatrices de la foliación \mathcal{F} , que de ahora en adelante llamaremos **conjunto de separatrices** de \mathcal{F} .

La ecuación $f_1 \cdots f_r = 0$ será llamada **ecuación reducida** de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Ejemplo 3.1. La foliación $\omega = (-3x^2 - 3axy^2)dx + (6y^5 + 6ax^2y)dy$ con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene a $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ como curva invariante, pues $\omega \wedge df = -18axy(y^6 - x^3)$.

Ejemplo 3.2. La foliación $\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ puesto que se satisface $\omega \wedge df = -pq\Delta(x, y)(y^p - x^q)$.

Observación 3.3. Toda parametrización de una curva invariante \mathcal{C}_f de la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ es solución de $\omega = 0$.

Teorema 3.4 ([3]). *Toda foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ admite al menos una curva invariante.* \square

4. Explosión en un punto

Una explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ consiste en reemplazar el origen por un espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que deje a los otros puntos invariantes en un sentido biholomorfo.

La representación local de $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ en coordenadas (x, t) es

$$\pi(x, t) = (x, xt);$$

aquí reemplazamos $x = x$ e $y = xt$.

Observemos que en estas coordenadas tenemos las propiedades siguientes:

- $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, t) : t \in \mathbb{C}\},$
- $\pi(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \cup \{(0, 0)\},$

- $\pi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ es un biholomorfismo con inversa $\pi^{-1}(x, y) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$.

Notamos que el punto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es reemplazado por la recta $\{x = 0\}$. No obstante, no podemos cubrir la recta $\{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$. Para cubrir tal recta consideramos la representación local de π en las coordenadas (s, y) dadas por $\pi(s, y) = (sy, y)$; en este caso $x = sy$ e $y = y$. En las coordenadas (s, y) se tiene propiedades similares a las dadas por las coordenadas (x, t) .

Cuando se trabaja en las coordenadas (s, y) no cubrimos la recta $\{y = 0\}$. Para cubrir todo \mathbb{C}^2 necesitamos pegar el plano xt con el plano sy , identificamos así la recta $\{x = 0\}$ con la recta $\{y = 0\}$.

Definamos $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1$, donde

$$\tilde{U}_0 := \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_0 : y = \phi_0^{-1}([p])x\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

$$\tilde{U}_1 := \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : x = \phi_1^{-1}([p])y\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

y (U_i, ϕ_i) , $i = 0, 1$, son parametrizaciones de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Al considerar las funciones

- $\tilde{\varphi}_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_0(x, y, [p]) = (x, \phi_0^{-1}([p]))$,
- $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_1(x, y, [p]) = (\phi_1^{-1}([p]), y)$,
- $\tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_0$ donde $\tilde{\varphi}_0^{-1}(x, t) = (x, tx, \phi_0(t))$,
- $\tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_1$ donde $\tilde{\varphi}_1^{-1}(s, y) = (sy, y, \phi_1(s))$,

observamos que se tiene $\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1 = \mathbb{C}^2 \times (U_0 \cap U_1)$, $\tilde{\varphi}_0(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ y $\tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, además de

$$(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1})(x, t) = \tilde{\varphi}_1(x, tx, \phi_0(t)) = (\phi_1^{-1}(\phi_0(t)), tx) = \left(\frac{1}{x}, tx\right),$$

$$(\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1})(s, y) = \tilde{\varphi}_0(sy, y, \phi_1(s)) = (sy, \phi_0^{-1}(\phi_1(s))) = \left(sy, \frac{1}{s}\right).$$

De esta manera $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ y $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ son holomorfas. Por tanto $\{(\tilde{U}_0, \tilde{\varphi}_0), (\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)\}$ es un atlas sobre $\tilde{\mathbb{C}}^2$ y $\tilde{\mathbb{C}}^2$ resulta una variedad compleja de dimensión 2, llamada **explosión en el origen**. El conjunto $\pi^{-1}(0, 0) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es llamado **divisor excepcional**.

5. Comportamiento por explosiones

Consideremos un germen de foliación \mathcal{F} generado por una 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $\text{mult}(\mathcal{F}) = \nu$, así podemos expresar $\omega = (A_\nu + A_{\nu+1} + \dots)dx + (B_\nu + B_{\nu+1} + \dots)dy$. Sea $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la explosión en el origen. La forma diferencial $\pi^*\omega$ define una foliación $\pi^*\mathcal{F}$ sobre M . En la carta U de coordenadas (x, t) la 1-forma $\pi^*\omega = A(x, xt)dx + B(x, xt)d(xt)$ se escribe como

$$x^\nu[(A_\nu(1, t) + tB_\nu(1, t) + xC(x, t))dx + x(B_\nu(1, t) + xD(x, t))dt],$$

con orden de C y D mayor o igual que $\nu + 1$.

Tenemos dos situaciones posibles.

Si $xA_\nu(x, y) + yB_\nu(x, y) \neq 0$, tiene sentido hablar de $\hat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^\nu}$, objeto que llamaremos **transformado estricto de ω** , y que define una foliación en U . Sobre el divisor $D = \pi^{-1}(0)$, los puntos singulares de la foliación, es decir $\text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) \cap D \cap U$, vienen dados por el lugar geométrico $A_\nu(1, t) + tB_\nu(1, t) = 0$. En tal caso $D \setminus \pi^*\mathcal{F}$ es una hoja de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$. La foliación es de las llamadas **no dicríticas**.

Si $xA_\nu(x, y) + yB_\nu(x, y) = 0$ debemos tener $B_\nu(1, y) \neq 0$ y el **transformado estricto** de la foliación está definido por $\hat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^{\nu+1}}$. Fuera de $B_\nu(1, y) = 0$, el divisor es transversal a la foliación: por cada uno de sus puntos p pasa una hoja F_p lisa, transversal a D . Su proyección es una separatriz lisa de la foliación \mathcal{F} . Por tanto, la foliación tiene infinitas separatrices. Tal foliación es **dicrítica**. Para más información sobre el comportamiento de la foliación por explosiones sugerimos revisar [17].

Sea \mathcal{F}_ω un germen de foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. Decimos que el origen es una **singularidad**

simple de \mathcal{F}_ω si la matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial B(0,0)}{\partial x} & -\frac{\partial B(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial A(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial A(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

tiene dos autovalores $\lambda \neq \mu$, $\mu \neq 0$ tales que $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$.

Observación 5.1. La definición de singularidad simple no depende de coordenadas.

Si el origen es una singularidad simple de \mathcal{F}_ω , existen coordenadas locales (x, y) que permiten escribir

$$\omega = (\lambda x dy - \mu y dx) + \omega_1,$$

donde los coeficientes de ω_1 son de orden ≥ 2 . Podría suceder

- $\lambda\mu \neq 0$ y $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$ o
- $\lambda\mu = 0$ y $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, en este caso decimos que ω es de **tipo silla-nodo**.

A continuación enunciamos el teorema básico de reducción de singularidades para una foliación.

Teorema 5.2 ([20]). *Sea \mathcal{F}_ω un germen de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$. Entonces existe un morfismo*

$$\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

que es composición de un número finito de explosiones de puntos, tal que

1. *el divisor excepcional $E = \pi^{-1}(0)$ es una hipersuperficie con cruzamientos normales,*

2. la restricción de π a $M \setminus E$ es un isomorfismo sobre $\mathcal{U} \setminus \{0\}$, donde \mathcal{U} es un entorno del origen en el cual está definida \mathcal{F}_ω ,
3. en todo punto no singular del transformado estricto \mathcal{F}'_ω de \mathcal{F}_ω por π toda componente del primer divisor excepcional es o bien invariante por la foliación, o en su defecto transversa a la foliación; en este último caso, decimos que la componente del divisor es una **componente dicrítica** de E por \mathcal{F}_ω ,
4. todo punto singular $p \in M$ de \mathcal{F}'_ω es simple y no está contenido en componentes dicríticas. \square

A la aplicación π la llamamos **reducción de singularidades** de \mathcal{F}_ω .

6. Curvas generalizadas

C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad ([4, Chapter II]) muestran que existe un tipo de foliaciones, que llamaremos curvas generalizadas, para las cuales la reducción de singularidades coincide con la desingularización de su conjunto de separatrices.

Se dice que una foliación \mathcal{F}_ω es de tipo **curva generalizada no dicrítica** si en su reducción de singularidades no aparecen componentes dicríticas ni singularidades silla-nodo.

Proposición 6.1 ([4, páginas 158-161]). *Una foliación no dicrítica admite un número finito de curvas invariantes.* \square

Teorema 6.2 ([4, Theorem 2]). *Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea \mathcal{C}_f su conjunto de separatrices. Entonces \mathcal{F}_ω y \mathcal{C}_f tienen la misma reducción de singularidades.* \square

Si una foliación es curva generalizada, existe una relación directa entre la multiplicidad de la foliación y su conjunto de separatrices.

Teorema 6.3 ([4, Theorem 3]). *Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea \mathcal{C}_f su conjunto de separatrices. Entonces se cumple*

$$\text{mult}(\omega) = \text{mult}(f) - 1.$$

□

En general, si \mathcal{F}_ω es foliación no dicrítica se tiene

$$\text{mult}(\omega) \geq \text{mult}(f) - 1, \quad (6.1)$$

como se puede observar en [4].

Como consecuencia del teorema 6.3, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.4. *Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea \mathcal{C}_f su conjunto de separatrices. Entonces se tiene $\text{mult}(\omega) = \text{mult}(df)$.* □

Ejemplo 6.5. La foliación $\omega = (-3x^2 - 3axy^2)dx + (6y^5 + 6ax^2y)dy$ con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ como se pudo apreciar en el ejemplo 3.1. La multiplicidad de la curva es $\text{mult}(\mathcal{C}_f) = 3$. Si la curva \mathcal{C}_f no es la única separatriz de la foliación, se observaría que el conjunto de separatrices $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ tiene multiplicidad mayor a 3. Al aplicar (6.1) se satisfaría $\text{mult}(\omega) \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 > 2$, pero observamos que acá se cumple $\text{mult}(\omega) = 2$, lo cual es una contradicción. En consecuencia el conjunto de separatrices es $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = y^6 - x^3$.

Ejemplo 6.6. La foliación $\omega = (y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ (ver ejemplo 3.2). Si consideramos $p < q$, la multiplicidad de la curva es $\text{mult}(\mathcal{C}_f) = p$. Si Suponemos que la curva \mathcal{C}_f no es la única separatriz de la foliación, se tendría $\text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) > p$.

Por otro lado se cumple $\text{mult}(\omega) = \min\{p - 1, \alpha + 1\}$, con $\alpha = \text{mult}(\Delta)$. Al aplicar (6.1) se abren dos posibilidades. Primero podría ocurrir $p - 1 = \text{mult}(\omega) > \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 = p - 1$, lo cual es una contradicción. Segundo, al tenerse $\alpha + 1 = \text{mult}(\omega) > \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 = p - 1$ y $\alpha + 1 \leq p - 1$, llegamos a otra contradicción.

El conjunto de separatrices es por tanto $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = y^p - x^q$.

El **número de Milnor de una foliación** $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$, dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con singularidad aislada en el origen, se denota por $\mu(\mathcal{F}_\omega)$ y se define como la multiplicidad de intersección en el origen de los coeficientes de la 1-forma, es decir mediante

$$\mu(\mathcal{F}_\omega) = (A, B)_0. \quad (6.2)$$

El siguiente teorema resulta útil cuando deseamos constatar si una foliación es curva generalizada o no.

Teorema 6.7 ([4, Theorem 4]). *Sea \mathcal{F}_ω una foliación no dicrítica y \mathcal{C}_f la ecuación reducida de sus separatrices. Entonces \mathcal{F}_ω es curva generalizada si y solo si $\mu(\omega) = \mu(df)$.* \square

Como consecuencia inmediata del teorema 6.7 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.8. *Una foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = df$ cuyo conjunto de separatrices es $\mathcal{C} : f = 0$ es de tipo curva generalizada.* \square

Ejemplo 6.9. La foliación dada por $\omega = (-3x^2 - 3axy^2)dx + (6y^5 + 6ax^2y)dy$ fue estudiada por Fernández, Mozo y Neciosup [10]. Este representa un contraejemplo a una afirmación de Loray, como veremos en el ejemplo 7.8. Por ahora, mostraremos que la foliación con $a \neq 0$ es curva generalizada. En uso de las propiedades dadas en el teorema 2.12 tenemos

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= (-3x^2 - 3axy^2, 6y^5 + 6ax^2y)_0 \\ &= (-3x(x + ay^2), 6y(y^4 + ax^2))_0 \\ &= (-3x, 6y)_0 + (x + ay^2, 6y)_0 + (-3x, y^4 + ax^2)_0 \\ &\quad + (x + ay^2, y^4 + ax^2)_0 \\ &= 10. \end{aligned}$$

De otro lado, en el ejemplo 6.5 mostramos que $\mathcal{C} : y^6 - x^3 = 0$ es el conjunto de separatrices de ω . Observemos que $\mu(df) = (-3x^2, 6x^5)_0 = 10$ y el teorema 6.7 implican que ω es de tipo curva generalizada.

Dada la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ parametrización de alguna curva \mathcal{C}_g , escribimos $\gamma^*\omega = \omega(x(t), y(t))$ donde

$$\omega(x(t), y(t)) = A(x(t), y(t))x'(t)dt + B(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Lema 6.10 ([19]). Sean ω_1, ω_2 dos 1-formas de tipo curva generalizada no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices. Dada una curva γ , se verifica

$$\text{ord}_t \gamma^* \omega_1 = \text{ord}_t \gamma^* \omega_2.$$

Demostración. Si la curva γ es una separatriz de ω_1 y ω_2 , entonces se tiene $\omega_1(x(t), y(t)) = 0 = \omega_2(x(t), y(t))$, y concluimos el lema.

Supongamos por tanto que $\gamma(t)$ no es parametrización de ninguna separatriz de ω_1 y ω_2 . En este caso la prueba la haremos por inducción sobre el número mínimo de explosiones necesarias para desingularizar la foliación.

Si el número de explosiones es $n = 0$ tenemos que las foliaciones ω_1, ω_2 son reducidas. Para mostrar el lema cuando las foliaciones ω_1, ω_2 son reducidas, nos apoyaremos en la siguiente igualdad $\text{ord}(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}(\gamma^* df)$ que pasamos a mostrar. En efecto, si la foliación ω_1 de tipo curva generalizada es reducida, se puede expresar en coordenadas (x, y) en la forma (ver [15])

$$\omega_1 = \mu y(1 + \cdots)dx + \lambda x(1 + \cdots)dy, \quad \text{con } \mu\lambda \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^-.$$

Además la ecuación reducida de las separatrices $\mathcal{C} : f = 0$ de ω_1 y ω_2 es dada por la forma $f(x, y) = xyu(x, y)$ con $u(0, 0) \neq 0$.

Consideremos una parametrización de la curva γ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (at^p + t^p n_1(t), bt^q + t^q n_2(t))$, con $n_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ para $i = 1, 2$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega_1 &= \mu(bt^q + t^q n_2(t))(1 + \cdots)d(at^p + t^p n_1(t)) \\ &\quad + \lambda(at^p + t^p n_1(t))(1 + \cdots)d(bt^q + t^q n_2(t)) \\ &= [\mu(bt^q + t^q n_2(t))(apt^{p-1} + pt^{p-1}n_1(t) + t^p n_1'(t)) \\ &\quad + \lambda(at^p + t^p n_1(t))(qbt^{q-1} + qt^{q-1}n_2(t) + t^q n_2'(t)) + \cdots]dt \\ &= [ab(\lambda q + \mu p)t^{p+q-1} + t^{p+q}\alpha(t)]dt, \end{aligned}$$

con $\alpha(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Como $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^-$, cumple $\mu p + \lambda q \neq 0$ y por tanto $\text{mult}(\gamma_1^* \omega) = p + q - 1$. De otro lado con

$$df = (yu(x, y) + xyu'(x, y))dx + (xu(x, y) + xyu'(x, y))dy,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma^* df &= [(bt^q + t^q n_2(t))u(x(t), y(t)) + \\ &\quad + (at^p + t^p n_1(t))(bt^q + t^q n_2(t))u'(x(t), y(t))]d(at^p + t^p n_1(t)) \\ &\quad + [(at^p + t^p n_1(t))u(x(t), y(t)) + \\ &\quad + (at^p + t^p n_1(t))(bt^q + t^q n_2(t))u'(x(t), y(t))]d(bt^q + t^q n_2(t)) \\ &= [(bt^q u(0, 0) + t^q n_2(t)u(0, 0))(apt^{p-1} + pt^{p-1}n_1(t) + t^p n_1'(t)) \\ &\quad + (at^p u(0, 0) + t^p n_1(t)u(0, 0))(qbt^{q-1} + qt^{q-1}n_2(t) + t^q n_2'(t)) \\ &\quad + \dots]dt \\ &= [abu(0, 0)(p + q)t^{p+q-1} + t^{p+q}\beta(t)]dt, \end{aligned}$$

con $\beta(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Así $\text{mult}(\gamma^* df) = p + q - 1$, es decir, $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* df)$. Ahora, para ω_2 foliación de tipo curva generalizada reducida, por el mismo motivo se obtiene $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_2) = \text{ord}_t(\gamma^* df)$. De ello concluimos la igualdad $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* \omega_2)$.

A continuación abordaremos el lema cuando las foliaciones ω_1, ω_2 no son reducidas. Supongamos que se reducen después de una explosión, esto es $n = 1$. Escogemos las coordenadas de tal manera que $x = 0$ no esté en el cono tangente de γ . Parametricemos γ por

$$\begin{cases} x(t) &= t^n \\ y(t) &= \sum_{i \geq n} a_i t^i. \end{cases}$$

Hacemos una explosión en el origen en la carta $E : (x, t) \mapsto (x, xt)$. Para las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas $\omega_1 = A_1(x, y)dx + B_1(x, y)dy$ y $\omega_2 = A_2(x, y)dx + B_2(x, y)dy$ con multiplicidades m_1 y m_2 respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} E^* \omega_1 &= A_1(x, xt)dx + B_1(x, xt)d(xt) \\ &= (A_1(x, xt) + tB_1(x, xt))dx + xB_1(x, xt)dt \\ &= x^{m_1} \hat{\omega}_1, \end{aligned}$$

donde $\widehat{\omega}_1$ es el transformado estricto de ω_1 . De manera similar tenemos $E^*\omega_2 = x^{m_2}\widehat{\omega}_2$. Del corolario 6.4, se cumple $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(df) = \text{mult}(\omega_2)$. Denotaremos por $\widehat{\gamma}(t)$ la parametrización del transformado estricto $\widehat{\gamma}$ de la curva γ . Para $i = 1, 2$, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega_i &= (E \circ \widehat{\gamma})^*\omega_i = \widehat{\gamma}^*(E^*\omega_i) \\ &= \widehat{\gamma}^*(x^{m_i}\widehat{\omega}_i) = x(t)^{m_i}\widehat{\gamma}^*\widehat{\omega}_i,\end{aligned}$$

de donde se logra

$$\begin{aligned}\text{ord}_t\omega_i(\gamma(t)) &= \text{ord}_t(x(t)^{m_i}\widehat{\omega}_i(\widehat{\gamma}(t))) \\ &= \text{mult}(x(t))\text{mult}(\omega_i) + \text{ord}_t\widehat{\omega}_i(\widehat{\gamma}(t)).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Como $\widehat{\omega}_1$ y $\widehat{\omega}_2$ son reducidas, por la parte (1) tenemos que

$$\text{ord}_t\widehat{\omega}_1(\widehat{\gamma}(t)) = \text{ord}_t\widehat{\omega}_2(\widehat{\gamma}(t)).$$

Además se conoce la igualdad $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(\omega_2)$. Por lo tanto, la ecuación (6.3) muestra $\text{ord}(\omega_1(\gamma(t))) = \text{ord}(\omega_2(\gamma(t)))$.

Tomemos como hipótesis inductiva que si ω_1, ω_2 se desingularizan con a lo mucho $n - 1$ explosiones, entonces se tiene $\text{ord}(\omega_1(\gamma(t))) = \text{ord}(\omega_2(\gamma(t)))$.

Si suponemos que ω_1, ω_2 se desingularizan tras n explosiones, mediante el mismo argumento usado en (2), tenemos que se cumple $\gamma^*\omega_i = x(t)^{m_i}\widehat{\gamma}^*\widehat{\omega}_i$. De ello obtenemos

$$\text{ord}_t\omega_i(\gamma(t)) = \text{mult}(x(t))\text{mult}(\omega_i) + \text{ord}_t\widehat{\omega}_i(\widehat{\gamma}(t)).\tag{6.4}$$

Por hipótesis inductiva $\widehat{\omega}_1$ y $\widehat{\omega}_2$ son reducidas con a lo más $n - 1$ explosiones, así que se satisface

$$\text{ord}_t\widehat{\omega}_1(\widehat{\gamma}(t)) = \text{ord}_t\widehat{\omega}_2(\widehat{\gamma}(t)).$$

Además se tiene $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(\omega_2)$, pues ω_1 y ω_2 son foliaciones curvas generalizadas con el mismo conjunto de separatrices. Por lo tanto, la ecuación (6.4) muestra $\text{ord}(\omega_1(\gamma(t))) = \text{ord}(\omega_2(\gamma(t)))$; esto concluye la prueba del lema. \square

7. Polígono de Newton de una foliación

Dada una 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$ definimos el **sopORTE** de ω como

$$\text{Sop}(\omega) = \text{Sop}(xA) \cup \text{Sop}(yB).$$

Sea $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ un germen de foliación dada por la 1-forma ω . Llamamos **polígono de Newton** de ω , y lo denotaremos $\mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega) = \mathcal{N}(\omega)$, al borde de $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega))$.

Si escribimos $\omega = \sum_{i,j} A_{i,j} x^{i-1} y^j dx + \sum_{i,j} B_{i,j} x^i y^{j-1} dy$ entonces

$$\text{Sop}(\omega) = \{(i, j) : (A_{i,j}, B_{i,j}) \neq (0, 0)\}.$$

Decimos que un punto $(i, j) \in \text{Sop}(\omega)$ es **contribución** de B si $(i, j) \in \text{Sop}(yB)$. De manera similar un punto $(i, j) \in \text{Sop}(\omega)$ es contribución de A si $(i, j) \in \text{Sop}(xA)$.

Observación 7.1. El polígono de Newton depende de coordenadas, por ello es necesario tener presente respecto en qué coordenadas estamos trabajando.

