ARETÉ Revista de Filosofía
v. XXXV, 2, 2023
pp. 374-396

Relación entre la intuición y la invención en matemáticas: una mirada desde Henri Bergson y Henri Poincaré

Lina María Peña Páez
Universidad de San Buenaventura
yobogotana@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7452-7014

Resumen: La intuición y su relación con la invención matemática es destacada por los autores franceses Henri Bergson y Henri Poincaré. Los dos asumen la intuición como un proceso intelectual, que requiere de la experiencia tanto física como matemática del individuo y cuyos resultados se observarán en la superficie de la conciencia, es decir, en el lenguaje matemático. Ambos asumen que la idea de intuición es necesaria para la invención matemática. En este artículo se muestran los puntos coincidentes entre Bergson y Poincaré en torno a la relación intuición-invención, mostrando cómo su definición lleva a interpretar la intuición como un proceso y, finalmente, cómo la idea de esquema dinámico introducida por Bergson para explicar la invención está implícita en el pensamiento de Poincaré.
***Palabras clave*:** intuición matemática; invención; esquema dinámico; Bergson; Poincaré

Abstract: "The Relationship between Intuition and Invention in Mathematics: A Consideration from the Points of View of Henri Bergson and Henri Poincaré". The French authors Henri Bergson and Henri Poincaré call attention upon intuition and its relationship to mathematical invention. Both authors believe that intuition is an intellectual process that requires individual experience both physical and mathematical. They also claim that the results of intuition are to be observed in the surface of consciousness, i.e. in mathematical language. Additionally, both authors believe that intuition is necessary for mathematical invention. This paper shows the coincidences between Bergson and Poincaré concerning the relationship between intuition and invention. It investigates how its definition leads to the understanding of intuition as a process and, finally, how the idea of a *dynamic scheme*—introduced by Bergson to explain invention—is implicitly present in Poincaré's thought.
Keywords: mathematical intuition; invention; dynamic schema; Bergson; Poincaré

https://doi.org/10.18800/arete.202302.006

Introducción

Interpretaciones sobre la intuición matemática abundan en la literatura. No solo han escrito sobre ella filósofos[1] y matemáticos[2], sino también filósofos de la ciencia[3]. Sin embargo, no tenemos un consenso sobre qué debemos entender por ella. Para el desarrollo de este artículo entenderemos la intuición matemática como un *proceso* "donde el mundo real y los conocimientos previos del individuo juegan un papel importante; y en el transcurso de dicho proceso, no se puede desconocer la necesidad de la lógica para formalizar los hallazgos obtenidos por la intuición"[4].

La intuición matemática es un proceso que lleva una idea difusa inicial, que se "produce" en el interior de la conciencia (o en el yo profundo), a la superficie. Esto gracias a la experiencia (física o teórica) que el individuo ha adquirido a lo largo de su vida (personal o académica), y que le permitirá expresar los resultados de dicho proceso en su realidad. Cuanto más sea el esfuerzo que hace el yo por profundizar en su interior, más cerca estará de la invención matemática.

Para Bergson, la invención es el producto del yo profundo de la conciencia (o del yo inconsciente en términos de Poincaré). Una idea "genial" no será posible mientras que el yo se quede en la superficie, en el hábito. La innovación requiere un esfuerzo intelectual. Ahora bien, el proceso de innovación implica desarrollar una "imagen" inicial abstracta e incorpórea en elementos claros en la superficie. En el caso de la matemática, diremos que la innovación se da cuando la idea original y genial del matemático se desarrolla en un lenguaje técnico y se adapta a las proposiciones de un sistema formal adecuado.

[1] *Cf.* Bergson, H., "El esfuerzo intelectual", p. 221-250; *cf.* Bunge, M., *Intuición y Razón*; *cf.* Husserl, E., *Investigaciones lógicas*; Kant, I., *Crítica de la razón pura*.

[2] *Cf.* Gödel, K., *Ensayos inéditos*; *cf.* Gödel, K., *Obras completas*; *cf.* Poincaré, H., "Invención Matemática", pp. 42–62.