Observación 7.2. Si consideramos $\mathcal{C}_f : f = 0$ y $\mathcal{F} : df = 0$, notamos que se tiene $\text{Sop}(df) = \text{Sop}(f)$, de ello se obtiene $\mathcal{N}(df) = \mathcal{N}(f)$.

De manera similar al caso de curvas, el método de Newton para curvas fue generalizado a foliaciones, en este caso por J. Cano [5]. En dicho trabajo se observa que el polígono de Newton de la foliación juega un papel fundamental.

En curvas, si L es un lado compacto de $\mathcal{N}(f)$ con inclinación μ , entonces existe una raíz de $f = 0$ de la forma

$$y = cx^\mu + \cdots,$$

donde $c \neq 0$ es raíz de cierto polinomio determinado por f . Además, el número de raíces de Newton-Puiseux de orden μ es igual a la altura del lado L (la altura de L es su proyección sobre el eje vertical).

Sin embargo, la propiedad propuesta en el párrafo anterior no es válida cuando buscamos soluciones de ecuaciones del tipo $\omega = 0$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3. ([7, página 32]) Si consideramos la foliación \mathcal{F} definida por

$$w = 4xydx + (y - 2x^2)dy,$$

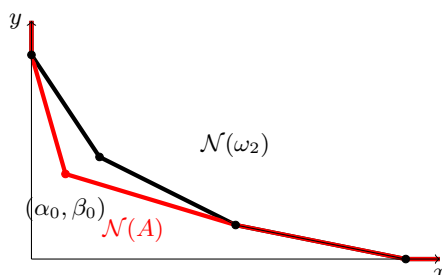
el polígono de Newton tiene un lado L de inclinación 2. Sin embargo \mathcal{F} tiene una única separatriz dada por $y = 0$.

Las foliaciones curvas generalizadas tienen un comportamiento muy parecido al de sus separatrices, pues tienen la misma resolución de singularidades. También sucede esto en lo referido al polígono de Newton, como veremos en el siguiente teorema. Mediante técnicas de Rouillé mostramos el siguiente teorema.

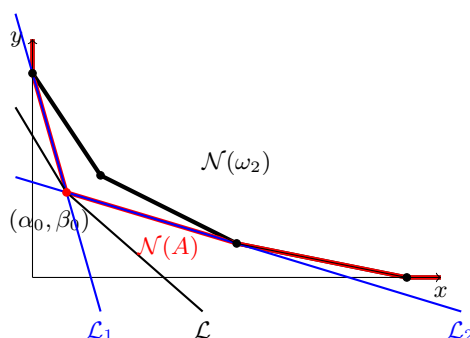
Teorema 7.4. Sean ω_1 y ω_2 dos foliaciones curvas generalizadas no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices. Entonces se tiene

$$\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2).$$

Demostración. Mostraremos que se cumple $Sop(\omega_1) \subseteq \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$ por reducción al absurdo. Para ello supongamos que existe $(\alpha_0, \beta_0) \in Sop(\omega_1)$ tal que $(\alpha_0, \beta_0) \notin \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$. De $Sop(\omega_2) \subseteq Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\}$ pasamos a $\mathcal{D}(Sop(\omega_2)) \subset \mathcal{D}(Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\})$. Sea $A = Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\}$. Como $\mathcal{D}(A)$ es convexo y $(\alpha_0, \beta_0) \notin Sop(\omega_2)$ se tiene que (α_0, β_0) es un vértice de $\mathcal{N}(A)$, pues si (α_0, β_0) no lo fuera, obviamente se tendría $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$. Obsérvese que sin pérdida de generalidad se puede asumir que (α_0, β_0) es un vértice de $\mathcal{D}(Sop(\omega_1))$



Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 las dos rectas que pasan por (α_0, β_0) y que contienen a los lados de $\mathcal{N}(A)$ adyacentes a dicho vértice. Denotemos por λ_j a la inclinación de \mathcal{L}_j , donde $\lambda_1 < \lambda_2$. Las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son rectas de apoyo de $\mathcal{N}(A)$, de donde se logra $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{L}_j^+$, para $j \in \{1, 2\}$.



Por la proposición 8.1, cualquier recta \mathcal{L} que pasa por (α_0, β_0) con inclinación $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ está contenida en $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$. Como \mathcal{L} es recta de apoyo de $\mathcal{N}(A)$, se tiene $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2)) \subset \mathcal{D}(A)$ y $(\alpha_0, \beta_0) \notin \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$, de donde concluimos que $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$ no interseca a ninguna recta contenida en $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$.

La región $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$ contiene infinitas rectas. Consideremos $\mathcal{L} : qx + py = q\alpha_0 + p\beta_0$ de inclinación $\lambda = p/q \in]\lambda_1, \lambda_2[$, con p y q primos entre sí, de manera que

- la recta \mathcal{L} contenga al punto (α_0, β_0) ,
- $qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$,
- $\mathcal{L} \cap \text{Sop}(\omega_1) = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$.

De lo anterior se obtiene

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \{(x, y) : qx + py > c\},$$

donde $c = q\alpha_0 + p\beta_0$, y por ende se satisface $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2)) \subseteq \{(x, y) : qx + py > c\}$.

Con $\gamma(t)$ la curva parametrizada por $(x(t), y(t)) = (t^q, t^p)$, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^*\omega_1 &= \omega_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= A_{\alpha\beta}t^{q(\alpha-1)}t^{p\beta}qt^{q-1}dt + B_{\alpha\beta}t^{q\alpha}t^{p(\beta-1)}pt^{p-1}dt \\ &= (qA_{\alpha\beta} + pB_{\alpha\beta})t^{q\alpha+p\beta-1}dt. \end{aligned}$$

Como $\text{Sop}(\omega_1) \cap \mathcal{L} = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$ y $qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$, tenemos

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_1) \leq q\alpha_0 + p\beta_0 - 1 = c - 1. \quad (7.1)$$

Al tenerse $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2)) \subset \{(x, y) : qx + py > c\}$ para todo $(\alpha, \beta) \in \text{Sop}(\omega_2)$, se cumplirá $\alpha q + p\beta > c$, y con ello también

$$\alpha q + p\beta - 1 > c - 1. \quad (7.2)$$

De (7.1) y (7.2) se logra

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_2) > c - 1 \geq \text{mult}(\gamma^*\omega_1),$$

lo que contradice el lema 6.10. De este modo obtenemos $\text{Sop}(\omega_1) \subset \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$.

Por el mismo argumento se tiene $\text{Sop}(\omega_2) \subset \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_1))$, lo que conduce a $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_1)) = \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$, de donde finalmente concluimos $\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2)$. \square

Como caso particular del teorema anterior, podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 7.5. Sea ω curva generalizada y sea $\mathcal{C} : f = 0$ una ecuación reducida de su conjunto de separatrices. Entonces se cumple

$$\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(df).$$

Demostración. Basta aplicar el teorema a ω y df . \square

Observación 7.6. Del corolario 7.5 y de la observación 7.1 concluimos la igualdad $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(df) = \mathcal{N}(f)$.

Observación 7.7. Si el germen de curva \mathcal{C}_f es irreducible, por el corolario 2.9, su polígono $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto. Si consideramos el caso donde la foliación ω tiene una sola separatriz irreducible \mathcal{C}_f , el polígono $\mathcal{N}(\omega)$ admitirá apenas un lado compacto.

Dados $p, q \in \mathbb{N}^*$, definimos

$$\text{grad}_{(p,q)}(x^i y^j) = \frac{ip + jq}{\text{mcd}(p, q)} \quad \text{y}$$

$$\text{ord}_{(p,q)} \left(\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \right) = \min \left\{ \text{grad}_{(p,q)}(x^i y^j) : a_{i,j} \neq 0 \right\}.$$

En 1999 Loray [13] enuncia una caracterización de aquellas foliaciones que tienen la misma resolución que su conjunto de separatrices. Dicho resultado ([13, Pág.163]) es enunciado con la corrección adecuada en la proposición 1.2.

En 2014, Fernández, Mozo y Neciosup [10] encuentran una imprecisión en la caracterización originalmente propuesta. Ellos muestran que la condición dada en la proposición 1.2 no es necesaria, como se desprende del siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.8. De los ejemplos 6.5 y 6.9 se sabe que la foliación $\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx)$, con $a \in \mathbb{C}^*$, tiene como separatriz la curva $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ y es de tipo curva generalizada. Por el teorema 6.2 la foliación ω y su separatriz $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ tienen la misma resolución. Pero la función $\Delta(x, y) = axy$ satisface $\text{ord}_{(6,3)} \Delta = 3$, valor que no verifica la relación $\text{ord}_{(6,3)} \Delta > \frac{pq-p-q}{\text{mcd}(p,q)} = 3$.

El ejemplo 7.8 muestra que la condición no es necesaria para el caso en que p y q no sean coprimos. Nos preguntamos entonces qué sucede con p y q coprimos. Y la respuesta para el caso en que la foliación es curva generalizada la brindamos en el siguiente teorema.

Teorema 7.9. *Sean p y q coprimos. Si la foliación*

$$\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$$

es de tipo curva generalizada, entonces se tiene

$$\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q.$$

Demostración. Al considerar $\Delta(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, podemos escribir

$$\omega = \left(-qx^{q-1} - q \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^{j+1} \right) dx + \left(py^{p-1} + p \sum_{i,j} a_{i,j}x^{i+1} y^j \right) dy,$$

y se obtiene $\text{Sop}(\omega) = \{(q, 0), (i+1, j+1)\} \cup \{(0, p)(i+1, j+1)\}$, donde $(i, j) \in \text{Sop}(\Delta)$. Como ω es foliación de tipo curva generalizada, por la observación 7.6 tenemos $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(f)$. Además la curva $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ es irreducible y su polígono tiene un solo lado compacto, el cual está contenido en la recta $\mathcal{L} : px + qy = pq$. Por tanto, el lado compacto de $\mathcal{N}(\omega)$ está también contenido en la recta $\mathcal{L} : px + qy = pq$. Para $(i+1, j+1) \in \text{Sop}(\omega)$ se tiene entonces $(i+1)p + (j+1)q > pq$, de donde se logra $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) = ip + jq > pq - p - q$. \square

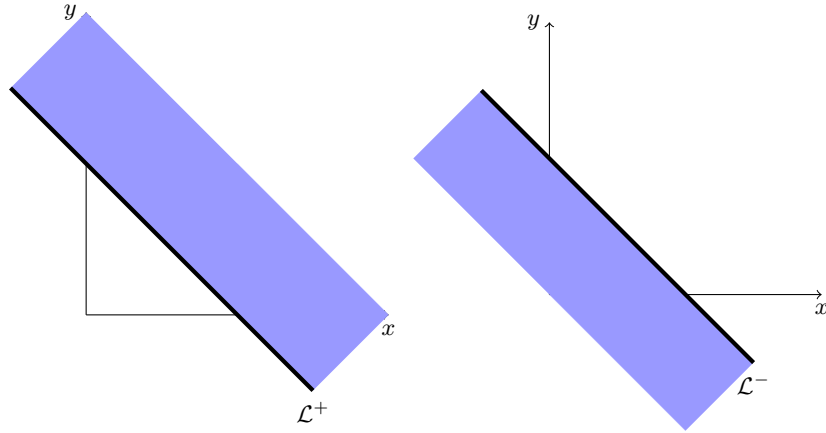
El resultado del teorema anterior nos indica que el ser foliación de tipo curva generalizada es una condición suficiente para que $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y)$ sea mayor que $pq - p - q$.

8. Apéndice: geometría plana

Consideremos la recta $\mathcal{L} : ax + by = c$, con $a, b \geq 0$. Pongamos

$$\mathcal{L}^+ = \{(x, y) : ax + by \geq c\} \text{ y } \mathcal{L}^- = \{(x, y) : ax + by \leq c\}, \quad (8.1)$$

de modo que \mathcal{L}^+ es el hiperplano superior de \mathcal{L} y \mathcal{L}^- es el hiperplano inferior.



Decimos que \mathcal{L} tiene **inclinación** λ si $-\frac{1}{\lambda}$ es la pendiente de \mathcal{L} . Fijado (a, b) , la recta $\mathcal{L}_\lambda : x + \lambda y = a + \lambda b$ es precisamente aquella que pasa por (a, b) con inclinación λ .

Proposición 8.1. Para $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ se tiene

$$\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-).$$

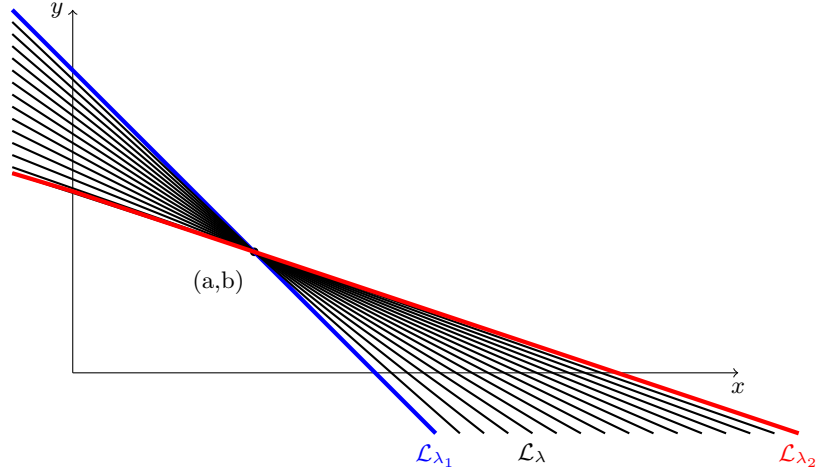
Demostración. Los puntos de corte de \mathcal{L}_λ con los ejes $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ son

$$\mathcal{L}_\lambda \cap \{x = 0\} = \left\{ \left(0, \frac{a}{\lambda} + b \right) \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_\lambda \cap \{y = 0\} = \left\{ (a + \lambda b, 0) \right\}.$$

Por otra parte, la condición $\lambda_1 < \lambda_2$ implica $a + \lambda_1 b < a + \lambda_2 b$ y $\frac{a}{\lambda_1} + b > \frac{a}{\lambda_2} + b$. Al satisfacerse $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, observamos que se cumple

$$a + \lambda_1 b < a + \lambda b < a + \lambda_2 b \quad \text{y} \quad \frac{a}{\lambda_2} + b < \frac{a}{\lambda} + b < \frac{a}{\lambda_1} + b,$$

de donde concluimos $\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$, tal como se observa en la gráfica.



□

Notemos, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, que hay infinitas \mathcal{L}_λ que satisfacen

$$\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-).$$

En $(\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+)$ hay un número finito de puntos $(c, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ con $c \in [0, a]$ y $d \in [b, \frac{a}{\lambda_1}]$. De manera similar en $(\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$ hay un número finito de puntos con coordenadas enteras cuya abscisa varía en $[a, a + \lambda_2 b]$ y cuya ordenada varía en $[0, b]$.

Agradecimientos

Durante la preparación del artículo hemos conversado con varios colegas: Rudy Rosas, Fernando Iglesias y Hernán Neciosup, quienes nos han ayudado a organizar este artículo. También agradecemos al arbitro del artículo por sus comentarios que mejoraron considerablemente la exposición.

Percy Fernández y Nancy Saravia

Los autores agradecen el financiamiento de la Pontificia Universidad Católica del Perú mediante el proyecto **DGI 2015-1-0045**.

El segundo autor agradece el financiamiento parcial del proyecto **PAID 2014-0009** y a la **Beca Marco Polo 2015**.

El segundo autor agradece de manera muy especial a Evelia García Barroso, quien contribuyó en la realización de este trabajo durante sus estancias en la Universidad de La Laguna (Tenerife-España), universidad que financió, en su totalidad, una de las estancias realizadas.

Referencias

- [1] M. BERTHIER, R. MEZIANI AND P. SAD. *On the classification of nilpotent singularities*. Bull. Sci. Math. 123 (1999), 351-370.
- [2] C. CAMACHO AND L. NETO. *Introdução a Teoria das Folheações*. 11 Colóquio Brasileiro de Matemática. 1977.
- [3] C. CAMACHO AND P. SAD. *Invariant Varieties Through Singularities of Holomorphic Vector Fields*. Ann. of Math., 115, (1982), 579-595.
- [4] C. CAMACHO, A. LINS NETO AND P. SAD. *Topological Invariants and Equidesingularisation for Holomorphic Vector Fields*. J. Differential Geometry, 20, (1984), pp. 143-174.
- [5] J. CANO. *An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solution of pfaffian form*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble.(1993), 43, 1, 125-142.
- [6] D. CERVEAU AND R. MOUSSU. *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$* . Bull. Soc. Math. France 116 (1988) 459-488.
- [7] N. CORRAL. *Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble.(2003), 53, 3, 787-814.

- [8] A. CHECINER. *Coures Algébriques Planes*. Springer Berlin Heidelberg New York.(1978).
- [9] H. DULAC. *Points Singuliers des équations différentielles*. Mémorial Des Sciences Mathématiques. Fascicule 61 (1934), 1-70.
- [10] P. FERNÁNDEZ - J. MOZO - H. NECIOSUP. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix*. J. Differential Equations 256 (2014), 1702-1717.
- [11] E. GARCÍA BARROSO. *Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor*. Thèse, École Normale Supérieure, LMENS-96-35, 1996.
- [12] A. HEFEZ. *Irreducible Plane Curve Singularities*. Real and Complex Singularities the sixth workshop at São Carlos. (2003), 1-120.
- [13] F. LORAY. *Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques*. J. Differential Equations 158 (1999), 152-173.
- [14] J. MARTINET - J. RAMIS *Problemes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*. Publ. Math. I.H.É. 55 (1982), 63-164.
- [15] J. MATTEI-R. MOUSSU *Holonomie et intégrale première*. Ann. Scient. Ecole. Norm. Sup 13 (1980), 571-621.
- [16] R. MEZIANI *Classification analytique d'équations différentielles $ydy + \dots = 0$ et espaces modules*. Bol. Soc. Brasil Mat. 27 (1996), 23-53.
- [17] J. MOZO. *Clasificación analítica de foliaciones holomorfas singulares*. Monografías del IMCA. Escuela CIMPA. (2010), 1-99.
- [18] P. ROUILLÉ. *Sur les polaires des certaines 1-formes*. C. R. Acad. Sci. Paris Série I, Math. 326(1998). no. 6, 677-680.

- [19] P. ROUILLÉ. *Théorème de Merle: cas des 1-formes de type courbes généralisées*. Bol. Soc. Mat. (1999). Vol. 30, (3), 293-314.
- [20] A. SEIDENBERG. *Reduction of Singularities of the Differentiable Equation $A dY = B dX$* . Amer. Journal of Math. 90, (1968), pp. 248-269.
- [21] E. STRÓZYNA. *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. The case of generalized saddle-node* Bull. Sci. Math. 126 (2002), 555-579.
- [22] F. TAKENS. *Singularities of vector fields*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 43 (1974) 47-100.
- [23] O. ZARISKI. *Le problème des modules pour les branches planes*. Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1973. Redition Hermann, 1986.

Abstract

Generalized curve foliations are a type of foliations that have a similar reduction as the one given by curves. Camacho, Lins Neto, and Sad showed that generalized curve no-dicritical foliations have the same reduction of singularities than their separatrices. In this paper we give a novel proof of Dulac's theorem ([9]) using techniques of Rouillé ([19]). This theorem shows that for generalized curve no-dicritical foliations their Newton polygons and their separatrices are equal. Using Dulac's theorem we return to a result (wrongly) stated by Loray, which is not quite right, as noticed by Fernández, Mozo and, Neciosup.

Palabras Clave/Keywords: Foliations, Newton polygon of a foliation, generalized curve foliations.

Percy Fernández Sánchez
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias

Polígono de Newton de una foliación de tipo curva generalizada

Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32
pefernan@pucp.edu.pe

Nancy Saravia Molina
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32
nsaraviam@pucp.edu.pe

Un teorema de tipo Bott para orbifolds complejos y aplicaciones

*A. Miguel Rodríguez*¹

Noviembre, 2015

Resumen

Presentamos (sin demostración) una versión del teorema de Bott para un orbifold complejo compacto y con singularidades aisladas. A continuación deducimos algunas consecuencias importantes de este teorema, y finalmente daremos algunas aplicaciones para foliaciones holomorfas en espacios proyectivos ponderados.

MSC(2010): 37F75, 57R18.

Palabras clave: Orbifold, espacios proyectivos ponderados, foliaciones.

¹ *ICEX - UFMG.*

1. Preliminares

Un orbifold o V -variedad puede ser visto localmente como un espacio cociente de un espacio euclidiano bajo una acción de un grupo finito lineal. La noción de orbifold fue introducida por Satake [10] en el contexto de automorfismos de formas en los años 50 con el nombre de V -variedad, y por Thurston [11] en el contexto de la geometría de las 3-variedades en los años 70; fue entonces cuando ganó el nombre de orbifold después de una votación entre sus alumnos. Objetos similares aparecen en geometría algebraica, ahí llamados \mathbb{Q} -variedades. Tales objetos pueden presentar singularidades, pero ellas son siempre de tipo cociente.

Un **orbifold** es un espacio complejo paracompacto conexo M que satisface la propiedad que cada punto $p \in M$ tiene una vecindad abierta $U \subset M$ que es un cociente $U \cong V/G$, donde V es una variedad compleja, G es un subgrupo finito del grupo de biholomorfismos de V , con V y G dependientes de p . Llamaremos **cobertura** local suave a la proyección natural $\pi : V \rightarrow U \cong V/G$. En adelante (M, p) denotará el germen de orbifold M en el punto p y será llamado **germen cociente**. Morfismos entre orbifolds son las aplicaciones holomorfas entre ellos.

Puesto que las posibles singularidades que aparecen en un orbifold M son de tipo cociente, se tiene que M es un espacio complejo reducido, normal, Cohen-Macaulay y con solo singularidades racionales. Denotaremos este conjunto singular por $Sing(M)$ y la parte regular por $M_{Reg} = M \setminus Sing(M)$. La dimensión de M es la dimensión de la variedad compleja M_{Reg} .

La estructura local de un orbifold entorno de sus singularidades fue descrita por David Prill en [8]: si $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, entonces cada germen cociente (M, p) determina un único (módulo conjugación) subgrupo finito pequeño $G_p \subset GL(n, \mathbb{C})$ tal que $(M, p) \cong (\mathbb{C}^n, 0)/G_p$, con una proyección natural $\pi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (M, p)$. Notemos que se tiene $p \in Sing(M)$ si el grupo de isotropía G_p es no trivial. Resaltamos que se cumple $G_p = \pi_1((M, p) \setminus Sing(M))$ y por esa razón G_p es llamado el grupo fundamental local de M en p . Recordemos que G_p es pequeño si satisface

$\text{codim}_{\mathbb{C}}(\text{Fix } G_p) \geq 2$ (acá $\text{Fix } G_p = \cup_{g \neq e} \text{Fix } g$), o equivalentemente, si ningún elemento en G_p tiene a 1 como un autovalor de multiplicidad $n - 1$. Veamos algunos ejemplos de orbifolds.