[3] *Cf.* Chudnoff, E., "Intuition in Mathematics", pp. 174-191; *cf.* Fischbein, E., "Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning", pp. 11-50; *cf.* Fischbein, E., *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*; *cf.* Kitcher, P., *The nature of mathematical knowledge*; Maddy, P., "Perception and Mathematical Intuition", pp. 163-196; *cf.* Tieszen, R., *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*.

[4] Peña-Páez, L.M., "Consideraciones sobre la noción de intuición matemática", p. 129.

Por su parte, Poincaré considera que la invención no se da en el lenguaje matemático, ni en el conocimiento de todas las leyes de la lógica, sino en el inconsciente. Esto lo lleva a concluir que se requiere de algo más, un algo más que le permita a la idea que surge en la realidad intangible del sujeto, convertirse en una realidad tangible. Esta realidad será expresada por el lenguaje matemático, verificada por la lógica, insertada a las teorías existentes y comunicadas o enseñadas a los nuevos aprendices, así como aplicadas a otras ciencias.

Bergson, en su definición de invención, introduce la idea de “esquema dinámico”, a la que considera como una actitud intelectual, donde las imágenes se insertan, se organizan y atraviesan diferentes planos de conciencia hasta llegar a la superficie. El tiempo que “demore” este proceso (intuición) será el esfuerzo requerido, y el máximo esfuerzo es el de la invención. En Poincaré no se define el término “esquema dinámico”; sin embargo, cuando hace alusión a la invención, asume que la intuición es necesaria para llegar a ella. Además, en su descripción encontramos que se refiere a una “organización” de las ideas y a un tiempo no inmediato para dicha organización. Tal descripción la encontramos en su narración de cómo llegó a las funciones fuchsianas.

Así, encontramos que la idea de intuición es necesaria para la invención matemática. En este artículo trabajaremos la noción de intuición y su relación con la invención desde dos miradas, la de los autores franceses Henri Bergson y Henri Poincaré. En ellos identificaremos que ese “algo más allá” de la lógica y del lenguaje matemático que permite la invención no es ni misterioso ni tiene un origen divino: es la intuición. Asimismo, revisaremos cómo sus concepciones sustentan la idea que se presenta de intuición como un *proceso*. Finalmente, mostraremos cómo la idea de Bergson sobre el *esquema dinámico*, necesario para la invención, está implícito en el pensamiento de Poincaré.

1. La intuición y su relación con la invención en Bergson

En su libro *Introducción a la Metafísica*, Bergson distingue entre el conocimiento relativo y el absoluto. El primero gira alrededor del objeto de estudio, se apoya en símbolos, y el segundo entra en el objeto y, por tanto, no permite puntos de vista. Esta concepción lleva al filósofo francés a diferenciar entre el análisis y la intuición.

Conocer un objeto, desde el punto de vista del análisis, es capturar partes de él, es decir, diferentes puntos de vista, y esto dependerá del “lugar” desde donde el observador esté “mirando”, lo que implica la intencionalidad del conocimiento. Los conceptos usados como único medio para conocer nunca permitirán adentrarnos en el objeto para comprender su multiplicidad de elementos, por lo que queda siempre una parte sin conocer. Lo anterior implica un cambio en el trabajo habitual de la inteligencia: "*pensar* consiste ordinariamente en ir de los conceptos a las cosas y no de las cosas a los conceptos. Conocer una realidad es, en el sentido usual del vocablo 'conocer', tomar conceptos ya hechos, dosificarlos y combinarlos entre sí hasta obtener un equivalente práctico de lo real"[5].