Ejemplo 1.1. I. Toda variedad compleja M es trivialmente un orbifold sin singularidades.

II. Sean $U = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, $V = \mathbb{D}$, y μ_n el grupo de las raíces n -enésimas de la unidad actuando por multiplicación, con cociente $\pi : V \rightarrow U$ dado por $\pi(z) = z^n$. Resulta entonces que U es un orbifold con una única carta orbifold (V, μ_n, π) .

III. Si $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ es un subgrupo finito, entonces el cociente \mathbb{C}^n/G es un orbifold. En particular, para $n = 2$ y $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ subgrupo finito, tenemos las singularidades kleinianas (o de Du Val) A_{m-1}, D_{m+2} , con $(m \geq 2)$, E_6, E_7 y E_8 . En dimensión 2 cualquier espacio complejo con singularidades de tipo Klein tiene una estructura natural de orbifold.

IV. Un dato bien conocido es que toda variedad tórica M_{Δ} , donde Δ es un fan simplicial, es un orbifold. Como un ejemplo importante de este tipo de orbifolds aparecen los espacios proyectivos ponderados $\mathbb{P}^n(w)$.

V. Considere el 4-toro complejo $\mathbb{T}^4 = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. Definamos el mapa $\sigma : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ mediante

$$\sigma(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}) = (e^{-it_1}, e^{-it_2}, e^{-it_3}, e^{-it_4})$$

e identifiquemos $\langle \sigma \rangle$ con \mathbb{Z}_2 . La superficie de Kummer $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ es un orbifold con 16 singularidades aisladas.

Una **k -forma diferencial en M** es una k -forma C^∞ en M_{Reg} tal que el pull-back $\pi^*\omega$ se extiende a una k -forma C^∞ en cada cobertura local suave $\pi : (V, \tilde{p}) \rightarrow (M, p)$ de M . De ahí, si ω es una $2n$ -forma diferencial en M con soporte compacto $\text{Supp}(\omega) \subset (M, p)$, entonces, por definición, se tiene

$$\int_M \omega = \frac{1}{\#G_p} \int_V \pi^*\omega.$$

Ahora, si la $2n$ -forma diferencial ω tiene soporte compacto, mediante una partición de la unidad $\{\rho_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ (invariante por la acción local, ver [10]), tenemos

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Análogo al caso de variedades tenemos el haz \mathcal{E}^k de k -formas diferenciales en M , junto con la derivada exterior $d : \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}$ y el haz total $\mathcal{E}^* = \bigoplus_{0 \leq k \leq 2n} \mathcal{E}^k$.

Cuando M tiene dimensión n , vía la fórmula de Satake-Stokes (cf. [10]), para $\omega \in \Gamma_c(M, \mathcal{E}^{2n-1})$ (es decir, de soporte compacto) se logra

$$\int_M d\omega = 0.$$

Los complejos de De Rham $H_{dR}^*(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{0 \leq k \leq 2n} H_{dR}^k(M, \mathbb{C})$ (el usual) y $H_{dRc}^*(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{0 \leq k \leq 2n} H_{dRc}^k(M, \mathbb{C})$ (el de soporte compacto) quedan bien definidos entonces y vale dualidad de Poincaré: el par

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) \times H_{dRc}^{2n-k}(M, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ([\omega], [\eta]) & \longmapsto & \int_M \omega \wedge \eta \end{array}$$

resulta no degenerado. Como en el caso de variedades, para orbifolds vale el teorema de De Rham y tenemos $H^*(M, \mathbb{C}) \cong H_{dR}^*(M, \mathbb{C})$, donde $H^*(M, \mathbb{C})$ es el anillo de cohomología singular con coeficientes complejos y, si consideramos la cohomología de Čech, vale también $H_{dR}^*(M, \mathbb{C}) \cong \check{H}^*(M, \mathbb{C})$.

Sea $\rho : E \rightarrow M$ una aplicación holomorfa sobreyectiva entre orbifolds. Sea F una variedad compleja. Diremos que ρ es un **fibrado holomorfo orbifold con fibra F** si para todo $p \in M$ existe una cobertura local suave $\pi : V \rightarrow U \cong V/G_p$, de una vecindad abierta U de p , y una acción de G_p sobre el fibrado trivial $V \times F$ sobre V (con fibra F)

con $E|_U \cong (V \times F)/G_p$. Obsérvese que en tal caso $\rho^{-1}(p) = F/G_p$ es un orbifold para todo $p \in M$. En particular se tiene $\rho^{-1}(p) = F$ para todo $p \in M_{Reg}$.

Ejemplo 1.2. Como ejemplo, tomemos $F = \mathbb{C}^k$, con acción de G_p sobre $V \times \mathbb{C}^k$ dada por $g \cdot (\tilde{x}, v) = (g\tilde{x}, A(\tilde{x}, g)v)$, donde $A : V \times G_p \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ es holomorfa y cumple $A(\tilde{x}, gh) = A(h\tilde{x}, g)A(\tilde{x}, h)$. Para más detalles ver [10], [7].

Sea (U, p) un germen cociente, y sea $\pi : (V, \tilde{p}) \rightarrow (U, p)$ un cobertura local suave. Un haz coherente \mathcal{F} en (U, p) es un **haz orbifold libre** si \mathcal{F} es reflexivo (es decir, el homomorfismo natural $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ es un isomorfismo) y $(\pi^*\mathcal{F})^{\vee\vee}$ es un haz libre. Cuando M es un orbifold, un haz coherente \mathcal{F} en M será un **haz orbifold localmente libre** si $\mathcal{F}|_{(M, p)}$ es un haz orbifold libre para todo $p \in M$. Para mayores detalles ver [1].

Un **fibrado vectorial orbifold E sobre M** es un fibrado vectorial holomorfo E_{Reg} sobre M_{Reg} tal que $i_*(\mathcal{O}(E_{Reg}))$ es un haz orbifold localmente libre. Aquí $i : M_{Reg} \hookrightarrow M$ es la inclusión y $\mathcal{O}(E_{Reg})$ el haz de secciones de E_{Reg} .

Ejemplo 1.3. En el ejemplo 1.1, caso **II**, consideremos el fibrado trivial orbifold dado por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi^E} & (V \times \mathbb{C})/\mu_n \\ \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ V & \xrightarrow{\pi} & U, \end{array}$$

donde la acción de μ_n sobre $V \times \mathbb{C}$ está dada por $g \cdot (z, v) = (gz, gv)$.

Posteriormente daremos un ejemplo no trivial de un fibrado vectorial orbifold de rango uno en $\mathbb{P}^n(w)$.

Observación 1.4. Un fibrado vectorial holomorfo E_{Reg} en M_{Reg} es un fibrado vectorial holomorfo orbifold en M cuando para toda cobertura local suave $(V, \tilde{p}) \rightarrow (U, p) \cong (V, \tilde{p})/G_p$ de M existe un fibrado vectorial holomorfo E_V junto con una acción de grupos G_p tal que $(E_V|_{(V, \tilde{p}) - \text{Fix } G_p})/G_p \cong E_{Reg}|_{(U, p)}$. Además E_V y la G_p -acción en E_V quedan determinadas únicamente por E_{Reg} .

Observación 1.5. Dado un haz orbifold localmente libre \mathcal{F} sobre M , existe un fibrado vectorial orbifold en M tal que \mathcal{F} es isomorfo al haz de secciones de E . Módulo isomorfismo E es único.

Sea M un orbifold y E un fibrado vectorial holomorfo orbifold en M . Una **métrica orbifold** h en E es una métrica hermitiana en E_{Reg} tal que para toda cobertura local suave $\pi : (V, \tilde{p}) \rightarrow (U, p)$, el pull-back π^*h admite una extensión a una métrica hermitiana h_V en E_V .

Como en el caso de variedades, a través de particiones de la unidad siempre es posible construir métricas orbifold. De manera similar podemos construir conexiones, curvatura y clases de Chern asociadas a un fibrado vectorial holomorfo orbifold (para más detalles ver [7], [1]).

En el capítulo 2 de este trabajo (a continuación), presentaremos un teorema de tipo Bott para un orbifold complejo compacto y con singularidades aisladas (teorema 2.1), y deducimos algunas consecuencias importantes de este teorema. En el capítulo 3 daremos algunas aplicaciones en el contexto de foliaciones holomorfas en espacios proyectivos ponderados.

2. Un teorema de tipo Bott

Sea M un n -orbifold compacto y con singularidades aisladas. Sea L un fibrado vectorial orbifold de rango 1. Consideremos las clases de Chern

$$c_k(TM - L^\vee) = c_k(TM) + c_{k-1}(TM)c_1(L)^1 + \cdots + c_1(L)^k,$$

donde L^\vee denota el dual de L y $1 \leq k \leq n$. Consideremos también

$$c^v(TM - L^\vee) = c_1^{v_1}(TM - L^\vee) \cdots c_n^{v_n}(TM - L^\vee),$$

donde $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $n = v_1 + 2v_2 + \cdots + nv_n$.

Como casos particulares resaltamos los dos casos extremos:

$$\text{I. } c_1(TM - L^\vee) = c_1(TM) + c_1(L),$$

$$\text{II. } c_n(TM - L^\vee) = c_n(TM \otimes L).$$

Identifiquemos $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ con \mathbb{C}^{n^2} . Recordemos que un polinomio $P : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ homogéneo de grado k es llamado **invariante** si cumple $P(A) = P(GAG^{-1})$ para todo $G \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ invertible. (Ejemplos básicos de tales polinomios están dados por la relación $\text{Det}(A+t \cdot I) = \sum_{k=0}^n P^{n-k}(A) \cdot t^k$: en particular tenemos $P_1(A) = \text{Tr}(A)$, la traza, y $P_n(A) = \text{Det}(A)$, el determinante).

Sean $\sigma_1(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i$, \dots , $\sigma_n(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n z_i$ las funciones simétricas elementales. Pongamos $\sigma^v = \sigma_1^{v_1} \cdots \sigma_n^{v_n}$. Es sabido que cualquier polinomio homogéneo invariante es una combinación lineal $P = \sum_v a_v \sigma^v$, $a_v \in \mathbb{C}$ (ver [6]).

Teorema 2.1 ([3]). *Sea M un orbifold compacto de dimensión n con singularidades aisladas. Sea L un fibrado vectorial orbifold de rango 1 sobre M y ξ una sección holomorfa de $TM \otimes L$ cuyos ceros son aislados. Si P es un polinomio homogéneo invariante de grado n , entonces se tiene*

$$\int_M P(TM - L^\vee) = \sum_{p/\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \text{Res}_{\tilde{p}} \left(\frac{P(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right),$$

donde $\pi_p : (\tilde{U}, \tilde{p}) \rightarrow (\tilde{U}/G_p, p)$ denota la proyección, $\tilde{\xi} = \pi_p^*(\xi)$, $J\tilde{\xi} = (\frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \tilde{z}_j})$ y $\text{Res}_{\tilde{p}} \left(\frac{P(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right)$ es el residuo de Grothendieck, siempre que $\xi(p) = 0$. \square

Definición 2.2 ([10]). Sea M un orbifold y ξ una sección holomorfa de $TM \otimes L$ con singularidades aisladas. Dado $p \in M$, consideremos la

A. Miguel Rodríguez

cobertura local suave $\pi_p : \tilde{U} \rightarrow U \cong \tilde{U}/G_p$ de una vecindad abierta U de p . El **índice de ξ en p** está definido por

$$\mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{\#G_p} \mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi}),$$

donde $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi})$ es el índice de Poincaré Hopf de $\tilde{\xi}$ en \tilde{p} .

En el teorema 2.1, de las propiedades de los residuos, sigue directamente lo siguiente.

Corolario 2.3. *Con la notación del teorema 2.1 se tiene*

$$\int_M c_n(TM \otimes L) = \sum_{\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

Además, si los ceros de ξ son no degenerados (es decir $J\tilde{\xi}(\tilde{p}) \neq 0$ para todo $p \in \text{Sing}(\xi)$), tenemos

$$\int_M c^v(TM - L^\vee) = \sum_{\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} \frac{C^v(J\tilde{\xi}(\tilde{p}))}{\det(J\tilde{\xi}(\tilde{p}))}.$$

Proof. Para la primera parte, en el teorema 2.1 tomemos $P = C_n$. Entonces la igualdad se sigue de $c_n(TM - L^\vee) = c_n(TM \otimes L)$ y $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi}) = \text{Res}_{\tilde{p}} \left(\frac{C_n(J\tilde{\xi}) d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \cdots \tilde{\xi}_n} \right)$. La segunda parte se desprende directamente de las propiedades locales de residuos para campos holomorfos con singularidades no degeneradas, ver [6, página 650]. \square

Análogo al caso liso, daremos una generalización de la definición del índice de Baum-Bott para una superficie orbifold. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa con singularidades aisladas en una superficie orbifold M . Sea $p \in M$ una singularidad de \mathcal{F} ; asumamos que cerca de p la foliación está localmente dada por un campo de vectores holomorfo $\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial w}$ o por una 1-forma holomorfa $\omega = \xi_1 dw - \xi_2 dz$, donde (z, w) son las coordenadas locales centradas en el punto $(0, 0)$ y ξ_1, ξ_2 son funciones

holomorfas con $\xi_1^{-1}(0) \cap \xi_2^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$. Definimos el **índice de Baum-Bott en p** por

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{\#G_p} \text{Res}_{(0,0)} \left(\frac{\text{Tr}^2(J\xi)}{\xi_1 \cdot \xi_2} dz \wedge dw \right).$$

3. Aplicación: foliaciones en $\mathbb{P}^n(w)$

En esta sección daremos las aplicaciones de los resultados dados anteriores a las foliaciones holomorfas en los espacios proyectivos ponderados. Primero, en forma rápida presentamos algunos preliminares; para más detalles se puede consultar [7], [5] o [4].

Sean $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos dos a dos. Consideremos la acción en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dada por

$$\lambda \cdot (Z_0, \dots, Z_n) = (\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \lambda^{w_n} Z_n).$$

Pongamos $w = (w_0, \dots, w_n)$, $|w| = w_0 + \dots + w_n$.

El **espacio proyectivo ponderado en los pesos w_0, \dots, w_n** está dado por

$$\mathbb{P}_w^n = \mathbb{P}^n(w) = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim;$$

Acá \sim hace referencia a la relación de equivalencia determinada por las órbitas del grupo del párrafo anterior. Denotaremos por $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_w^n$ a proyección canónica. Observemos que para $w_0 = \dots = w_n = 1$ se tiene $\mathbb{P}_w^n = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, el espacio proyectivo usual.

Estos espacios tienen singularidades precisamente cuando algún w_i es distinto de 1. En efecto, en tal caso se tiene

$$\text{Sing}(\mathbb{P}_w^n) = \{(0 : \dots : \underbrace{1}_i : \dots : 0)_w : w_i \neq 1\}.$$

A. Miguel Rodríguez

En este contexto resulta útil introducir la función $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{P}_w^n$ dada por $\varphi(Z_0 : \dots : Z_n) = (Z_0^{w_0} : \dots : Z_n^{w_n})_w$. Es un simple ejercicio verificar que φ es de grado $w_0 \cdots w_n$.

Establezcamos algo de notación. Para cada i pongamos

$$U_i = \{[Z_0, \dots, Z_n]_w \in \mathbb{P}_w^n : Z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_w^n.$$

Además consideremos $\mu_{w_i} = \{z \in \mathbb{C}^* : z^{w_i} = 1\}$.

El grupo μ_{w_i} induce una acción en $\widetilde{U}_i = \mathbb{C}^n$ dada por

$$\lambda \cdot (Z_0, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, Z_n) = (\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, \lambda^{w_n} Z_n),$$

de modo que se tiene $U_i \cong \widetilde{U}_i / \mu_{w_i}$. Entre estas copias de \mathbb{C}^n , para $j < i$ tenemos un cambio de coordenadas orbifold (ver [7]), osea una aplicación holomorfa inyectiva

$$\varphi_{ij} : \widetilde{U}_i \hookrightarrow \widetilde{U}_j$$

dada por

$$\varphi_{ij} \left((Z_0, \dots, \widehat{Z}_i, \dots, Z_n) \right) = \left(\frac{Z_0}{Z_j^{w_0/w_j}}, \dots, \frac{\widehat{Z}_j}{Z_j}, \dots, \frac{1}{Z_j^{w_i/w_j}}, \dots, \frac{Z_n}{Z_j^{w_n/w_j}} \right),$$

tal que φ_{ij} respeta la acción local de los grupos μ_{w_i} y μ_{w_j} . Con ello \mathbb{P}_w^n adopta estructura de orbifold.

Fijemos $d \in \mathbb{Z}$, consideramos la acción

$$\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$$

dado por

$$(\lambda, (Z_0, \dots, Z_n), t) \mapsto ((\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \lambda^{w_n} Z_n), \lambda^d t).$$

Definimos el **fibrado vectorial orbifold lineal en \mathbb{P}_w^n** por

$$\mathcal{O}_w(d) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) / \sim.$$

La siguiente proposición describe las secciones holomorfas globales de $\mathcal{O}_w(d)$ cuando $d > 0$.

Proposición 3.1 ([7]). Si $d > 0$, tenemos

$$H^0(\mathbb{P}_w^n, \mathcal{O}_w(d)) = \bigoplus_{w_0 k_0 + \dots + w_n k_n = d} \mathbb{C} \cdot (Z_0^{k_0} \dots Z_n^{k_n}).$$

□

Se verifica que el grupo de Picard de \mathbb{P}_w^n es un grupo cíclico infinito con el producto tensorial y es generado por $\mathcal{O}_w(1)$, con $\mathcal{O}_w(1)^{\otimes d} = \mathcal{O}_w(d)$, $d \in \mathbb{Z}$. Además, si $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{P}_w^n$ es como antes, entonces $\varphi^*(\mathcal{O}_w(1)) = \mathcal{O}(1)$ (es decir, φ es functorial). Detalles de esto puede ser visto en [7].

Proposición 3.2 ([7]). Para $\mathcal{O}_w(1)$, el fibrado hiperplano en \mathbb{P}_w^n , se tiene

$$\int_{\mathbb{P}_w^n} c_1(\mathcal{O}_w(1))^n = \frac{1}{w_0 \cdots w_n}.$$

□

Similar al caso proyectivo, tenemos una sucesión de Euler (ver [7]):

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i) \xrightarrow{\beta} T\mathbb{P}_w^n \longrightarrow 0,$$

donde

$$\text{I. } \alpha : 1 \longmapsto (w_0 Z_0, \dots, w_n Z_n),$$

$$\text{II. } \beta : (P_0, \dots, P_n) \longmapsto \pi_*(\sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial}{\partial Z_i}), \text{ acá } \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_w^n \text{ es la proyección canónica.}$$

Al aplicar producto tensorial con $\mathcal{O}_w(d-1)$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_w(d-1) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i + d-1) \rightarrow T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1) \rightarrow 0.$$

Una foliación holomorfa de dimensión uno y grado d en \mathbb{P}_w^n queda en la práctica inducida por un elemento de $H^0(\mathbb{P}_w^n, T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1))$ (comparar con [4]).

En efecto, toda foliación holomorfa de dimensión uno y grado d en \mathbb{P}_w^n queda determinada por un campo de vectores en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ de la forma $X = \sum_{i=0}^n P_i(Z) \frac{\partial}{\partial Z_i}$, donde cada P_i es un polinomio casi-homogéneo de tipo (w_0, \dots, w_n) y grado de casi-homogeneidad $d + w_i - 1$: es decir, que satisface

$$P_i(\lambda^{w_0} Z_0, \dots, \lambda^{w_n} Z_n) = \lambda^{d+w_i-1} P_i(Z_0, \dots, Z_n), \quad i = 0, \dots, n.$$

Sin embargo, obsérvese que $Q\mathcal{R}_w + X$ define la misma foliación que X , donde $\mathcal{R}_w = w_0 Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + w_n Z_n \frac{\partial}{\partial Z_n}$ es el campo radial y Q es cualquier polinomio casi-homogéneo de tipo (w_0, \dots, w_n) y grado de casi-homogeneidad $d - 1$, de ahí la terminología.

Proposición 3.3. *Si $d > 1 - \text{Máx}\{w_i + w_j : i \neq j\}$, entonces se tiene $H^0(\mathbb{P}_w^n, T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1)) \neq \{0\}$.*

Prueba. El par $\Omega_{\mathbb{P}_w^n}^r \times \Omega_{\mathbb{P}_w^n}^{n-r} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_w^n}^n$ induce el isomorfismo $\Omega_{\mathbb{P}_w^n}^r \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{\mathbb{P}_w^n}^{n-r}, \Omega_{\mathbb{P}_w^n}^n)$. Por otro lado tenemos $K_{\mathbb{P}_w^n} = \mathcal{O}_w(-\sum_{i=0}^n w_i)$, de modo que se logra $T\mathbb{P}_w^n = (\Omega_{\mathbb{P}_w^n}^1)^\vee = \Omega_{\mathbb{P}_w^n}^{n-1} \otimes (\Omega_{\mathbb{P}_w^n}^n)^\vee = \Omega_{\mathbb{P}_w^n}^{n-1}(\sum_{i=0}^n w_i)$. Una vez que se tiene $H^0(\mathbb{P}_w^n, T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1)) \cong H^0(\mathbb{P}_w^n, \Omega_{\mathbb{P}_w^n}^{n-1}(\sum_{i=0}^n w_i + d-1))$, el resultado se sigue de [5, corolario 2.3.4]. \square

Pasemos ahora a aplicaciones y ejemplos en los espacios proyectivos ponderados. El siguiente corolario es una aplicación del corolario 2.3.

Corolario 3.4. *Para ξ una sección holomorfa de $T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$ con singularidades aisladas se tiene*

$$\sum_{\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} \sigma_j(w).$$

En particular, si ξ tiene singularidades no degeneradas, entonces se cumple

$$\sum_{\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} \sigma_j(w).$$

Si además ξ se tiene $Sing(\xi) \cap Sing(\mathbb{P}_w^n) = \emptyset$, entonces se satisface

$$\#Sing(\xi) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} \sigma_j(w).$$

Prueba. En virtud del corolario 2.3 basta demostrar la igualdad

$$\int_{\mathbb{P}_w^n} c_n(T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1)) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} \sigma_j(w).$$

Veamos eso. Pongamos $s = d-1$. En la sucesión de Euler

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i) \rightarrow T\mathbb{P}_w^n \rightarrow 0,$$

tenemos $c(T\mathbb{P}_w^n) = c(\mathbb{C})c(T\mathbb{P}_w^n) = c(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i))$; lo cual conduce a

$$\begin{aligned} c_n(T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(s)) &= \sum_{j=0}^n c_j(T\mathbb{P}_w^n) c_1(\mathcal{O}_w(s))^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n c_j\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i)\right) c_1(\mathcal{O}_w(s))^{n-j}. \\ &= \sum_{j=0}^n s^{n-j} c_j\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i)\right) c_1(\mathcal{O}_w(1))^{n-j}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para calcular $c_j(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i))$ ponemos $c_1(\mathcal{O}_w(1)) = h$, y tenemos entonces

$$\begin{aligned} c\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i)\right) &= \prod_{i=0}^n c(\mathcal{O}_w(w_i)) = \prod_{i=0}^n (1 + c_1(\mathcal{O}_w(w_i))) \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + w_i h) = 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j(w) h^j. \end{aligned}$$

A. Miguel Rodríguez

Así, en (3.1) tenemos

$$\begin{aligned}
c_n(T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(s)) &= s^n h^n + \sum_{j=1}^n s^{n-j} c_j(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i)) h^{n-j} \\
&= s^n h^n + \sum_{j=1}^n s^{n-j} \sigma_j(w) h^j h^{n-j} \\
&= (s^n + \sum_{j=1}^n s^{n-j} \sigma_j(w)) h^n \\
&= (\sum_{j=0}^n s^{n-j} \sigma_j(w)) h^n.
\end{aligned}$$

Gracias a ello la proposición 3.2 nos lleva a

$$\int_{\mathbb{P}_w^n} c_n(T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(s)) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n s^{n-j} \sigma_j(w).$$

□

En el siguiente corolario establecemos condiciones para que una foliación en \mathbb{P}_w^n sea singular.

Corolario 3.5. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de grado d y con singularidades aisladas en \mathbb{P}_w^n . Si se cumple $d > 0$ ó $d-1 \nmid \sigma_n(w)$, entonces se tiene $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Para $n = 2$ basta $d \geq 0$ para lograr $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.*

En particular, cuando \mathcal{F} es inducida por una sección holomorfa ξ de $T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$, si para algún i se cumple $w_i = 1$ y $\deg(\xi_i) > 0$, entonces se tiene $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Prueba. Bajo la primera condición, supongamos se satisfaga $\text{Sing}(\xi) = \emptyset$. Entonces por el corolario 3.4 tenemos $\sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} \sigma_j(w) = 0$; lo cual obviamente implica $d-1 \mid \sigma_n$. Como $d > 0$ implica $\sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} P_j(w) > 0$, deducimos de paso que se cumple $d \leq 0$.

En el segundo caso es suficiente analizar $d = 0$. Para ello nuevamente supongamos se tenga $Sing(\xi) = \emptyset$. Entonces por el corolario 3.4 tenemos $1 = \sigma_1(w) - \sigma_2(w) \leq 0$, lo cual es una contradicción.

Bajo las hipótesis del caso particular tenemos $0 < deg(\xi_i) = d + w_i - 1 = d$. La primera parte conduce luego a $Sing(\xi) \neq \emptyset$. \square

Los siguientes dos corolarios brindan un nexo entre el conjunto singular de una foliación y el del espacio ambiente \mathbb{P}_w^n . Recordemos que se tiene

$$Sing(\mathbb{P}_w^n) = \{(0 : \dots : \underbrace{1}_i : \dots : 0)_w : w_i \neq 1\}.$$

Corolario 3.6. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de grado d en \mathbb{P}_w^2 con singularidades aisladas.*

- *Si $w = (1, 1, k)$ con $1 < k \nmid d^2$, entonces \mathcal{F} tiene una singularidad incluida en $\{(0 : 0 : 1)_w\} = Sing(\mathbb{P}_w^2)$.*
- *Sea $w = (1, 1, k)$ con $k > 1$, y supongamos se tenga $d \geq 0$. Entonces si $(0 : 0 : 1)_w$ es una singularidad no degenerada de \mathcal{F} , resulta que \mathcal{F} admite por lo menos una singularidad adicional.*
- *Sea $d \neq 1$. Si las singularidades de \mathcal{F} son todas no degeneradas, entonces $Sing(\mathcal{F}) \neq \{(1 : 0 : 0)_w, (0 : 1 : 0)_w, (0 : 0 : 1)_w\}$. (Compare con el ejemplo 3.9, abajo.)*

Prueba. Si en la primera parte suponemos que \mathcal{F} no admite una singularidad en $(0 : 0 : 1)_w$, entonces por el corolario 3.4 se tiene $\frac{d^2}{k} + d + 1 = \frac{(d-1)^2 + (d-1)\sigma_1(w) + \sigma_2(w)}{k} \in \mathbb{Z}$; de donde en particular se concluye $k|d^2$.

Si en segunda parte nuevamente suponemos lo contrario, el corolario 3.4 entrega $\frac{1}{k} = \frac{d^2 + kd + k}{k}$; lo cual es imposible una vez que se tiene $k > 1$ y $d \geq 0$.

Si en la tercera parte suponemos lo contrario, el corolario 3.4 nos lleva a $\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} = \frac{(d-1)^2 + (d-1)\sigma_1(w) + \sigma_2(w)}{w_0 w_1 w_2}$. Esto derivará en $d = 1$ o $d = 1 - \sigma_1(w)$. Como por hipótesis se tiene $d \neq 1$ se deberá satisfacer $d = 1 - \sigma_1(w)$. Pero ello contradice a $d > 1 - \text{Máx}\{w_i + w_j : i \neq j\} > 1 - \sigma_1(w)$, propiedad ya demostrada en la proposición 3.3. \square

Corolario 3.7. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de grado d en \mathbb{P}_w^n con singularidades aisladas y no degeneradas.

- Sea $n \geq 3$. Si $d \neq 1$ y $d-1 \nmid \sigma_{n-1}(w)$, entonces $\text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \{(1 : \dots : 0)_w, \dots, (0 : \dots : 1)_w\}$. (Compare con el ejemplo 3.9, abajo.)
- Si $d = 1$ (en este caso \mathcal{F} es inducida por un campo global pues se tiene $H^0(\mathbb{P}_w^n, T\mathbb{P}_w^n \otimes \mathcal{O}_w(0)) \cong H^0(\mathbb{P}_w^n, T\mathbb{P}_w^n)$) y $w_i \nmid \sigma_n(w)$ para algún i , entonces se satisface $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \text{Sing}(\mathbb{P}_w^n) \neq \emptyset$.

Prueba. Para la primera afirmación supongamos que se tenga $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(1 : \dots : 0)_w, \dots, (0 : \dots : 1)_w\}$ con $d \neq 1$. Entonces por el corolario 3.4 se cumple $\frac{\sigma_n(w)}{w_0 \dots w_n} = \frac{1}{w_0} + \dots + \frac{1}{w_n} = \frac{(d-1)^n + \dots + (d-1)\sigma_{n-1}(w) + \sigma_n(w)}{w_0 \dots w_n}$; es decir se tendrá $d-1 \mid \sigma_{n-1}(w)$.

Ahora supongamos se cumple $d = 1$ y $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \text{Sing}(\mathbb{P}_w^n) = \emptyset$. El corolario 3.4 nos lleva a $\frac{\sigma_n(w)}{w_0 \dots w_n} = \sum \mathcal{I}_p(\xi) \in \mathbb{N}$, de donde pasamos a $w_0 \dots w_n \mid \sigma_n(w)$, lo cual equivale a decir que todo w_i divide a $\sigma_n(w)$ pues los w_i son coprimos entre sí. \square

Ejemplo 3.8. Tomemos $w = (1, 1, 3)$, y consideremos el campo $\xi = Y^5 \frac{\partial}{\partial X} + X^5 \frac{\partial}{\partial Y} + YZ^2 \frac{\partial}{\partial Z}$ (con $d = 5$).

Primero calculemos las singularidades de la foliación asociada. La igualdad

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ Y^5 & X^5 & YZ^2 \\ X & Y & 3Z \end{vmatrix} = 0,$$

nos lleva al sistema (en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$):

$$\begin{aligned} 3ZX^5 &= Y^2Z^2 \\ 3ZY^5 &= XYZ^2 \\ Y^6 &= X^6, \end{aligned}$$

que tiene como solución $(X, \alpha X, 0)$ y $(X, \alpha X, 3\alpha^4 X^3)$, con $\alpha^6 = 1$, en U_0 , y a $(0, 0, Z)$, donde $Z \neq 0$. (Nada novedoso aparece en U_1 .) Al pasar al cociente, obtenemos

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(1 : \alpha : 0)_w, (1 : \alpha : 3\alpha^4)_w, (0 : 0 : 1)_w\},$$

trece singularidades en total.

Ahora estudiaremos el campo ξ localmente. En $U_0 = \{X \neq 0\}$, tenemos $\pi_*(\xi) \frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{X}(Y \frac{\partial}{\partial y} + 3Z \frac{\partial}{\partial z})$, $\pi_*(\xi) \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial y}$ y $\pi_*(\xi) \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial z}$. Trasladando estas expresiones en ξ con $X = 1$, tenemos la expresión local $\tilde{\xi}$ de ξ en U_0 dada por

$$\tilde{\xi} = (1 - y^6) \frac{\partial}{\partial y} + (yz^2 - 3zy^5) \frac{\partial}{\partial z}.$$

(En la práctica, la expresión local del campo ξ en U_0 puede ser obtenida sustituyendo la expresión de $\mathcal{R}_w = X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y} + 3Z \frac{\partial}{\partial Z} = 0$ en ξ , con $X = 1$). Con esta expresión obtenemos

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -6y^5 & 0 \\ z^2 - 15zy^4 & 2yz - 3y^5 \end{vmatrix} = -6y^5(2yz - 3y^5).$$

Claramente $(y, z) = (\alpha, 0), (\alpha, 3\alpha^4)$ son singularidades no degeneradas. Así $\mathcal{I}_{(\alpha, 0)}(\xi) = \mathcal{I}_{(\alpha, 3\alpha^4)}(\xi) = 1$, lo que implica que la suma de índices (en el abierto U_0) es igual a 12 (pues son 12 las singularidades).

En $U_2 = \{Z \neq 0\}$, de $\mathcal{R}_w = 0$ pasamos a $\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{1}{3}(X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y})$. La expresión local para ξ en U_2 resulta ser

$$\tilde{\xi} = (y^5 - \frac{1}{3}xy) \frac{\partial}{\partial x} + (x^5 - \frac{1}{3}y^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso se tiene

$$\det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}y & 5y^4 - \frac{1}{3}x \\ 5x^4 & -\frac{2}{3}y \end{vmatrix} = \frac{2}{9}y^2 - 5x^4(5y^4 - \frac{1}{3}x).$$

Acá únicamente interesa la singularidad $(x, y) = (0, 0)$, la cual es degenerada y cuyo índice está dado por definición por $\mathcal{I}_{(0, 0)}(\xi) = \frac{7}{3}$. Una vez que $\sum_{\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = \frac{43}{3}$, el corolario 3.4 queda ratificado.

Ejemplo 3.9. Sean $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos de a dos. Supongamos se tenga $w_i \neq w_j$ cuando $i \neq j$. Consideremos el campo

$$X = \sum_{k=0}^n Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} \in H^0(\mathbb{P}_w^n, T\mathbb{P}_w^n)$$

A. Miguel Rodríguez

(acá $d = 1$).

En la carta afín $Z_i \neq 0$ (donde fijamos $Z_i = 1$), de

$$\mathcal{R}_w = \sum_{k=0}^n w_k Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} = 0$$

se pasa a

$$\frac{\partial}{\partial Z_i} = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{w_k}{w_i} Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k},$$

lo que proporciona la expresión local de X en U_i dada por

$$X_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(1 - \frac{w_k}{w_i}\right) Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k}.$$

Se observa que el origen es la única singularidad, no degenerada además.

Resumiendo, tenemos

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(1 : 0 : \dots : 0)_w, \dots, (0 : 0 : \dots : 1)_w\}.$$

Obtenemos entonces

$$\sum_{p: X(p)=0} \mathcal{I}_p(X) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{w_i} = \frac{\sigma_n(w)}{w_0, \dots, w_n} = \frac{\sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j} \sigma_j(w)}{w_0 \cdots w_n},$$

y así el corolario 3.4 es satisfecho ($d = 1$).

Corolario 3.10. *Sea ξ una sección holomorfa de $T\mathbb{P}_w^2 \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$ cuyas singularidades son todas aisladas. Entonces se cumple*

$$\sum_{\xi(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|w| + d - 1)^2.$$

Prueba. De acuerdo con el teorema 2.1 basta con demostrar la igualdad

$$\int_{\mathbb{P}_w^2} c_1^2(T\mathbb{P}_w^2 - \mathcal{O}_w(1-d)) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|w| + d - 1)^2.$$

Pongamos $s = d - 1$ y $h = c_1(\mathcal{O}_w(1))$. En efecto, de la proposición 3.2 se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{P}_w^2} c_1^2(T\mathbb{P}_w^2 - \mathcal{O}_w(1-d)) &= \int_{\mathbb{P}_w^2} (c_1(T\mathbb{P}_w^2) + c_1(\mathcal{O}_w(d-1)))^2 \\
 &= \int_{\mathbb{P}_w^2} (|w|h + sh)^2 \\
 &= \int_{\mathbb{P}_w^2} (|w| + s)^2 h^2 \\
 &= (|w| + s)^2 \int_{\mathbb{P}_w^2} h^2 \\
 &= \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|w| + s)^2.
 \end{aligned}$$

□

Sea ξ una sección holomorfa de $T\mathbb{P}_w^2 \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$ con singularidades aisladas. Sea \mathcal{F} la foliación inducida por ξ . Dado $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, diremos que p es **una singularidad radial** si localmente (es decir, vía una carta orbifold) el campo ξ es de la forma

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \cdots.$$

Corolario 3.11. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de grado d en \mathbb{P}_w^2 con singularidades aisladas. Si todas las singularidades son radiales, entonces se satisface*

$$d = \frac{1}{3} \left(3 - \sigma_1(w) \pm 2\sqrt{\sigma_1(w)^2 - 3\sigma_2(w)} \right).$$

En particular si $w_0 = w_1 = w_2 = 1$, entonces se tiene $d = 0$; y si $w_0 = w_1 = 1$ y $w_2 = k$, entonces $d = \frac{k-1}{3}$ o $d = 1 - k$.

Prueba. Puesto que cada singularidad es localmente radial, tenemos

A. Miguel Rodríguez

$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = 4\mathcal{I}_p(\xi)$ para todo $p \in \mathbb{P}_w^2$. De esta manera se logra

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|w| + d - 1)^2 &= \sum_{\xi(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) \\ &= 4 \sum \mathcal{I}_p(\xi) \\ &= 4 \frac{(d-1)^2 + (d-1)\sigma_1(w) + \sigma_2(w)}{w_0 w_1 w_2}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces $3(d-1)^2 + 2\sigma_1(w)(d-1) + 4\sigma_2(w) - \sigma_1(w)^2 = 0$, y el resultado se sigue directamente. \square

Ejemplo 3.12. El campo $X = -k \frac{\partial}{\partial Z_2}$ en $\mathbb{P}(1, 1, k)$, con $k > 1$, tiene grado $d = 1 - k$ y admite una única singularidad, que es de tipo radial en la carta $U_2(Z_2 = 1)$. Obsérvese que se cumple $d > 1 - \text{Máx}\{w_i + w_j : i \neq j\} = -k$.

Corolario 3.13. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de grado d en $\mathbb{P}(a^2 - b^2 + c, a^2 - 2ab + c, c)$ con singularidades aisladas radiales. Entonces $3 \nmid 2a - b$ implica $d = 1 + b^2 - c$.

Prueba. En la expresión

$$d = \frac{1}{3} \left(3 - \sigma_1(\omega) \pm 2\sqrt{\sigma_1(\omega)^2 - 3\sigma_2(\omega)} \right),$$

una vez que $w_0 = a^2 - b^2 + c$, $w_1 = a^2 - 2ab + c$ y $w_2 = c$ tenemos $\sigma_1(\omega)^2 - 3\sigma_2(\omega) = (a^2 + b^2 - ab)^2$. Ello implica $d = 1 - c + b^2$ o $d = 1 - c - \frac{1}{3}(2a - b)^2$, y el resultado se sigue de inmediato. \square

Agradecimientos. Quiero agradecer de manera muy especial a mis orientadores de doctorado en la Universidad Federal de Minas Gerais UFMG (Brasil): Maurício Corrêa Jr. y Márcio Gomes Soares. Agradezco también al profesor Arturo Fernández Pérez de la UFMG por las valiosas conversaciones durante mi doctorado.

Referencias

- [1] RAIMUND BLACHE, *Chern classes and Hirzebruch-Riemann-Roch Theorem for coherent sheaves on complex-projective orbifolds with isolated singularities*. Mathematische Zeitschrift. **222** (1996), Vol. 222, 7 – 57.
- [2] RAOUL BOTT, *Vector Fields and Characteristic Numbers*. The Michigan Mathematical Journal. (1967), vol 14, 231 – 244.
- [3] MAURÍCIO CORRÊA JR., MIGUEL RODRÍGUEZ PEÑA Y MARCIO G. SOARES, *A Bott-Type Residue Formula on Complex Orbifolds*. International Mathematics Research Notices Advance Access published. (2015).
- [4] MAURÍCIO CORRÊA JR. Y MÁRCIO G. SOARES, *A Note on Poincaré’s Problem for Quasi-Homogeneous Foliations*. Proceedings of the American Mathematical Society. **9** (2012), vol 140, 3145 – 3150.
- [5] IGOR DOLGACHEV, *Weighted Projective Varieties*. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag. (1982), Vol. 956.
- [6] PHILLIP GRIFFITHS Y JOSEPH HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*. Harvard University. (1978).
- [7] ETIENNE MANN, *Cohomologie quantique orbifolde des espaces projectifs à poids*. J. Algebraic Geom. **17** (2008), 137 – 166.
- [8] DAVID PRILL, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*. Duke Mathematical Journal. **34** (1967), 375 – 386.
- [9] ARNULFO MIGUEL RODRÍGUEZ PEÑA, *Fórmulas residuais de tipo Bott e invariante de Futaki para orbifolds complexos*. Tesis doctoral. Universidad Federal de Minas Gerais. (2014).

A. Miguel Rodríguez

- [10] ICHIRO SATAKE, *The Gauss-Bonnet Theorem for V-manifolds*. Journal of the Mathematical Society of Japan. **4** (1957), Vol. 9.
- [11] WILLIAM P. THURSTON, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Princeton University Press. (1997).

Abstract: We present (without proof) a version of Bott theorem for compact complex orbifolds with isolated singularities. Then we deduce some important consequences of this theorem, and finally we give some applications to holomorphic foliations on weighted projective spaces.

Keywords: Orbifold, weighted projective spaces, foliations.

A. Miguel Rodríguez
ICEX - UFMG
Departamento de Matemática
Av. Antônio Carlos 6627
30123-970 Belo Horizonte MG, Brazil

DEMAT - UFSJ
Departamento de Matemática y Estadística
Praça Frei Orlando 170, Centro
36307-352 São João Del-Rei MG, Brazil.

miguel.rodriguez.mat@ufsj.edu.br

Estructura de los grupos abelianos ordenados

Francisco Ugarte Guerra^{1,2}

Julio, 2015

Resumen

Este trabajo presenta las notaciones y resultados básicos de la teoría de grupos abelianos ordenados necesarios para establecer el teorema de Hahn, el cual describe la estructura de este tipo de grupos. Además presentamos una prueba simple del teorema de Hahn para grupos ordenados de rango finito y algunos resultados sobre la minimalidad de la inmersión descrita en el teorema

MSC(2010): 06F20, 20F60.

Palabras clave: *grupos ordenados, subgrupos aislados, esqueleto de un grupo, teorema de Hahn.*

¹ *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

² *Proyecto DGI: 0038-2012.*

1. Introducción

Este trabajo es esencialmente una recopilación de resultados de la teoría de grupos abelianos ordenados. Aquí recogemos las notaciones y resultados básicos necesarios para establecer el teorema de Hahn, el mismo que describe la estructura de este tipo de grupos.

El teorema de Hahn [7] establece que todo grupo abeliano totalmente ordenado puede sumergirse en un subgrupo aditivo de una potencia de los números reales con el orden lexicográfico, es decir, en un subconjunto del producto cartesiano usual de copias de \mathbb{R} (ver definición más adelante), y es, sin duda, una herramienta fundamental para la clasificación de grupos abelianos ordenados. La prueba del teorema apareció por primera vez en ([5]) y se desarrolla a lo largo de 27 páginas; a ella Clifford la califica de “maratón transfinita” (ver [2]). Cincuenta años más tarde, Hausner y Wendel ([6]) logran una demostración más simple, pero válida solo cuando G es un espacio vectorial real ordenado. Por último, Ribenboim ([7]) utiliza un resultado de álgebra lineal de Banachewski para dar una demostración simple del teorema.

Añadiremos una prueba simple del teorema de Hahn en el caso particular de grupos de rango finito y algunos resultados sobre la minimalidad de la inmersión sugerida por el teorema.

2. Definiciones y propiedades básicas

En esta sección presentamos las definiciones, los resultados y la notación que utilizamos en el artículo. Hemos omitido las demostraciones que no consideramos interesantes o que aparecen en otros lugares.

2.1. Producto de Hahn de una familia de grupos

Comenzaremos con la notación a ser utilizada al considerar productos de grupos. Partimos de una familia $\{G_i\}_{i \in I}$ de grupos abelia-

nos. Como es habitual, representaremos su producto directo por $\prod_{i \in I} G_i$ y $\pi_j : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j$, dada por $\pi_j((g_i)_{i \in I}) = g_j$, la **proyección** j -ésima.

Para cada elemento $\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i$, llamaremos **soporte de** \underline{g} a

$$Sop(\underline{g}) = \{i \in I \mid \pi_i(\underline{g}) \neq 0\};$$

con esta notación la suma directa de la familia $\{G_i\}_{i \in I}$ es

$$\bigoplus_{i \in I} G_i = \{\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \#(Sop(\underline{g})) < \infty\}.$$

Si I es un conjunto totalmente ordenado, pondremos $\bar{I} = I \cup \{\infty\}$ y consideraremos el orden en \bar{I} como el orden de I junto con $i < \infty$ para todo $i \in I$.

Para todo $\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i$ tal que $Sop(\underline{g})$ tiene mínimo definimos el **orden de** \underline{g} como $\circ(\underline{g}) = \min\{Sop(\underline{g})\}$, es decir, $\circ(\underline{g}) = i$ si y solo si $\pi_i(\underline{g}) \neq 0$ y $\pi_j(\underline{g}) = 0$ para $j < i$. Por convención aceptaremos que se cumple $Sop(\underline{0}) = \emptyset$ y $\circ(\underline{0}) = \infty$.

De la definición anterior se desprenden las siguientes propiedades para el orden de \underline{g} .

- Si $\underline{g} \in \bigoplus_{i \in I} G_i$, entonces \underline{g} tiene siempre orden.
- Si $Sop(\underline{g})$ está bien ordenado, entonces tiene un mínimo y \underline{g} tiene orden.
- Si I está bien ordenado, entonces para cada $\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i$ o bien $\underline{g} \neq 0$ y su soporte está bien ordenado o, en su defecto, $\underline{g} = 0$. En otras palabras, para cada $\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i$ existe $\circ(\underline{g})$.

Sea $\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i \setminus \{0\}$ tal que exista el orden de \underline{g} . Llamamos **inicial de \underline{g}** al elemento $in(\underline{g}) = \pi_i(\underline{g}) \in G_i$, donde $i = o(\underline{g})$. Por convención pondremos $in(\underline{0}) = 0$.

Definición 2.1. Dada una familia de grupos abelianos $\{G_i\}_{i \in I}$ con I un conjunto totalmente ordenado, llamamos **producto de Hahn de la familia** a

$$\prod_{i \in I} G_i = \{\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i \mid Sop(\underline{g}) \subset I \text{ bien ordenado}\} \cup \{0\}.$$

Proposición 2.2. El conjunto $\prod_{i \in I} G_i$ es un subgrupo de $\prod_{i \in I} G_i$ que contiene a su vez como subgrupo a $\bigoplus_{i \in I} G_i$. En consecuencia, contiene como subgrupos a todos los G_i . Si I está bien ordenado, entonces se tiene $\prod_{i \in I} G_i = \prod_{i \in G} G_i$, y si I es finito, se cumple $\bigoplus_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} G_i$. \square

La proposición es consecuencia de que una unión finita de conjuntos bien ordenados es bien ordenada.

2.2. Grupos divisibles

Recordemos que un grupo G se dice **divisible** cuando para cada $g \in G$ y cada $n \in \mathbb{N}$ no nulo existe $g' \in G$ con el cual se cumple $ng' = g$.

Ejemplo 2.3. El grupo \mathbb{Z} no es divisible pero en cambio \mathbb{Q} sí lo es. El hecho de que G sea divisible significa que la ecuación $nx = g$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tiene solución para cada $g \in G$. Notemos que no se afirma que esa solución sea única. Por ejemplo, el grupo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ es divisible porque todo elemento de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} admite una escritura de la forma $\frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ con $b > 0$ y $b > |a|$ y a, b relativamente primos. De este modo, para cada $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $\alpha = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ se cumple $n \left(\frac{a}{bn} + \mathbb{Z} \right) = \alpha$. Sin embargo, este elemento no

es único pues basta observar que la igualdad $n \left(\left(\frac{a}{bn} + \frac{1}{n} \right) + \mathbb{Z} \right) = \alpha$ abre camino muchas soluciones.

Proposición 2.4. *Para un grupo abeliano G son equivalentes:*

- i. G es divisible sin torsión,
- ii. para todo $g \in G$ y cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ se cumple que la ecuación $nx = g$ tiene una única solución en G ,
- iii. G admite una estructura de \mathbb{Q} -espacio vectorial que extiende su estructura natural de \mathbb{Z} módulo.

Demostración. Como G es divisible, la ecuación $nx = g$ tiene solución y, si g_1 y g_2 son soluciones, $g = ng_1 = ng_2$ implica $n(g_1 - g_2) = 0$. Como G no tiene torsión, se obtiene $g_1 - g_2 = 0$. Luego i implica ii.

Definimos $\frac{m}{n}g$ como la única solución de la ecuación $nx = mg$. Resulta inmediato que con la ley externa así definida estamos ante un \mathbb{Q} -espacio vectorial. Así hemos verificado que ii implica iii.

Como G es un \mathbb{Q} -espacio vectorial, se sigue que no tiene torsión, pues $ng = 0$ con $n \neq 0$ implica $0 = \frac{1}{n}(ng) = g$. Por otro lado G es divisible gracias a la igualdad $n(\frac{1}{n}g) = g$. Por tanto iii implica i. \square

Veamos ahora que todo grupo abeliano sin torsión se puede sumergir en un grupo divisible.

Proposición 2.5. *Si G es un grupo abeliano sin torsión, existe un grupo \overline{G} divisible y un homomorfismo inyectivo de grupos $l : G \rightarrow \overline{G}$ tales que para todo grupo abeliano sin torsión H y para todo homomorfismo $f : G \rightarrow H$ podemos encontrar un único homomorfismo de grupos $t : \overline{G} \rightarrow H$ tal que $t \circ l = f$.*

Demostración. Formamos el conjunto $\mathbb{Z}^+ \times G$ ($\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$), y definimos la relación $(n_1, g_1) \sim (n_2, g_2)$ cuando $n_2 g_1 = n_1 g_2$. Es inmediato que \sim es una relación de equivalencia.

Si ponemos $\overline{G} = \mathbb{Z}^+ \times G / \sim$ y representamos con $\frac{g}{n}$ la clase de (n, g) , resulta que \overline{G} es un grupo con la operación

$$\frac{g_1}{n_1} + \frac{g_2}{n_2} = \frac{n_2 g_1 + n_1 g_2}{n_1 n_2}.$$

Observamos que así \overline{G} es divisible y la aplicación $l : G \rightarrow \overline{G}$, definida mediante $l(g) = \frac{g}{1}$, resulta un homomorfismo inyectivo.

Por otro lado, si H es divisible y $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo, basta definir $t : \overline{G} \rightarrow H$ al poner $t\left(\frac{g}{n}\right) \in H$ como la única solución en H de la ecuación $nx = f(g)$ para conseguir el fin buscado. \square

Como consecuencia tenemos que todo grupo G abeliano sin torsión se puede sumergir en un grupo divisible sin torsión \overline{G} . Al grupo \overline{G} lo llamaremos **cierre divisible de G** .

El hecho de que el cierre divisible del producto de Hahn $\prod_{i \in I} G_i$ sea el producto de Hahn de los cierres divisibles de G_i , es decir, que se satisfaga $\prod_{i \in I} \overline{G}_i = \overline{\prod_{i \in I} G_i}$, queda como ejercicio para el lector.

Observación 2.6. En virtud de la definición de la ley externa en \overline{G} , tenemos que se satisface $\frac{m}{n} \frac{g}{r} = \frac{mg}{nr}$.

También, al tomar diversos $\frac{g_i}{n_i}, \dots, \frac{g_r}{n_r} \in \overline{G}$ conviene definir $n = n_1 \cdots n_r$ y $n'_i = n/n_i$. Luego, al usar la igualdad $\frac{g_i}{n_i} = \frac{n'_i g_i}{n}$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^r \frac{g_i}{n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n'_i g_i.$$

A esta última técnica se le conoce con el nombre de **reducción a denominador común**.

Lema 2.7. Sea G un grupo abeliano sin torsión. Si H es un subgrupo de G y $L(H)$ es el subespacio vectorial de \overline{G} generado por H , entonces $\alpha \in \overline{G}$ pertenece a $L(H)$ si y solo si existe un número natural n con el cual se tiene $n\alpha \in H$.

Demostración. Por definición, si $\alpha \in L(H)$, existen $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_r}{n_r} \in \mathbb{Q}$, con $m_i > 0$ y $g_1, \dots, g_r \in H$, sujetos a

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{n_i} \frac{g_i}{1}.$$

Por reducción a denominador común esto es igual a $\frac{h}{n}$ para cierto $h \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. De ahí se justifica $n\alpha = h \in H$.

Recíprocamente, si $n\alpha \in H$, entonces $n\alpha \in L(H)$, de donde se obtiene $\alpha \in L(H)$. \square

Podemos establecer correspondencias ida y vuelta entre $S(G)$, la colección de subgrupos G , y $\mathcal{L}(\overline{G})$, la colección de subespacios de \overline{G} de la siguiente manera.

- $L : S(G) \rightarrow \mathcal{L}(\overline{G})$ asocia a cada subgrupo H de G el subespacio $L(H)$ de \overline{G} generado por H ,
- $\Delta : \mathcal{L}(\overline{G}) \rightarrow S(G)$ asocia a cada subespacio $T \in \mathcal{L}(\overline{G})$ el grupo $\Delta(T) = T \cap G$.

Claramente $H_1 \subset H_2$ implica $L(H_1) \subset L(H_2)$ y $T_1 \subset T_2$ implica $\Delta(T_1) \subset \Delta(T_2)$. Sin embargo L y Δ no son inversas una de la otra aunque siempre se cumpla $L\Delta(T) = T$. En efecto, siempre se cumple $L\Delta(T) \subset T$ puesto que T es subespacio de $\mathcal{L}(\overline{G})$, se satisface $\Delta(T) \subset T$ y $L\Delta(T)$ es el menor subespacio que contiene a $\Delta(T)$. Por el otro lado, dado $h \in T$, al ser G un sistema de generadores de \overline{G} , se satisface

$$h = \frac{m_1}{n_1} g_1 + \dots + \frac{m_r}{n_r} g_r = \frac{g}{n} \in T.$$

para cierto $g \in G$ y n entero positivo. Luego, $g = nh \in T \cap G = \Delta(T)$, lo cual implica $h \in L\Delta(T)$.

Que no siempre $\Delta L(H)$ y H coincidan se comprueba, por ejemplo, al tomar $G = \mathbb{Z}$. En tal caso se tiene $\overline{G} = \mathbb{Q}$ y al definir $H = 2\mathbb{Z} \in S(\mathbb{Z})$ se obtiene $\Delta L(H) = \mathbb{Z} \neq H$.

2.3. Grupos ordenados

Definición 2.8. Un grupo abeliano es **ordenado** si es ordenado como conjunto y $g, h \geq 0$ implica $g + h \geq 0$.

Si el orden es total, diremos que G es un **grupo abeliano totalmente ordenado**. Aquí solo trabajaremos con grupos totalmente ordenados, por lo cual en lo general omitiremos la palabra totalmente.

Definición 2.9. Sean $(G, +, \leq)$ y $(G', +, \leq)$ grupos abelianos ordenados. Decimos que un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ es un **homomorfismo creciente de grupos ordenados** si $g_1 \leq g_2$ (en G) implica $\varphi(g_1) \leq \varphi(g_2)$ (en G').

Lema 2.10. Un grupo abeliano $(G, +, \leq)$ es totalmente ordenado si y solo si existe un subconjunto $S \subset G$, al que en lo sucesivo llamaremos **cono positivo**, que cumple las siguientes propiedades:

- $S \cup -S = G$,
- $S \cap -S = \{0\}$,
- para cada $g_1, g_2 \in S$ se tiene $g_1 + g_2 \in S$.

Demostración. En un sentido, si G es totalmente ordenado, basta definir $S = \{g \in G \text{ con } g \geq 0\}$. Este S satisface la primera condición ya que \leq es un orden total, la segunda por la propiedad antisimétrica del orden y la tercera porque G es un grupo ordenado.

En el otro sentido, si $S \subset G$ satisface las tres propiedades, ponemos $g_1 \leq g_2$ cuando $g_2 - g_1 \in S$. Claramente \leq satisface los axiomas de orden. Por ejemplo se tiene $g_1 \leq g_1$, pues $g_1 - g_1 = 0 \in S$. Además si se satisface $g_1 \leq g_2$ y $g_2 \leq g_1$, entonces para $h = g_1 - g_2$, se tiene $h \in S$ y $-h \in S$, es decir $h \in S \cap -S = \{0\}$, con lo cual concluimos $g_1 = g_2$. También $g_1 \leq g_2$ y $g_2 \leq g_3$ implican $g_1 - g_2 \in S$ y $g_2 - g_3 \in S$, y de ahí se pasa a $(g_1 - g_2) + (g_2 - g_3) = g_1 - g_3 \in S$, es decir, a $g_1 \leq g_3$. Notemos que este orden es total pues, dados $g_1, g_2 \in G$, se tiene $g_1 - g_2 \in G = S \cup -S$.

Si suponemos $g_1 - g_2 \in S$, entonces se tiene $g_1 - g_2 \geq 0$ y tal como el orden ha sido definido obtenemos $g_1 \leq g_2$. \square

Un homomorfismo de grupos ordenados $f : G \rightarrow G'$ es creciente si y solo si $f(S) \subset S'$ donde S y S' son, respectivamente, los conos positivos de G y G' .

Lema 2.11. *Un grupo abeliano totalmente ordenado no tiene torsión.*

Demostración. Sea $g \neq 0$ y $n > 0$. Como el grupo es totalmente ordenado, se cumple $g > 0$ o $g < 0$. Si $g > 0$, entonces se tiene que $n \cdot g = g + \dots + g > 0$. De forma análoga, de $g < 0$ se infiere $n \cdot g < 0$. Como para $n < 0$ se tiene $ng = 0$ si y solo si $(-n)g = 0$, se obtiene el resultado. \square

La siguiente proposición establece que cuando G es un grupo abeliano totalmente ordenado, el grupo \overline{G} (el cierre divisible de G , ver proposición 2.5) acepta un orden con el cual \overline{G} es un \mathbb{Q} -espacio vectorial ordenado y el homomorfismo de inmersión $l : G \rightarrow \overline{G}$ es creciente.

Proposición 2.12. *Si G es un grupo abeliano totalmente ordenado, entonces su cierre divisible \overline{G} se puede ordenar de modo que el homomorfismo $l : G \rightarrow \overline{G}$ sea un homomorfismo creciente de grupos ordenados.*

Demostración. Para definir el orden de \overline{G} , por el Lema 2,1, basta considerar como conjunto de elementos positivos a

$$S' = \left\{ \frac{g}{n} \in \overline{G} \text{ con } g \geq 0 \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \subset \overline{G}.$$

Con ello la condición $\frac{g_1}{n_1} \leq \frac{g_2}{n_2}$ equivale a $\frac{g_1}{n_1} - \frac{g_2}{n_2} = \frac{n_2 g_1 - n_1 g_2}{n_1 n_2} \in S'$, que a su vez es lo mismo que la condición $n_2 g_1 - n_1 g_2 \geq 0$.

Para establecer la segunda afirmación basta definir $l(g) = \frac{g}{1}$. \square

Definición 2.13. Un grupo abeliano G totalmente ordenado es **arqui-mediano** cuando para cada $\alpha, \beta \in G$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual se tiene $n\beta \geq \alpha > (n-1)\beta$.

Lema 2.14. *Sea G un grupo abeliano ordenado. Entonces G es arquimédiano si y solo si es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

Demostración. Fijemos $\alpha \geq 0$ en G . Tomemos $\beta > 0$. Como G es arquimédiano, para cada n existe $m(n)$ con el cual se tiene

$$m(n)\alpha \geq n\beta > (m(n) - 1)\alpha.$$

Un poco de manipulación estándar implica

$$\frac{m(n+1)}{n+1} > \frac{m(n)}{n} - \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{m(n)}{n} > \frac{m(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1},$$

de lo cual se sigue de inmediato que la secuencia $\left\{\frac{m(n)}{n}\right\}$ es de Cauchy.

Si ponemos $f(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n+1)}{n+1}$, es fácil ver que con $f(-\beta) = -f(\beta)$, éste se extiende a un homomorfismo sobreyectivo. Una prueba alternativa puede encontrarse en [7] \square

Observación 2.15. Si G es un grupo abeliano sin torsión que satisface $\sharp(G) \leq \sharp(\mathbb{R})$ (para las cardinalidades), entonces \overline{G} admite una base B como \mathbb{Q} -espacio vectorial con $\sharp(B) \leq \sharp(\mathbb{R})$. Al tenerse $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \sharp(\mathbb{R})$, podemos seleccionar una parte libre B' de \mathbb{R} con $\sharp(B') = \sharp(B)$. Entonces si $f : B \rightarrow B'$ es una biyección, se sigue que f induce un isomorfismo de \mathbb{Q} -espacios vectoriales entre \overline{G} y $L(B')$, el subespacio de \mathbb{R} generado por B' . Este isomorfismo permite ordenar \overline{G} y brindarle de paso a su subgrupo G una estructura de grupo ordenado arquimédiano.

Proposición 2.16. *Si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una familia de grupos abelianos ordenados con I conjunto totalmente ordenado, entonces a $\prod_{i \in I} G_i$ se le puede dotar de una estructura de grupo ordenado con la cual los morfismos $G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ son crecientes.*

Demostración. Al poner

$$S = \{\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \text{in}(\underline{g}) > 0\} \cup \{0\},$$

las propiedades de los conos positivos para $\prod_{i \in I} G_i$ (ver lema 2.10) se cumplen trivialmente.

Que las inyecciones sean crecientes es obvio pues resulta trivial que los conos positivos son los llevados al conjunto S definido arriba. \square

Observación 2.17. Como consecuencia de la proposición resulta que el homomorfismo $\bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ es creciente siempre que en la suma directa se tome el orden lexicográfico.

Proposición 2.18. *Todo grupo abeliano sin torsión admite un orden compatible con la estructura de grupo.*

Demostración. Todo grupo abeliano sin torsión G se puede sumergir en su cierre divisible \overline{G} , que es un \mathbb{Q} -espacio vectorial. Si $B = \{v_i\}_{i \in I}$ es una base de \overline{G} , podemos identificar $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} \approx \overline{G}$. Al ser \mathbb{Q} ordenado, la observación anterior garantiza que en \overline{G} existe un orden compatible con la estructura de grupo. Este orden en \overline{G} induce un orden en G . \square

Observación 2.19. Si G es grupo abeliano sin torsión y $\sharp(G) \leq \sharp(\mathbb{R})$, entonces $\sharp(B) \leq \sharp(\mathbb{R})$ y podemos elegir una familia de números reales \mathbb{Q} -independientes $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ de manera que el homomorfismo φ de G en \mathbb{R} definido como $\varphi(\sum r_i g_i) = \sum r_i \alpha_i$ es inyectivo e induce un orden arquimediano en G . Como el orden de la proposición anterior es claramente no arquimediano, entonces los dos órdenes son distintos y, en cierto sentido, son los órdenes extremos que se pueden definir en G .

2.4. Subgrupos aislados

Si partimos de un grupo G ordenado vamos a introducir un tipo de subgrupo de G que nos permitirá distinguir si el orden de G se aproxima más al de \mathbb{R} o al de una suma directa de copias de \mathbb{Q} .

Definición 2.20. Sea Γ un grupo abeliano totalmente ordenado. Diremos que $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es un **subgrupo convexo** de Γ (también llamado **aislado**) si dados $a, b \in \Gamma_0$, la condición $a \leq x \leq b$ implica $x \in \Gamma_0$.

Definición 2.21. Llamamos **segmento de extremos a y b** al conjunto

$$[a, b] = \{x \in \Gamma \text{ tal que } a \leq x \leq b\}.$$

Con esta notación Γ_0 es aislado cuando para cada $a, b \in \Gamma_0$ se satisface $[a, b] \subset \Gamma_0$, de aquí el nombre de convexo.

Se verifican las siguientes propiedades, cuya prueba dejamos en manos del lector.

Lema 2.22. *Para un grupo abeliano totalmente ordenado Γ se satisfacen las siguientes propiedades.*

- *Un subgrupo $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es aislado si y solo si $0 < x \leq a$ con $a \in \Gamma_0$ implica $x \in \Gamma_0$.*
- *Un subgrupo $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es aislado si y solo si en Γ/Γ_0 la relación \leq definida como $x + \Gamma_0 \leq y + \Gamma_0$ cuando $x \leq y$ es una relación de orden.*
- *Si Γ_0 y Γ_1 son subgrupos aislados de Γ , entonces se tiene $\Gamma_0 \subset \Gamma$ o $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ (es decir, el conjunto de subgrupos aislados de G queda totalmente ordenado por inclusión).*

Definición 2.23. Sea G un grupo abeliano ordenado, diremos que

- G es un **grupo de rango racional n** si la dimensión de su cierre divisible \bar{G} como \mathbb{Q} -espacio vectorial es n ;
- G es un **grupo de rango n** cuando admite n subgrupos propios aislados y no más.

Lema 2.24. *Sea G un grupo abeliano ordenado.*

- *El grupo G es arquimediato si y solo si sus únicos subgrupos aislados son 0 y G , es decir, G tiene rango igual a uno.*

- Si G tiene rango n , con subgrupos aislados

$$\Gamma_0 = 0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n = G,$$

entonces Γ_i/Γ_{i-1} no tiene subgrupos aislados propios y, en consecuencia, es arquimediano.

Demostración. Sea G es arquimediano y $H \neq 0$ un subgrupo aislado de G . Fijemos $\beta > 0$ en H (el cual existe al ser H no trivial). Dado $\alpha > 0$ en Γ , por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\beta > \alpha > 0$ lo cual por convexidad implica $\alpha \in [0, n\beta] \subset H$. De no satisfacerse $\alpha < 0$, se tendrá $-\alpha \geq 0$ e igual concluiremos $-\alpha \in H$; al ser H un grupo, ello equivale a $\alpha \in H$. De este modo H y G coinciden.

Recíprocamente, supongamos G no admita subgrupos aislados no triviales. Para $\alpha > 0$, la colección

$$S_\alpha = \{\gamma \mid \text{existe } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ con } |\gamma| < n\alpha\},$$

es claramente un subgrupo aislado. Al contener éste al menos a α , resulta igual a G . De este modo, dado $\beta > 0$, existe n tal que $0 < \beta < n\alpha$; es decir, se satisface la propiedad arquimediana.

La segunda afirmación resulta de que cuando $\Gamma_i \subset G$ es un subgrupo aislado, existe una correspondencia biunívoca obvia entre los subgrupos aislados $H \subset G$ con $\Gamma_i \subset H \subset \Gamma$ y los subgrupos aislados de Γ/Γ_i . \square

Llamaremos **grupo de rango finito** a todo grupo de rango n con n entero.

Definición 2.25. Dado $E \subset G$, llamaremos **subgrupo aislado generado por** E a la intersección de los subgrupos aislados que contienen a E .

Definición 2.26. Dado $\Gamma \subset G$ subgrupo, llamaremos **interior de** Γ al mayor subgrupo aislado contenido propiamente en él.

Si $A(G)$ denota a la familia de subgrupos aislados de G , entonces el interior de Γ está dado por

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\substack{\Gamma_i \subsetneq \Gamma \\ \Gamma_i \in A(G)}} \Gamma_i.$$

Definición 2.27. A un subgrupo aislado de G generado por un único elemento, digamos $g \neq 0$, lo llamaremos **subgrupo aislado principal**, y lo representaremos por Γ_g .

Claramente Γ_g es el menor subgrupo aislado que contiene a g .

Proposición 2.28. Si Γ es un subgrupo principal del grupo G , entonces $\Gamma/\tilde{\Gamma}$ es un grupo arquimediano distinto de cero.

Demostración. Como siempre se tiene $\Gamma_g \supset \tilde{\Gamma}_g$, basta probar que se cumple $\Gamma_g \neq \tilde{\Gamma}_g$ y que no aparecen subgrupos aislados intermedios entre ellos. Como obviamente se satisface $g \in \Gamma_g$, sobra verificar $g \notin \tilde{\Gamma}_g$. En efecto, de no ser así, por definición existiría $\Gamma_i \subsetneq \Gamma$ aislado tal que $g \in \Gamma_i$, y ello contradiría el hecho de que Γ_g sea el menor subgrupo aislado que contiene a g . Si $\tilde{\Gamma}_g \subsetneq \Gamma \subsetneq \Gamma_g$ se llega a una contradicción porque $\Gamma \subsetneq \Gamma_g$ implica $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}_g$, ya que por definición de $\tilde{\Gamma}_g$ éste es uno de los subgrupos que pertenecen a $\tilde{\Gamma}_g$ y satisfacen $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}_g$. \square

3. Esqueleto de un grupo ordenado

Sea (G, \leq) un grupo ordenado y $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ la familia de subgrupos aislados principales de G , ordenados por inclusión. Notemos que podemos ordenar I de manera que se cumpla $i < j$ cuando $\Gamma_i \subset \Gamma_j$. Escribamos $H_i = \Gamma_i/\tilde{\Gamma}_i$.

A la familia ordenada de grupos arquimedianos $\{H_i\}_{i \in I}$ se le denomina **esqueleto** de G .

Proposición 3.1. Sea G un grupo ordenado y $\{H_i\}_{i \in I}$ su esqueleto. Entonces para todo $g \in G$ no nulo existe un único $i \in I$ con el cual se tiene $g \in \Gamma_i$ y $g \notin \tilde{\Gamma}_i$.

Demostración. Puesto que para cada $g \neq 0$ se tiene $g \notin \tilde{\Gamma}_g$ y $g \in \Gamma_g$, la existencia es evidente. Para constatar unicidad, supongamos se tenga $g \in \Gamma_j$ y $g \notin \tilde{\Gamma}_j$ junto con $\Gamma_j \neq \Gamma_g$. Entonces como Γ_g es el menor subgrupo aislado que contiene a g , se satisface $\Gamma_g \subsetneq \Gamma_j$ y $\Gamma_g \subset \tilde{\Gamma}_j$, lo que implica $g \in \tilde{\Gamma}_j$; esto es una contradicción. \square

A partir del esqueleto podemos construir dos grupos abelianos graduados y ordenados asociados a un grupo abeliano ordenado.

i. El **graduado asociado al orden** está dado por

$$Gr(G) = \bigoplus_{i \in I} H_i = \bigoplus_{i \in I} \Gamma_i / \tilde{\Gamma}_i.$$

ii. El **graduado de Hahn** del grupo G está dado por

$$\mathcal{H}(G) = \prod_{i \in I} H_i.$$

De lo estudiado en la sección anterior se desprende que $Gr(G)$ y $\mathcal{H}(G)$ son grupos abelianos ordenados que satisfacen $Gr(G) \subset \mathcal{H}(G)$.

El teorema de Hahn, que no probamos aquí (ver [5], [7]), establece el siguiente resultado estructural.

Teorema 3.2. *Si G es un grupo abeliano ordenado, entonces G es de manera natural un subgrupo de $\mathcal{H}(G)$. Es más, la inmersión $G \rightarrow \mathcal{H}(G)$ es creciente.* \square

Como consecuencia, dado que los H_i son arquimedianos, se tiene $H_i \subset \mathbb{R}$, y de esta manera todo grupo abeliano ordenado se puede sumergir en un producto de Hahn de copias de \mathbb{R} .

Por ello, la posibilidad de ordenar un grupo G se traduce en la posibilidad de hallar esqueletos de G , donde los órdenes se corresponden con los esqueletos. Podemos preguntarnos antes si dos grupos con el mismo esqueleto son isomorfos.

Ejemplo 3.3. En la demostración de la proposición 2.28, cuando G es un grupo ordenado, hemos construido el grupo S_g que obviamente representa el mínimo subgrupo aislado que contiene a g , es decir, es idéntico a Γ_α . De este modo H es un subgrupo aislado principal de G cuando existe $g \in G$ con el que se cumple

$$H = \Gamma_g = \{\alpha \in G \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+, 0 \leq |\alpha| \leq n|g|\}.$$

Por ejemplo, si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una familia de grupos arquimedianos y ponemos $G = \prod_{i \in I} G_i$, entonces H será un subgrupo aislado principal de G cuando exista $\underline{g} \in G$ tal que

$$H = \Gamma_{\underline{g}} = \{\underline{\alpha} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+, 0 \leq |\underline{\alpha}| \leq n|\underline{g}|\}.$$

Puesto que el orden es lexicográfico, y se tiene que $r = \circ(\underline{g})$ y $\circ(n\underline{g})$ coinciden, todo elemento $\underline{\alpha} \in H$ satisfará $\circ(\underline{\alpha}) \geq r$. Recíprocamente, por un lado $\circ(\underline{\alpha}) > r$ implica directamente $\underline{\alpha} < \underline{g}$; mientras por otro la igualdad $\circ(\underline{\alpha}) = r$ conduce a que $\alpha_r \in G_r$ es no nulo: por la propiedad arquimediana de G_i , deberá existir n sujeto a $0 < |\alpha_r| < n|g_r|$, y con ello nuevamente obtenemos $0 \leq |\underline{\alpha}| \leq n|\underline{g}|$.

Las observaciones anteriores confirman así las caracterizaciones

$$\tilde{H} = \{\underline{\alpha} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \alpha_i = 0 \text{ cuando } i \leq r\},$$

$$H = \{\underline{\alpha} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \alpha_i = 0 \text{ cuando } i < r\}.$$

Consecuencia directa de ello se justifica la identificación $H/\tilde{H} = G_i$.

Teorema 3.4. Si $\mathfrak{F} = \{G_i\}_{i \in I}$ es una familia de grupos arquimedianos ordenados (con I un conjunto totalmente ordenado), entonces se tiene lo siguiente.

- (Cantor-Ribemboim) El grupo $G = \prod_{i \in I} G_i$ tiene por esqueleto a \mathfrak{F} .
- El subgrupo $\bigoplus_{i \in I} G_i \subset \prod_{i \in I} G_i$ también tiene por esqueleto a \mathfrak{F} .

Demostración. Sea $G = \prod_{i \in I} G_i$. Como los grupos G_i son arquimedianos, los subgrupos aislados principales de G están dados por

$$\Gamma_i = \{\underline{g} \in G \mid g_j = 0, j < i\},$$

y para cada uno de ellos se tiene

$$\tilde{\Gamma}_i = \{\underline{g} \in G \mid g_j = 0, j \leq i\}.$$

De este modo el esqueleto de G es $\{\Gamma_i/\tilde{\Gamma}_i\}_{i \in I} \simeq \{G_i\}_{i \in I}$.

El mismo razonamiento se aplica a $\bigoplus_{i \in I} G_i$, los detalles son dejados en manos del lector. \square

De este modo tenemos dos grupos, uno contenido en otro, con el mismo esqueleto. Ambos grupos coinciden cuando I es finito. No obstante, aún en este caso el esqueleto no determina el grupo, ver ejemplo 3.6, abajo.

Si añadimos la hipótesis de que los grupos sean divisibles se logra lo siguiente.

Proposición 3.5. *Si G es un grupo divisible con esqueleto $\mathfrak{F} = \{H_i\}_{i \in I}$, entonces de manera natural se tiene*

$$\bigoplus_{i \in I} H_i \subset G \subset \prod_{i \in I} H_i.$$

Si I es finito los tres grupos coinciden.

Demostración. La segunda inclusión es el teorema de Hahn. Para probar la primera basta observar que si $\mathfrak{F} = \{H_i\}_{i \in I}$ es el esqueleto de G , entonces al ser G divisible, para cada $i \in I$, los cocientes $H_i = \Gamma_i/\tilde{\Gamma}_i$ serán \mathbb{Q} -espacios vectoriales ordenados con bases

$$\mathcal{B}_i = \{g_{ij} + \tilde{\Gamma}_i \text{ con } g_{ij} \in \Gamma_i\}_{j \in J_i}.$$

Los elementos $\{g_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$ son independientes en G (como \mathbb{Q} -espacio vectorial), lo que permite definir los morfismos inyectivos crecientes

$\gamma_i : H_i \rightarrow G$ mediante $\gamma_i(g_{ij} + \tilde{\Gamma}_i) = g_{ij}$, que a su vez inducen un homomorfismo inyectivo $\gamma : \bigoplus_{i \in I} H_i \rightarrow G$ que es creciente pues para $i < l$ se tiene $g_{lj} \in \Gamma_l \setminus \Gamma_i$. \square

Acabamos de establecer que cuando G es divisible, el grupo $\bigoplus_{i \in I} H_i$ aparece como cota inferior y $\prod_{i \in I} H_i$ como cota superior entre los grupos cuyo esqueleto es el mismo de G . Si G no fuera divisible ello ya no es posible.

El siguiente ejemplo, propuesto por Clifford en [2], muestra dos grupos no isomorfos con el mismo esqueleto.

Ejemplo 3.6. Sea el grupo $G \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ generado por $\left\{ \left(\frac{1}{p_r}, \frac{r}{p_r} \right) \right\}_{r \in \mathbb{N}}$ donde p_r es el r -ésimo primo, es decir, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$

Primero notemos que $H = \{0\} \times \mathbb{Z}$ es un subgrupo de G . Para ello basta observar que se tiene $2 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in G$ y $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \in G$, de lo que se sigue $(1, 1) \in G$ y $(1, 2) \in G$ y, con ello, $(0, 1) \in G$; esto muestra la inclusión $H \subset G$.

En segundo lugar, notemos que H es aislado. En efecto, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(0, 0) \leq (a, b) \leq (0, n)$ con $(a, b) \in G$ implica $a = 0$. Pero $(0, b) \in G$ lleva a $(0, b) = n_1 \left(\frac{1}{p_{i_1}}, \frac{i_1}{p_{i_1}} \right) + \dots + n_r \left(\frac{1}{p_{i_r}}, \frac{i_r}{p_{i_r}} \right)$, para ciertos n_j , y con ello se tiene

$$0 = \frac{n_1}{p_{i_1}} + \dots + \frac{n_r}{p_{i_r}}. \quad (1)$$

Si ponemos $Q_j = p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_{j-1}} \cdot p_{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot p_{i_r}$, entonces p_{i_j} divide a Q_k si y solo si $j \neq k$. Al multiplicar (1) por $p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_r}$ obtenemos $0 = n_1 Q_1 + \dots + n_r Q_r$, es decir,

$$n_j Q_j = -(n_1 Q_1 + \dots + n_{j-1} Q_{j-1} + n_{j+1} Q_{j+1} + \dots + n_r Q_r),$$

de donde concluimos que p_{i_j} divide a $n_j Q_j$. Esto a su vez implica que p_{i_j} divide a n_j . De esta forma se consigue

$$b = \sum_{j=1}^r \frac{n_j i_j}{p_{i_j}} \in \mathbb{Z}.$$

Como esto significa $(a, b) \in H$, se concluye que H es aislado.

En tercer lugar notemos que H no admite subgrupo complementario en G . Supongamos, por el contrario que existe un subgrupo T tal que $H + T = G$ con $H \cap T = \{0\}$. En tal caso, para todo r se tendría

$$\left(\frac{1}{p_r}, \frac{r}{p_r} \right) = (0, n_r) + (a_r, b_r),$$

de donde se pasaría a

$$(a_r, b_r) = \left(\frac{1}{p_r}, \frac{r}{p_r} - n_r \right) \in T.$$

Esto a su vez conduce a $(1, r - p_r n_r) \in T$. Ahora bien, si existieran r y s de forma que $r - n_r p_r \neq s - n_s p_s$, entonces existiría un entero n no nulo tal que $(0, n) \in T$. Por tanto, para que T sea complementario a H , es obligatorio que los valores

$$1 - 2n_1, 2 - 3n_2, 3 - 5n_3, \dots,$$

sean todos iguales. De ello resulta

$$n_2 = \frac{2n_1 + 1}{3}, n_3 = \frac{2n_1 + 2}{5}, \dots, n_r = \frac{2n_1 + r}{p_{r+1}}, \dots,$$

Pero acá n_1 es fijo mientras $\frac{r}{p_{r+1}}$ tiende a cero, con lo que resulta imposible que $\frac{2n_1 + r}{p_{r+1}}$ sea persistentemente un entero. Concluimos que H no admite subgrupo complementario en G .

Como H es arquimediano, pertenece al esqueleto de G , y como no tiene complementario, es imposible que G sea suma directa de los grupos de su esqueleto.

Por su parte, el cociente G/H es también arquimediano puesto que cumple $(\alpha, \beta) + H \neq 0$ equivale a que se tenga $(\alpha, \beta) \notin H$, es decir, a la condición $\alpha \neq 0$. En consecuencia, se tiene que $(\alpha, \beta) + H \in G/H$, y $(\alpha, \beta) + H > (0, 0)$ si y solo si $\alpha > 0$ y, como además \mathbb{Q} es arquimediano, el cociente G/H también lo es. Por lo tanto, el esqueleto de G es $\{H, G/H\}$ y los grupos G y $H \oplus G/H$ no son isomorfos a pesar de tener el mismo esqueleto.

En un trabajo posterior caracterizaremos los esqueletos correspondientes a órdenes de G compatibles con el orden dado. Para a ello tendremos que introducir un nuevo objeto: las valoraciones.

4. Teorema de Hahn para grupos de rango finito

Comenzaremos probando que es suficiente probar el Teorema de Hahn para \mathbb{Q} -espacios vectoriales para validar el resultado general.

Proposición 4.1. *Sea G un grupo totalmente ordenado.*

- *Si $H \subset G$ es un grupo aislado de G , entonces $L(H)$ es un subgrupo aislado de \overline{G} .*
- *Si $R \subset \overline{G}$ es un subgrupo aislado de \overline{G} , entonces $\Delta(R)$ es un subgrupo aislado de G .*
- *Existe una correspondencia biunívoca entre los subgrupos aislados de G y de \overline{G} . Esta correspondencia además preserva el orden definido por inclusión.*

Demostración. Para la primera afirmación tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in L(H)$ sujetos $\alpha_1 \leq \beta \leq \alpha_2$. Entonces merced al lema 2.7 existen $n_1, n_2, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n_1\alpha_1, n_2\alpha_2, n\beta \in H$. Con $m = n_1n_2n$ se satisface $m\alpha_1 \leq m\beta \leq m\alpha_2$, y al tenerse $m\alpha_1, m\alpha_2 \in H$, la convexidad del grupo H implica $m\beta \in H$ y $\beta \in L(H)$.

La segunda parte es trivial.

Por último probaremos que las correspondencias L y Δ son inversas una de la otra. Al introducir las asignaciones mostramos que siempre se satisfacía $L\Delta(T) = T$. Ahora probaremos que cuando H es un subgrupo aislado de G se tiene también $\Delta L(H) = H$, es decir, $L(H) \cap G = H$. Como es directa la inclusión $H \subset L(H) \cap G$, nos limitamos a probar $L(H) \cap G \subset H$. Sea entonces $\alpha \in L(H) \cap G$. En tal caso directo de la definición se tiene $n\alpha \in H$ para cierto n positivo. Como se satisface $0 < |\alpha| \leq n|\alpha|$, que H sea aislado implica $\alpha \in H$. \square

Observación 4.2. Si Γ es un grupo abeliano, los subgrupos aislados de \overline{G} son justamente los subespacios vectoriales generados por los subgrupos aislados de G . Por tal razón el rango de \overline{G} coincide con el rango de G .

En la sección 2.3 hicimos constar que los subgrupos $L(\Gamma_i)/L(\Gamma_{i-1})$ son arquimedianos y, por tanto, isomorfos a un subgrupo de \mathbb{R} .

Lema 4.3. Sea V es un K -espacio vectorial. Si se tiene

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = V,$$

con L_i subespacios vectoriales y $\overline{B}_i = \{v_{ij} + L_{i-1}, \text{ con } v_{ij} \in L_i\}_{j \in I_i}$ base de L_i/L_{i-1} para cada i , entonces

$$B = \{v_{ij}, \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } j \in I_i\}$$

es una base de V .

Demostración. Veamos en primer lugar que el conjunto B es un sistema de generadores de V . Dado $v \in V$ se tiene $v + L_{n-1} \in L_n/L_{n-1}$ y por lo tanto también

$$v + L_{n-1} = \sum_{j \in I_n} \lambda_{nj} v_{nj} + L_{n-1},$$

para ciertos $\lambda_{nj} \in K$. Si ponemos $v_n = \sum_{j \in I_n} \lambda_{nj} v_{nj}$, entonces se tiene $v - v_n \in L_{n-1}$ y $(v - v_n) + L_{n-2} \in L_{n-1}/L_{n-2}$. Con ello se logra

$v - v_n = \sum_{j \in I_{n-1}} \lambda_{n-1j} v_{n-1j} + L_{n-2}$ e inductivamente se sigue el resultado.

La independencia lineal es trivial si nuevamente pasamos sucesivamente al cociente de los L_n . \square

En uso de los resultados anteriores probaremos a continuación el teorema final de este trabajo.

Teorema 4.4. *Si $(G, +, \leq)$ es un grupo abeliano totalmente ordenado y de rango n , entonces G es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}^n, +)$ con el orden lexicográfico.*

Demostración. Sustituimos, de ser necesario, G por \overline{G} para suponer que G es divisible. De esta forma G tiene estructura de \mathbb{Q} -espacio vectorial, y si además tiene rango n , con la cadena de subgrupos aislados dada por $\{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n = G$, entonces $\overline{B_{ij}} = \{g_{ij} + \Gamma_{i-1}\}_{j \in I_i}$ resulta base de Γ_i/Γ_{i-1} para ciertos g_{ij} . Por el lema 4.3, la colección $\{g_{ij}\}$ actúa como base de \overline{G} como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Fijada esta base, al suponer $g_{ij} > 0$, se tiene que para cada $g \in G$ se cumple

$$\begin{aligned} g &= \sum \lambda_{ij} g_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in I_i} \lambda_{ij} g_{ij} \right) \\ &= g_1 + g_2 + \dots + g_n, \text{ donde } g_i \in \Gamma_i. \end{aligned}$$

Ahora podemos construir una aplicación

$$\varphi : G \rightarrow \Gamma_n/\Gamma_{n-1} \times \dots \times \Gamma_1/\Gamma_0$$

con $\varphi(g) = (g_n + \Gamma_{n-1}, \dots, g_1 + \Gamma_0)$. Esta aplicación es \mathbb{Q} -lineal porque lo es en cada componente. Además transforma la base B de \overline{G} en una base del espacio producto $\Gamma_n/\Gamma_{n-1} \times \dots \times \Gamma_1/\Gamma_0$, y por ende es un isomorfismo de espacios vectoriales. Vamos ahora a comprobar que si en el espacio producto consideramos el orden lexicográfico, entonces φ resulta creciente. Para ello observemos que dado $g \in G$, con $g \neq 0$, existe

$r \leq n$ tal que $g_r \neq 0$ y $g_s = 0$ para cada $s > r$. Luego se tiene $g > 0$ si y solo si $g + \Gamma_{r-1} = g_r + \Gamma_{r-1} > 0$, lo cual es posible única y exclusivamente de tenerse

$$(g_n + \Gamma_{n-1}, \dots, g_r + \Gamma_{r-1}, \dots, g_1) = (0, \dots, 0, g_r + \Gamma_{r-1}, \dots, g_1) > 0$$

en el orden lexicográfico. Por otra parte, como Γ_r/Γ_{r-1} es arquimediano, resulta isomorfo a un subgrupo de \mathbb{R} , lo que da paso a una inmersión

$$\Gamma_r/\Gamma_{r-1} \hookrightarrow \mathbb{R}.$$

Al poner todo junto logramos

$$G \simeq \Gamma_n/\Gamma_{n-1} \times \dots \times \Gamma_1/\Gamma_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^n.$$

En pocas palabras, si G es divisible, entonces G es isomorfo a un producto de subgrupos de \mathbb{R} ordenados con el orden lexicográfico. \square

Referencias

- [1] BIRKHOFF, G.; *Lattice theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 25, rev. ed., New York, (1949), pp. 240
- [2] CLIFFORD, A. H.; *Note on Hahn's Theorem on ordered Abelian Groups*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 6 (Dec., 1954), pp. 860-863.
- [3] CONRAD, P.; *Embedding Theorems for Abelian Groups with Valuations*. American Journal of Mathematics, Vol. 75, No. 1 (Jan., 1953), pp. 1-29.
- [4] GRAVETT, K.A.H.; *Ordered Abelian groups*. The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 1, (1955), pp. 57-63.
- [5] HAHN, H.; *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*. Sitzungsber. d. Akademie d. Wiss. Wien, math. -naturw. Klasse, Vol. 116, Abt.IIa (1907), pp. 601-655.

Francisco Ugarte Guerra

- [6] HAUSNER, M., WENDEL, J.; *Ordered vector spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 3 (1952), pp. 977-982.
- [7] RIMBENBOIM, P.; *Théorie des valuations*. Les presses de L'Université de Montréal, Montreal, Quebec, (1965).
- [8] ROBINSON, A., ZAKON, E.; *Elementary Properties of ordered Abelian Groups*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 96, No. 2 (Aug., 1960), pp. 222-236.
- [9] UGARTE, F.; *Álgebra de series y solución de ecuaciones algebraicas sobre cuerpos valorados*. (Phd. Thesis) Univ. Valladolid, (2010).

Abstract

This paper covers the notation and basic results of the theory of ordered abelian groups required to state Hahn's Theorem, which deals with the structure of such groups. In addition, we present a simple proof of Hahn's theorem for groups of finite range and some results concerning the minimality of the immersion suggested by the theorem.

Keywords: Hahn's theorem, convex groups, valuations.

Francisco Ugarte Guerra
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel
Perú
fugarte@pucp.edu.pe

Cremona Symmetry in Gromov-Witten Theory

A.Gholampour¹, D.Karp², S.Payne³

February, 2016

Abstract

We establish the existence of a symmetry within the Gromov-Witten theory of \mathbb{CP}^n and its blowup along points. The nature of this symmetry is encoded in the Cremona transform and its resolution, which lives on the toric variety of the permutohedron. This symmetry expresses some difficult to compute invariants in terms of others less difficult to compute. We focus on enumerative implications; in particular this technique yields a one line proof of the uniqueness of the rational normal curve. Our method involves a study of the toric geometry of the permutohedron, and degeneration of Gromov-Witten invariants.

MSC(2010): 14N35, 14E05, 14M25.

Keywords: Gromov-Witten theory, enumerative geometry, stationary invariants, Cremona transform, projective space, permutohedron, permutohedral toric variety, Losev-Manin space.

¹ *Department of Mathematics, University of Maryland.*

² *Department of Mathematics, Harvey Mudd College.*

³ *Department of Mathematics, Yale University.*

1. Introduction

1.1 Overview

How many rational curves of degree d pass through r general points in \mathbb{CP}^n ? Call this number $N_{d,r}^n$. Determining $N_{d,r}^n$ is at the heart of classical enumerative geometry and is captured by the stationary genus-0 Gromov-Witten theory of \mathbb{P}^n .

For a smooth projective variety X , a collection of cohomology classes $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in H^*(X, \mathbb{Z})$, and an effective curve class $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$, the genus- g , class β , Gromov-Witten invariant of X with insertions $\{\gamma_i\}$ is denoted

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle_{g, \beta}^X.$$

These invariants contain enumerative information, but only in some cases do they precisely correspond to the number of genus- g curves in X of class β intersecting the Poincaré dual of each γ_i . Such invariants are simply called **enumerative**.

The term **stationary** refers to Gromov-Witten invariants with only point insertions. Since \mathbb{P}^n is convex, its (genus-0) Gromov-Witten theory is enumerative. Hence, computing such Gromov-Witten invariants yields exact enumerative information,

$$\langle \text{pt}^r \rangle_{0,d}^{\mathbb{P}^n} = N_{d,r}^n.$$

For this reason, and others, the genus-0 Gromov-Witten theory of \mathbb{P}^n is of basic interest in enumerative geometry and Gromov-Witten theory, and is well studied; indeed, it has been completely determined using several different methods. These include two of the most important tools in Gromov-Witten theory: localization and Virasoro constraints.

Computing Gromov-Witten invariants via localization consists of a two step process. Graber-Pandharipande [10] showed that the (all genus) Gromov-Witten theory of any nonsingular complex projective variety with a strong torus action may be reduced to Hodge integrals

via virtual localization. In turn, Faber-Pandharipande [5] provides an algorithm computing such Hodge integrals.

Alternatively, one may compute using Virasoro constraints. The Virasoro constraints are an infinite set of differential equations which conjecturally are satisfied by the Gromov-Witten generating series of a given target space. The Gromov-Witten invariants of the target are completely determined by these constraints. The Virasoro conjecture has been proved for \mathbb{P}^n ; the Virasoro conjecture for target curves, including \mathbb{P}^1 , was proved by Okounkov-Pandharipande [20], and the general case was proved by Givental [8].

Here we introduce a new method for the computation of certain genus-0 Gromov-Witten invariants of \mathbb{P}^n and its blow-up along points. This method exploits a new symmetry of the invariants, which arises from the geometry of the Cremona transform and its resolution, which lives on the toric variety associated to the permutohedron, Π_n . This symmetry expresses some difficult to compute invariants in terms of others that are less difficult to compute. In this way, where it applies, it is often very computationally effective, yielding a computational tool for enumerative geometry. Additionally, this symmetry has not been observed using other techniques, including those mentioned above, and as such yields new insight into the structure of the genus-0 Gromov-Witten theories of \mathbb{P}^n and its blow-up along points.

The permutohedral variety is of independent interest and admits a modular description. The permutohedral variety $X_{\Pi_{(n-1)}}$ was first constructed as an iterated toric blow-up by Kapranov in [13, Section 4.3]. Losev and Manin in [18] then proved $X_{\Pi_{(n-1)}}$ is isomorphic to the moduli space $\overline{M}_{0,2|n}$ of chains of \mathbb{P}^1 's with marked points $x_0 \neq x_\infty$ and y_1, \dots, y_n , where the points y_i may collide but not with x_j ; here we use the notation of [1, 19]. In addition, the permutohedral variety is isomorphic to the Hassett space $\overline{M}_{0,(1,1,1/n,\dots,1/n)}$ of weighted pointed curves, here of genus zero, with two points of weight one and n points of weight $1/n$ [19]. The permutohedral variety (by definition) admits an S_n action by permuting the n points generating the permutohedron. But the

permutohedron is also symmetric about the origin, and hence admits an S_2 action. (This symmetry resolves the Cremona transform on projective space, as explained below.) The cohomology of the permutohedral variety is thus a representation of $S_2 \times S_n$. Bergstöm and Minabe study the cohomology of the permutohedral variety, compute the character of this representation, and provide an excellent introduction to the subject in [1]. Thus, our description of the action and geometry of Cremona symmetry on the cohomology of the permutohedral variety may also be interpreted in terms of the cohomology of the associated Losev-Manin and Hassett spaces.

This work builds upon the work of many others. The Cremona transform was first studied in the context of Gromov-Witten theory on \mathbb{P}^2 by Crauder-Miranda [4] and Göttsche-Pandharipande [9]. This technique on \mathbb{P}^2 was used with success by Bryan-Leung [3]. The \mathbb{P}^3 case was proved by Bryan and the first author [2], used by the first author and Liu-Mariño [14], and was inspired by the beautiful work of Gathmann [7].

Cremona symmetry is an example of **toric symmetry** as a computational tool in Gromov-Witten theory. Toric symmetry of \mathbb{P}^3 and $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ have been studied in [15] and [16], respectively. Cremona symmetry of \mathbb{P}^n is the first higher-dimensional example of toric symmetry in Gromov-Witten theory to be studied.

1.2 Summary

In what remains of the introduction we establish the notation necessary to state the main results, proceed to do so and discuss applications of the results to enumerative geometry. We then move towards a proof of our results, beginning with a description of the Cremona transform on \mathbb{P}^n , which leads to a discussion of the blow-up of \mathbb{P}^n along points, which we call X , the permutohedron Π_n , and its toric variety X_{Π_n} .

We then study the geometry and intersection theory of the permutohedral variety, X_{Π_n} , and its blow-up along points, \hat{X} . We find a symmetry of the polytope of X_{Π_n} which yields a nontrivial action on the cohomology of \hat{X} . Since Gromov-Witten invariants are functorial under

isomorphism, this action on cohomology ascends to the Gromov-Witten theory of \widehat{X} , producing a symmetry of the Gromov-Witten invariants of \widehat{X} . This will establish our main result (Theorem 1.1).

However, we are interested in the invariants of \mathbb{P}^n and X , its blow-up along points, as opposed to the invariants of \widehat{X} , which is a much more complicated iterated blow-up. So, we must prove that invariants of \widehat{X} descend to X . We use degeneration to do so, in Corollary 1.2.

The cut-down moduli stack introduced by Bryan-Leung [3] allows one to trade point insertions for conditions of passing through blow-up points (Proposition 4.1). Thus the stationary genus-0 invariants of \mathbb{P}^n are equal to certain invariants of X ; Theorem 1.1 provides a symmetry of the invariants of X , thus exposing a symmetry of the invariants of \mathbb{P}^n itself.

1.3 Preliminaries

Let X be a nonsingular complex projective variety and $\beta \in H_2(X; \mathbb{Z})$ be a curve class in X . The moduli stack $\overline{M}_{0,r}(X, \beta)$ parametrizes isomorphism classes of stable maps

$$f : C \longrightarrow X$$

from possibly nodal rational curves (C, p_1, \dots, p_r) with r marked points to X representing β . This moduli space comes equipped with a virtual fundamental class $[\overline{M}_{0,r}(X, \beta)]^{\text{vir}}$ of dimension

$$\text{vdim}(\overline{M}_{0,r}(X, \beta)) = (\dim X - 3) - K_X \cdot \beta + r,$$

where K_X is the canonical divisor class on X .

The genus-0, primary, stationary Gromov-Witten invariants of X are defined by integration over this virtual fundamental class as

$$\langle \text{pt}^r \rangle_{\beta}^X = \int_{[\overline{M}_{0,r}(X, \beta)]^{\text{vir}}} \prod_{i=1}^r \text{ev}_i^*(\text{pt}),$$

where $\text{ev}_i : \overline{M}_{0,r}(X, \beta) \rightarrow X$ is the i^{th} evaluation map given by

$$[f : (C, p_1, \dots, p_r) \rightarrow X] \longmapsto f(p_i)$$

and $\text{pt} \in H^0(X; \mathbb{Q})$ denotes the class Poincaré dual to a point in X .

For foundational results in Gromov-Witten theory, we refer the reader to the excellent book [12].

Let $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ be the blow-up of X along a subvariety $Z \subset X$. An effective curve class $\tilde{\beta}$ in $H_2(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ is **nonexceptional** with respect to X if

$$\langle \text{pt}^r \rangle_{\tilde{\beta}}^{\tilde{X}} = \langle \text{pt}^r \rangle_{\pi_* \tilde{\beta}}^X.$$

In this case, we also refer to $\beta = \pi_* \tilde{\beta} \in H_2(X; \mathbb{Z})$ as **nonexceptional**.

1.4 Main Results

Theorem 1.1. *Let X be the blow-up of \mathbb{P}^n along $m > n + 1$ general points $(p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{P}^n$. Let $h \in H_2(X; \mathbb{Z})$ denote the pullback of the class of a general line in \mathbb{P}^n , and let $e_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$ denote the class of a line in the exceptional divisor over p_i .*

Let $\beta = dh - \sum_{i=1}^m a_i e_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$, for $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $a_i \in \mathbb{Z}$. Suppose β is a nonexceptional class in X with respect to \hat{X} (constructed in Section 2). Then

$$\langle \text{pt}^k \rangle_{\beta}^X = \langle \text{pt}^k \rangle_{\beta'}^X,$$

where $\beta' = d'h - \sum a'_i e_i$, and $d', a'_i \in \mathbb{Z}$ are given by

$$d' = nd - (n-1) \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

$$a'_i = \begin{cases} d - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \leq n+1}} a_j & 1 \leq i \leq n+1 \\ a_i & i > n+1. \end{cases}$$

Corollary 1.2. *The class $\beta = nh - e_1 - \dots - e_{n+3} \in H_2(X; \mathbb{Z})$ is nonexceptional. Therefore*

$$\langle \rangle_{nh - e_1 - \dots - e_{n+3}}^X = \langle \rangle_{h - e_{n+2} - e_{n+3}}^X = 1.$$

Remark 1.3. The invariant $\langle \rangle_{n|n-e_1-\dots-e_{n+3}}^X$ counts the number of rational curves in \mathbb{P}^n of degree n and passing through $n+3$ general points. The rational normal curve has these properties. The central equality is, of course, an application of Theorem 1.1. The last equality corresponds to the fact that there is a unique line through two general points in \mathbb{P}^n .

So, Corollary 1.2 is a Gromov-Witten theoretic proof of the uniqueness of the rational normal curve through $n+3$ points. This is of course very classical; a good reference is a combination of two theorems in Harris [11, Theorems 1.18, 18.9].

2. The Cremona Transform

The Cremona transform is the rational map

$$\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

defined by

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_1 \cdots x_n : x_0 x_2 \cdots x_n : \dots : \prod_{j \neq i} x_j : \dots : x_0 \cdots x_{n-1}).$$

Note that on the open set $U = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$, the Cremona transform has the familiar form

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \dots : \frac{1}{x_n} \right).$$

Note that the Cremona transform is undefined precisely on the set

$$\{(x_0 : \dots : x_n) \mid x_j = x_k = 0 \text{ for some } j \neq k\},$$

which is the union of all torus-invariant subvarieties of \mathbb{P}^n of codimension at least 2 under the standard torus $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^\times)^n$ action on \mathbb{P}^n given by

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (x_0 : \dots : x_n) = (x_0 : \lambda_1 x_1 : \dots : \lambda_n x_n).$$

So, we resolve the Cremona transform by iteratively blowing up along these \mathbb{T} -invariant subvarieties.

Let $X = X_0 = X_0(\mathfrak{m})$ denote the blow-up of \mathbb{P}^n at \mathfrak{m} distinct points, where $\mathfrak{m} \geq n + 1$. When $\mathfrak{m} > n + 1$, note X_0 is not a toric variety. However we perform an iterated blow-up of \mathbb{P}^n , beginning with X_0 , of a very toric flavor.

Let $\{p_0, \dots, p_n\}$ denote the torus fixed points of \mathbb{P}^n under the standard action of $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^\times)^n$. The \mathbb{T} -invariant subvarieties of \mathbb{P}^n are indexed by subsets of $\{0, \dots, n\}$, and we perform an iterated blow-up of X_0 along (the proper transforms of) these subvarieties.

First, let $\mathcal{Z}_0 = \{p_0, \dots, p_n\}$ and, again, denote by

$$X_0 = \text{Bl}_{\mathcal{Z}_0} \mathbb{P}^n$$

the blow-up of \mathbb{P}^n along \mathcal{Z}_0 .

We now iterate, and blow-up $X_j = X_j(\mathfrak{m})$ along the proper transform of \mathbb{T} -invariant subvarieties of dimension $j + 1$ to obtain $X_{j+1} = X_{j+1}(\mathfrak{m})$. For $0 \leq j < n - 2$, let $Z_{i_0, \dots, i_{j+1}} \subset X_j$ denote the proper transform of the $(j + 1)$ -dimensional \mathbb{T} -invariant subvariety of \mathbb{P}^n through $\{p_{i_0}, \dots, p_{i_{j+1}}\} \subseteq \{p_0, \dots, p_n\}$. Now set

$$\mathcal{Z}_{j+1} = \bigcup_{\substack{\alpha \subset \{0, \dots, n\} \\ |\alpha| = j+2}} Z_\alpha \subset X_j.$$

To complete the construction, let $X_{j+1} = \text{Bl}_{\mathcal{Z}_{j+1}} X_j$ denote the blow-up of X_j along \mathcal{Z}_{j+1} . So we have the iterated sequence of blow-ups

$$\hat{X} = X_{n-2} \xrightarrow{\pi_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{P}^n.$$

For example X_1 is the blow-up of X_0 along

$$\mathcal{Z}_1 = Z_{0,1} \cup Z_{0,2} \cup \dots \cup Z_{n-1,n},$$

where $Z_{i,j}$ is the proper transform in X_0 of the torus invariant line l_{ij} in \mathbb{P}^n through p_i and p_j .

In order to understand the geometry of this construction, it is useful to consider the toric case $\mathfrak{m} = n + 1$.

3. Toric Construction

For the basics of toric geometry, including all of the toric constructions here, we refer the reader to Fulton's classic text [6].

3.1 The base space \mathbb{P}^n

We use the standard fan $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{P}^n}$ for \mathbb{P}^n , with primitive generators $\rho_0 = (-1, \dots, -1)$, $\rho_1 = (1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\rho_n = (0, \dots, 1)$; note that ρ_i is the i^{th} standard basis vector of \mathbb{R}^n for all $1 \leq i \leq n$. The cones of Σ are generated by the proper subsets of $\{\rho_0, \dots, \rho_n\}$.

With this assignment, the \mathbb{T} -fixed points correspond to cones as follows:

$$\begin{aligned} p_0 &\longleftrightarrow \langle \rho_1, \dots, \rho_n \rangle \\ p_1 &\longleftrightarrow \langle \rho_0, \rho_2, \dots, \rho_n \rangle \\ &\vdots \\ p_n &\longleftrightarrow \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

3.2 The blow-up at points, X_0

Blowing up the point p_0 corresponds to subdividing Σ along the cone $\langle \rho_1, \dots, \rho_n \rangle$, creating a new primitive generator

$$\rho_{1, \dots, n} = \rho_1 + \dots + \rho_n = (1, \dots, 1).$$

To obtain Σ_{X_0} , we subdivide $\Sigma_{\mathbb{P}^n}$ along all cones corresponding to \mathbb{T} -fixed points.

The cohomology of X_0 is then generated by $\{D_\alpha\}$, where ρ_α is a primitive generator in Σ_{X_0} . The primitive generators introduced as a result of subdivision correspond to exceptional divisors. In particular, we have the following isomorphism of presentations of the cohomology

ring of X_0 :

$$\begin{aligned} D_i &\longleftrightarrow -H + \sum_{j \neq i} E_j \\ D_{0,1,\dots,\hat{i},\dots,n} &\longleftrightarrow -E_i. \end{aligned}$$

Here H and $\{E_i\}$ form the geometric basis for cohomology, namely H is the hyperplane class and E_i is the exceptional divisor over p_i . Note that

$$K_{X_0} = \sum_{\rho_\alpha \in \Sigma_{X_0}} D_\alpha = -(n+1)H + (n-1) \sum_{i=0}^n E_i.$$

3.3 The blow-up at lines, X_1

Let $0 \leq i < j \leq n$. To blow-up the line Z_{ij} in X_0 , which is the proper transform of the line l_{ij} in \mathbb{P}^n through p_i and p_j , we subdivide the cone indexed by the complement of $\{i, j\}$ in $\{0, \dots, n\}$. Thus the 1-skeleton of Σ_{X_1} is

$$\Sigma_{X_1}^1 = \{\rho_i, \rho_{0,\dots,\hat{i},\dots,n}, \rho_{0,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n} : 0 \leq i < j \leq n\}.$$

The cones of higher dimension are given by subdivision.

The isomorphism between toric and geometric bases of $H^*(X_1, \mathbb{Z})$ is given by

$$\begin{aligned} D_i &\longleftrightarrow -H + \sum_{j \neq i} E_j + \sum_{i \notin \{j,k\}} E_{jk} \\ D_{0,1,\dots,\hat{i},\dots,n} &\longleftrightarrow -E_i \\ D_{0,1,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,n} &\longleftrightarrow -E_{ij}. \end{aligned}$$

Here H and E_i are as above, and E_{ij} is the exceptional divisor above Z_{ij} .

3.4 The full permutohedral case, $\widehat{X}(n+1)$

Let $[n] = \{0, \dots, n\}$. In general, we have

$$\begin{aligned} D_i &\longleftrightarrow -H + \sum_{\substack{i \notin \alpha \\ \alpha \subsetneq [n]}} E_\alpha \\ D_\alpha &\longleftrightarrow -E_\alpha, \text{ for all } \alpha \subsetneq [n], |\alpha| > 1. \end{aligned}$$

Expressing the canonical bundle in both bases, we compute

$$\begin{aligned} K_{\widehat{X}} &= \sum_{\alpha \subsetneq [n]} D_\alpha \\ &= -(n+1)H + \sum_{\alpha \subsetneq [n]} (n - |\alpha|)E_\alpha. \end{aligned}$$

The cohomology ring $H^*(\widehat{X}, \mathbb{Z}) = A^*(\widehat{X})$ is given by

$$A^*(\widehat{X}) \cong \mathbb{Z}[\{D_\alpha\}]/I,$$

where I is the ideal generated by all

- (i) $D_{\alpha_1} \cdot D_{\alpha_2} \cdots D_{\alpha_k}$ for $\rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_k}$ not in a cone of Σ ; and
- (ii) $\sum_{\alpha} (e_i \cdot \rho_\alpha) D_\alpha$ for e_i the i^{th} standard basis vector in \mathbb{R}^n .

3.5 The general case, $\widehat{X}(m)$

The cohomology of $\widehat{X}(m)$ (or $X_j(m)$) is now easy to express in terms of that of $\widehat{X}(n+1)$ (or $X_j(n+1)$). Indeed, cohomology is generated in codimension two, and we have

$$H^2(\widehat{X}(m)) = H^2(\widehat{X}(n+1)) + \sum_{i > n+1} \mathbb{Z} \cdot [E_i].$$

Further, as E_i is far from a general line and the invariant subvarieties, we have

$$E_i \cdot H = E_i \cdot E_\alpha = 0,$$

for all $i > n+1$, $i \neq \alpha$.

3.6 Toric Symmetry

The fan Σ_{Π_n} of the permutohedral variety $\widehat{X}(n+1) = X_{\Pi_n}$ is thus symmetric about the origin. Reflecting through the origin sends ρ_α to its complement

$$\rho_\alpha \mapsto \rho_{[n] \setminus \alpha}.$$

Any symmetry of the fan of a toric variety induces an isomorphism on the variety itself; call this map $\tau: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$. We immediately see that the action of τ on cohomology is given by

$$\tau^* D_\alpha = D_{[n] \setminus \alpha}.$$

It is elementary to verify that τ is a resolution of the Cremona transform.

4. Proof of the Main Theorem

In the previous two sections we established the existence of the diagram

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} = X_{n-2}(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\tau} & \widehat{X} = X_{n-2}(\mathfrak{m}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n-3}(\mathfrak{m}) & & X_{n-3}(\mathfrak{m}) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1(\mathfrak{m}) & & X_1(\mathfrak{m}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X = X_0(\mathfrak{m}) & & X = X_0(\mathfrak{m}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^n & \text{-----} & \mathbb{P}^n. \end{array}$$

Note that Gromov-Witten invariants are functorial under isomorphism, i.e. for any $\hat{\beta} \in H_2(\widehat{X})$ we get

$$\langle \tau^* \text{pt}^k \rangle_{\hat{\beta}}^{\widehat{X}} = \langle \text{pt}^k \rangle_{\tau_* \hat{\beta}}^{\widehat{X}}.$$

But $\tau^*pt = pt$ and thus

$$\langle pt^k \rangle_{\hat{\beta}}^{\hat{X}} = \langle pt^k \rangle_{\tau_* \hat{\beta}}^{\hat{X}}.$$

Furthermore, $\hat{\beta}$ must be of the form

$$\hat{\beta} = d\hat{h} - \sum_{i=1}^m a_i \hat{e}_i.$$

We compute

$$\tau_* \hat{\beta} = \hat{\beta}',$$

where

$$\hat{\beta}' = d'\hat{h} - \sum_{i=1}^m a'_i \hat{e}_i$$

is given by

$$d' = nd - (n-1) \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

$$a'_i = \begin{cases} d - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \leq n+1}} a_j & 1 \leq i \leq n+1 \\ a_i & i > n+1. \end{cases}$$

This symmetry then descends to X for nonexceptional classes. \square

Moreover, this symmetry of X further descends to \mathbb{P}^n itself via the following proposition.

Proposition 4.1 (Bryan-Leung [3]). *Let $\beta = d\hat{h} - \sum a_i e_i \in H_2(X; \mathbb{Z})$. Suppose that $a_i = 0$ for some i . Then*

$$\langle pt^r \rangle_{\beta}^X = \langle pt^{r-1} \rangle_{\beta - e_i}^X.$$

\square

In particular, in the case $a_i = 0$ for all i , we have

$$\langle pt^{n+3} \rangle_{nh}^{\mathbb{P}^n} = \langle \rangle_{nh - e_1 - \dots - e_{n+3}}^X.$$

5. Nonexceptional classes

In order for Theorem 1.1 to be of use, and in order to establish Corollary 1.2, we must identify nonexceptional classes. We do so using degeneration of relative Gromov-Witten invariants.

5.1 Relative GW theory

Let $Y \subset X$ be a nonsingular divisor. The Gromov-Witten theory of X relative to Y is defined in the algebraic setting in [17]. Let $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ be a curve class such that $\beta \cdot [Y] \geq 0$, and let $\vec{\mu}$ be a partition of this nonnegative number. The moduli stack $\overline{M}_{g,n}(X/Y, \beta, \mu)$ parameterizes stable relative maps with relative multiplicities determined by $\vec{\mu}$. Note that the target of a relative stable map may be a k -step degeneration of X along Y ; again see [17].

Let δ_i be classes in $H^*(Y, \mathbb{Q})$. A cohomology-weighted partition μ is an unordered set of pairs

$$\{(\mu_1, \delta_{i_1}), \dots, (\mu_s, \delta_{i_s})\},$$

where μ_i is a part of $\vec{\mu}$.

Now, let γ_j be classes in $H^*(X, \mathbb{Q})$. The genus- g , class β Gromov-Witten invariant with insertions $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ relative to the cohomology weighted partition μ is defined via integration against the virtual class

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \mid \mu \rangle_{g, \beta}^{X/Y} = \frac{1}{|\text{Aut}(\mu)|} \int_{[\overline{M}_{g,r}(X/Y, \beta, \mu)]^{\text{vir}}} \prod_{j=1}^r \text{ev}_j^*(\gamma_j) \cup \prod_{i=1}^s \text{ev}_i^* \delta_{i_i}.$$

5.2 Degeneration

Let $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}^1$ be a family of projective schemes such that the fibers \mathcal{X}_t are smooth for $t \neq 0$ and the special fiber \mathcal{X}_0 has two irreducible components

$$\mathcal{X}_0 = X \coprod_Z W$$

intersecting transversally along a connected smooth divisor $Z \subset \mathcal{X}_0$. Then, for a virtual dimension zero class $\beta \in H_2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$, the degeneration formula of [17] yields

$$\langle \rangle_{\beta}^{\mathcal{X}_t} = \sum_{\mu, \beta = \beta_1 + \beta_2} \langle \mid \mu \rangle_{\beta_1}^{X/Z} \cdot C(\mu) \cdot \langle \mid \mu^{\vee} \rangle_{\beta_2}^{W/Z}, \quad (5.1)$$

where μ remains a cohomology weighted partition, μ^{\vee} is its dual, and $C(\mu)$ is a combinatorial factor.

If β does not split, and we only may consider $\beta = \beta_1$, we are forced into the empty partition $\mu = \emptyset$, in which case $C(\mu) = 1$, our relative $\langle \mid \emptyset \rangle_{\beta}^{X/Z}$ invariant is in fact an absolute invariant, and we have

$$\langle \rangle_{\beta}^{\mathcal{X}_t} = \langle \rangle_{\beta}^X.$$

We now use this technique to equate invariance of X_j and its blow-up X_{j+1} by using deformation to the normal cone to set up our degeneration.

5.3 Proof of Corollary 1.2

For $0 \leq j < n - 2$ let $Z_{\alpha} = Z_{i_0, \dots, i_{j+1}}$ be the proper transform of the $j + 1$ -dimensional subvariety of \mathbb{P}^n , as defined in Section 2. Then Z_{α} is isomorphic to the blow-up of \mathbb{P}^{j+1} at all the $0, 1, \dots, j - 1$ -dimensional \mathbb{T} -equivariant subvarieties. Also as above, we continue to let $E_{\alpha} = E_{i_0, \dots, i_{j+1}}$ be the exceptional divisor of the blow-up at Z_{α} . Then

$$E_{\alpha} \cong \mathbb{P}(L^{(n-j-1)\oplus}) \cong Z_{\alpha} \times \mathbb{P}^{n-j-2},$$

where L is the restriction of the line bundle

$$-H + \sum_{\substack{\emptyset \neq \zeta \subset [n] \\ |\zeta| < j+2}} E_{\zeta}.$$

Recall that $e_{\alpha} = e_{i_0, \dots, i_{j+1}}$ is the class of a line in the fibers of E_{α} . Set $Z_{j+1} = \cup_{\alpha} Z_{\alpha} \subset X_j$ where the union is over $\alpha \subset [n]$ and $|\alpha| = j + 2$, here X_{j+1} is defined by $X_{j+1} = \text{Bl}_{Z_{j+1}} X_j$. Then $A_1(X_{j+1}) =$

$H_2(X_{j+1}, \mathbb{Z})$ is generated by the collection $\{e_\alpha\}$. Our convention is that $e_\emptyset = h$ represents the proper transform of the class of a line in \mathbb{P}^n . We also use the same notation to denote the proper transform of all these classes at the subsequent stages of blow-ups.

Now let $\alpha = \{i_0, \dots, i_{j+1}\}$ be fixed. For any $\gamma \subset \alpha$ with $|\gamma| \leq j$, we denote by ${}_\alpha e_\gamma$ the generators of $A_1(Z_\alpha)$. Also let $\pi_\alpha : E_\alpha \rightarrow Z_\alpha$ be the projection and $S_\alpha \subset E_\alpha$ be the divisor given by $\mathbb{P}(L^{(n-j-2)\oplus})$. We have $\mathcal{O}_{E_\alpha}(1) \sim \pi_\alpha^* L + S_\alpha$.

Lemma 5.1. *We have the following relations in $A_1(X_{j+1})$:*

$${}_\alpha e_\emptyset = h - \sum_{\delta} e_\delta + (j+1)e_\alpha,$$

where δ runs over all $\delta \subset \alpha$ and $|\delta| = j+1$. Also, if $j \geq 1$, then for any $k \in \alpha$ we have

$${}_\alpha e_k = e_k - \sum_{\epsilon} e_\epsilon + j e_\alpha,$$

where ϵ runs over all $\epsilon \subset \alpha$, $|\epsilon| = j+1$, and $k \in \epsilon$. More generally, for any $\gamma \subset \alpha$ with $|\gamma| < j+1$, we have

$${}_\alpha e_\gamma = e_\gamma - \sum_{\epsilon} e_\epsilon + (j+1-|\gamma|)e_\alpha,$$

where ϵ runs over all $\epsilon \subset \alpha$ and $|\epsilon| = j+1$ and $\gamma \subset \epsilon$.

Proof. Let ${}_\alpha e_\emptyset = \sum_{|\zeta| \leq j+1} x_\zeta e_\zeta + x e_\alpha$ and ${}_\alpha e_k = \sum_{|\zeta| \leq j+1} y_\zeta e_\zeta + y e_\alpha$. We intersect both sides of these equations by the divisor E_α . We can see easily that $E_\alpha \cdot e_\zeta = 0$ for any ζ with $|\zeta| \leq j$, and

$$E_\alpha \cdot {}_\alpha e_\emptyset = \mathcal{O}_{E_\alpha}(-1) \cdot {}_\alpha e_\emptyset = -\pi_\alpha^* L \cdot {}_\alpha e_\emptyset = 1 - (j+2) = -j-1,$$

where $j+2 = \sum_{\eta \subset \alpha, |\eta|=j+1} E_\eta \cdot {}_\alpha e_\emptyset$. Similarly, $E_\alpha \cdot e_k = 1 - (j+1)$, where $j+1 = \sum_{\eta \subset \alpha, |\eta|=j+1} E_\eta \cdot {}_\alpha e_k$. Also note that $\mathcal{O}_{E_\alpha}(-1) \cdot e_\alpha = -1$, from which it follows that $x = j$ and $y = j-1$. The other unknowns are found by intersecting both sides of the relations above by the divisors H and E_ζ 's. \square

Now consider the degeneration of X_j into $X_{j+1} \coprod_{Z_\alpha} W_\alpha$, where

$$W_\alpha = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{Z_\alpha} \oplus \mathcal{L}^{(n-j-1)\oplus}).$$

For a virtual dimension zero class $\beta \in A_2(X_j)$, the gluing formula Equation (5.1) yields

$$\langle \rangle_\beta^{X_j} = \sum_{\mu, \beta = \beta_1 + \beta_2} \langle \mid \mu \rangle_{\beta_1}^{X_{j+1}/Z_\alpha} \cdot C(\mu) \cdot \langle \mid \mu^\vee \rangle_{\beta_2}^{W_\alpha/Z_\alpha}. \quad (5.2)$$

Let $\tilde{Z}_\alpha \subset W_\alpha$ be the copy of Z_α “at infinity” given by $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{Z_\alpha}) \subset W_\alpha$. Denote by ${}_\alpha \tilde{e}_\gamma$ the corresponding class in \tilde{Z}_α .

Lemma 5.2. *The following relations hold in $A_1(W_\alpha)$. We have*

$${}_\alpha \tilde{e}_\emptyset = {}_\alpha e_\emptyset - (j+1)e_\alpha.$$

If $j \geq 1$ then

$${}_\alpha \tilde{e}_k = {}_\alpha e_k - j e_\alpha.$$

More generally, for any $\gamma \subset \alpha$ with $|\gamma| < j+1$ we have

$${}_\alpha \tilde{e}_\gamma = {}_\alpha e_\gamma - (j+1-|\gamma|)e_\alpha.$$

In particular, e_α together with the elements of $\{{}_\alpha \tilde{e}_\gamma\}_{\gamma \subset \alpha, |\gamma| < j+1}$ gives a positive basis for $A_1(W_\alpha)$.

Proof. These follow from $\mathcal{O}_{W_\alpha}(1) \cdot {}_\alpha \tilde{e}_\emptyset = \mathcal{O}_Z(1) \cdot {}_\alpha \tilde{e}_k = \mathcal{O}_Z(1) \cdot {}_\alpha \tilde{e}_\gamma = 0$ and $\mathcal{O}_{W_\alpha}(1)|_{Z_\alpha} \sim \mathcal{O}_{Z_\alpha}(1)$. \square

Now in the degeneration formula, if the class β splits as $\beta_1 + \beta_2$, where $\beta_2 = \sum_\alpha (b_\alpha e_\alpha + \sum_\gamma {}_\alpha a_\gamma {}_\alpha \tilde{e}_\gamma)$ for nonnegative integers b_α and ${}_\alpha a_\gamma$, then by the lemmas above β_1 is forced to be

$$\beta_1 = \beta - \sum_{|\alpha|=j+2} \left(b_\alpha e_\alpha + \sum_{\gamma \subset \alpha, |\gamma| \leq j} {}_\alpha a_\gamma \left(e_\gamma - \sum_{\gamma \subset \epsilon \subset \alpha, |\epsilon|=j+1} e_\epsilon \right) \right). \quad (5.3)$$

Now if the coefficients of h and e_k s in $\beta = dh - \sum_{i=1}^m a_i e_i$ are such that the class β does not afford any nontrivial splitting into effective curve classes, then in the degeneration formula (5.2) there will be no contributions from GW theory of the W_α s. For example, we can apply this in the following situation.

Proposition 5.3. *If β is an extremal ray in the cone of effective curves then in (5.3) we must have $\beta_1 = \beta$.*

Proof. The class $\sum_{\epsilon} e_{\epsilon} - e_{\gamma}$ is not effective by Lemma 5.1, and hence β_1 cannot be effective unless all the coefficients in the right hand side of (5.3) are zero. \square

Proof of Corollary 1.2. It follows from Proposition 5.3, because $\beta = nh - e_1 - \cdots - e_{n+3}$ is an extremal ray. \square

Remark 5.4. In general, one would like to equate the invariants of a space and its blow-up for any curve class which is far away from the exceptional divisors. However no such general theorem exists; in general it is very difficult to determine the behavior of Gromov-Witten invariants under rational maps. This holds true even in case the rational map is a blow-up. However, note that the proof of Corollary 1.2 applies to much more than the rational normal curve alone. So one may use degeneration for cases of interest in the absence of a more universal theorem.

Acknowledgments

A. G. was partially supported by NSF grant DMS-1406788.

D. K. thanks the mathematical community, including his coauthors, for their patience. This project began at Berkeley, and D. K. has lectured about successive iterations of this project at many institutions over many years. Warm acknowledgments and gratitude are given to Jim Bryan, Renzo Cavalieri, David Eisenbud, Jun Li, Melissa Liu, Dhruv Ranganathan, Bernd Sturmfels, and Ravi Vakil. D. K. also thanks Yale for their hospitality during Fall 2014, when this work was completed.

S. P. was partially supported by the Clay Mathematics Institute and NSF grants DMS-1068689 and CAREER DMS-1149054.

References

- [1] JONAS BERGSTRÖM AND SATOSHI MINABE. *On the cohomology of the Losev-Manin moduli space*. Manuscripta Math., 144(1-2):241–252, 2014.
- [2] JIM BRYAN AND DAGAN KARP. *The closed topological vertex via the Cremona transform*. J. Algebraic Geom., 14(3):529–542, 2005.
- [3] JIM BRYAN AND NAICHUNG CONAN LEUNG. *The enumerative geometry of K3 surfaces and modular forms*. J. Amer. Math. Soc., 13(2):371–410, 2000.
- [4] BRUCE CRAUDER AND RICK MIRANDA. *Quantum cohomology of rational surfaces*. In The moduli space of curves (Texel Island, 1994), volume 129 of Progr. Math., pages 33–80. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [5] C. FABER AND R. PANDHARIPANDE. *Hodge integrals and Gromov-Witten theory*. Invent. Math., 139(1):173–199, 2000.
- [6] WILLIAM FULTON. *Introduction to toric varieties, volume 131 of Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [7] ANDREAS GATHMANN. *Gromov-Witten invariants of blow-ups*. J. Algebraic Geom., 10(3):399–432, 2001.
- [8] ALEXANDER B. GIVENTAL. *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians*. Mosc. Math. J., 1(4):551–568, 645, 2001. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary.

- [9] L. GÖTTSCHE AND R. PANDHARIPANDE. *The quantum cohomology of blow-ups of \mathbf{P}^2 and enumerative geometry*. J. Differential Geom., 48(1):61–90, 1998.
- [10] T. GRABER AND R. PANDHARIPANDE. *Localization of virtual classes*. Invent. Math., 135(2):487–518, 1999.
- [11] JOE HARRIS. *Algebraic geometry, volume 133 of Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.
- [12] KENTARO HORI, SHELDON KATZ, ALBRECHT KLEMM, RAHUL PANDHARIPANDE, RICHARD THOMAS, CUMRUN Vafa, RAVI VAKIL, AND ERIC ZASLOW. *Mirror symmetry, volume 1 of Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. With a preface by Vafa.
- [13] M. M. KAPRANOV. *Chow quotients of Grassmannians. I*. In I. M. Gel'and Seminar, volume 16 of Adv. Soviet Math., pages 29–110. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [14] DAGAN KARP, CHIU-CHU MELISSA LIU, AND MARCOS MARIÑO. *The local Gromov-Witten invariants of configurations of rational curves*. Geom. Topol., 10:115–168 (electronic), 2006.
- [15] DAGAN KARP AND DHRUV RANGANATHAN. *Gromov-Witten theory of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$* . J. Pure Appl. Algebra, 220(8):3000–3009, 2016.
- [16] DAGAN KARP, DHRUV RANGANATHAN, PAUL RIGGINS, AND URSULA WHITCHER. *Toric symmetry of \mathbb{CP}^3* . Adv. Theor. Math. Phys., 10:1291–1314, 2012.
- [17] JUN LI. *A degeneration formula of GW-invariants*. J. Differential Geom., 60(2):199–293, 2002.
- [18] A. LOSEV AND Y. MANIN. *New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections*. Michigan Math. J., 48:443–472, 2000. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.

- [19] ALINA MARIAN, DRAGOS OPREA, AND RAHUL PANDHARIPANDE.
The moduli space of stable quotients. Geom. Topol., 15(3):1651–1706, 2011.
- [20] A. OKOUNKOV AND R. PANDHARIPANDE. *Virasoro constraints for target curves.* Invent. Math., 163(1):47–108, 2006.

Resumen: En este trabajo establecemos la existencia de una simetría en el marco de la teoría de Gromov-Witten para \mathbb{CP}^n y su explosión a lo largo de puntos. La naturaleza de esta simetría queda codificada en la transformación de Cremona y su resolución en una variedad tórica del permutaedro. Esta simetría expresa algunos invariantes difíciles de calcular junto con otros que no lo son tanto. Nos centramos en implicaciones enumerativas; en particular esta técnica ofrece una prueba en una línea de la unicidad de la curva racional normal. Nuestro método involucra un estudio de la geometría tórica del permutaedro, así como el de la degeneración de los invariantes de Gromov-Witten.

Palabras clave: teoría de Gromov-Witten, geometría enumerativa, invariantes estacionarios, transformación de Cremona, espacio proyectivo, permutaedro, variedad tórica permutaedral, espacio de Losev-Manin.

Amin Gholampour
Department of Mathematics
University of Maryland
amingh@umd.edu

Dagan Karp
Department of Mathematics
Harvey Mudd College
dagan.karp@hmc.edu

Sam Payne
Department of Mathematics
Yale University
sam.payne@yale.edu

Información para los autores

La revista PRO MATHEMATICA publica tanto artículos originales de investigación, como trabajos de divulgación, en todas las áreas de matemáticas.

El manejo de la revista está a cargo de un Director, un Consejo Directivo y un Consejo Editorial; el Director por definición pertenece al Consejo Directivo, y los miembros del Consejo Directivo, a su vez, son parte del Consejo Editorial.

Procedimiento editorial. Los autores interesados en publicar en PRO MATHEMATICA deberán someter sus manuscritos en español o inglés mediante correo electrónico en formato PDF a un miembro del Consejo Editorial, indicando como asunto **artículo para ProMathematica**, con copia a **`promathematica@pucp.edu.pe`**.

El editor dentro de las siguientes dos semanas revisará someramente el material y presentará un breve informe al Consejo Directivo. En base a este informe el Consejo procederá a rechazar el artículo o a someterlo a un arbitraje por pares, lo cual será informado al autor.

En caso el Consejo dictamine que el contenido del artículo lo amerita, se procederá a enviarlo a revisión por un experto en el área elegido en coordinación con el editor que lo elevó. La comunicación con el revisor será a través del editor receptor del artículo. Dentro de los siguientes tres meses el experto enviará un informe al Consejo Directivo indicando expresamente si el artículo es rechazado, presenta observaciones de fondo o es aceptado con observaciones menores (o sin ellas, de ser el caso). El Consejo Editorial enviará al autor una copia del informe para que actúe acorde. El autor en esta etapa procederá a levantar las objeciones y a realizar las modificaciones que juzgue necesarias. El artículo revisado será reenviado al revisor para que indique su conformidad o no con la nueva versión.

Preparación para publicación. Una vez aceptado el artículo para publicación, los autores enviarán una copia en LaTeX para su edición de acuerdo con el estilo de la revista. Para evitar imponer en los autores

una excesiva carga, la revista se encargará del diagramado y la revisión de estilo, excepto en casos cuando los autores prefieran realizarlo por su cuenta. Terminado el proceso, los autores deberán leer cuidadosamente las pruebas de imprenta e indicar posibles observaciones al trabajo de edición.

Compromiso de integridad. El envío de un manuscrito conlleva un compromiso por parte de los autores de que (1) no ha sido publicado anteriormente, (2) no ha sido enviado a otra revista, (3) su publicación es aprobado por el autor y todos los coautores y (4) tiene autorización para utilizar todo material protegido por derechos de autor que contenga.

Toda correspondencia deberá estar dirigida a

PRO MATHEMATICA
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias
Apartado 1761
Lima 100, Perú

correo electrónico: promathematica@pucp.edu.pe

Information for authors

PRO MATHEMATICA publishes research and survey papers in all areas of mathematics.

The Journal is managed by a Director, a Consulting Board, and an Editorial Board. The Director belongs to the Consulting Board, whose members in turn are part of the Editorial Board.

Editorial procedure. Authors interested in PRO MATHEMATICA should submit their original work in PDF format, either in English or Spanish, via email addressed to a member of the Editorial Board, copied to **`promathematica@pucp.edu.pe`**, with subject indicated as **paper for ProMathematica**.

The Editor within the next two weeks will present a brief report to the Editorial Board. Based on this report, the Board will decide upon rejecting the article or submitting it to a thorough peer review. Either way, the author will be notified.

In case the consulting Board decides that the content of the material merits it, the article will be sent to an expert, chosen in coordination with the reporting editor. All communication between the reviser and the author is carried through the Editor. Within the next three months, the reviser would report to the Consulting Board, indicating if the article should be accepted with minor or major observations or if it should be rejected. The Board will send the author a copy of the report so that he can act accordingly. At this stage the author must revise his work and make the necessary modifications. Once resubmitted, the paper will be sent to the referee so that he can give his conformity.

Preparation for publication. Once accepted for publication, a LaTeX source file should be sent so that it can be edited according to the journal's style. In order not to impose the authors with unnecessary burden, our staff would take care of the diagramming and style review, except in case the authors prefer to do it themselves. Once finished the

process, the authors would be asked to carefully proof-read the galleys and pinpoint all mistakes in the editing process.

Statement of integrity. The submission of a manuscript conveys the authors' assurance that (1) it has not been published elsewhere before, (2) it has not been submitted to other journals or editorials, (3) its publication has been approved by all co-authors, and (4) permission has been granted to publish all copyrighted material contained within.

All correspondence should be addressed to

PRO MATHEMATICA
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias
Apartado 1761
Lima 100, Perú

e.mail: promathematica@pucp.edu.pe