Bergson critica el uso práctico del conocimiento de la realidad. Sus argumentos muestran la sustitución de lo continuo por lo discontinuo, lo móvil por lo estático, sin ignorar lo necesario de esta sustitución para el lenguaje, la vida práctica y la ciencia positiva. El espíritu se ha habituado a buscar puntos fijos (conceptos) que le marcarán el cambio de dirección y de tendencia, intentando comprender el movimiento a partir de estos conceptos que son inmóviles; más aun, se asume que el conocimiento parte de los conceptos. La invitación del filósofo es a reconocer que la intuición precede a la inteligencia, "que de la intuición puede pasarse al análisis, pero no del análisis a la intuición"[6]

Esta inversión del pensamiento no es fácil. Sin embargo, la historia del cálculo infinitesimal es un perfecto ejemplo de lo que Bergson nos quiere decir sobre la intuición que precede al análisis: "La matemática moderna es precisamente un esfuerzo para sustituir lo *ya hecho* por lo que *se hace*, para seguir la generación de las magnitudes, para asir el movimiento, no desde fuera y en su resultado manifiesto, sino desde dentro y en su tendencia a cambiar; en fin, para adoptar la continuidad móvil del dibujo de las cosas"[7]. Es decir, el desarrollo del cálculo y sus importantes aplicaciones ha sido posible, además de esta intuición que está en su origen mismo, por la invención de los símbolos, los cuales intervienen en su aplicación.

En muchos procedimientos empleados por la ciencia, se puede identificar una intuición; sin embargo, la ciencia se confunde, porque esta intuición debe encontrar la forma de expresarse y de aplicarse según los hábitos del pensamiento, dada la necesidad que se tiene de los puntos de apoyo fijos representados en conceptos. De allí que se crea que todo su cuerpo de conocimientos está encasillado en el rigor y la precisión, y que su condición es la de un método que actúa de los casos generales a los particulares, "pero esa extensión y ese trabajo

5 Bergson, H., *Introducción a la metafísica y la intuición filosófica*, p. 47.
6 *Ibid.*, p. 54.
7 *Ibid.*, p. 74.

de perfeccionamiento lógico pueden proseguirse durante siglos, mientras que el acto generador del método sólo dura un instante"[8]. Entonces, se confunde el aparato lógico de la ciencia con la ciencia misma, olvidando la intuición de donde este aparato ha surgido. Este olvido hace del conocimiento científico un conocimiento relativo; asimismo, impide que las ciencias comprendan su verdadera significación y asuman que algunos de sus grandes descubrimientos surgieron de *raptos geniales*.

Para Bergson, el error de científicos y filósofos ha sido primar lo inmutable y estable sobre lo móvil: "La ciencia moderna data del día en que se erigió la movilidad en realidad independiente. Data del día en que Galileo tomó, haciendo rodar una bola por un plano inclinado, la firme resolución de estudiar ese movimiento de arriba abajo por sí mismo, en sí mismo, en vez de buscar su principio en los conceptos de lo *alto* y lo *bajo*, dos inmovilidades con las que Aristóteles creía explicar suficientemente la movilidad"[9]. Cuando el individuo escudriña en las profundidades de la conciencia, cuando su búsqueda es más profunda, sus invenciones son más grandes porque tocan la realidad viviente. En el origen de los grandes descubrimientos científicos, algunas ideas debieron ser oscuras, confusas y seguramente inconciliables con los conceptos preexistentes de la ciencia del momento. No obstante, los usos progresivos de ellas les otorgan una claridad y de ahí que se prefiera la seguridad y luminosidad que adquieren los conceptos. Entonces, afirma Bergson: "la ciencia no procede por encaje regular de conceptos que estarían predestinados a insertarse con precisión unos en otros"[10].

Lo que propone el filósofo es volver a la intuición, que para él es el método fundamental. Sin embargo, no se obtendrá jamás una intuición si no se ha ganado una confianza suficiente con sus manifestaciones superficiales, de lo que se infiere que el conocimiento de lo nuevo es posible cuando el espíritu se refiere a lo ya conocido. Es decir, la intuición es el *proceso* que permite al individuo sumergirse en la profundidad de la conciencia y desde allí crear ideas geniales que podrán ser reconocidas como grandes invenciones de la humanidad; por tanto, "el acto de invención al igual que el acto libre, son acciones

[8] *Ibid.*, p. 77.
[9] *Ibid.*, p. 80.
[10] *Ibid.*, pp. 90-91.

que emanan de lo profundo del espíritu cuyos 'efectos' se juzgarán en el exterior de la conciencia, es decir, en el espacio"[11].

Ahora, nos interesa revisar cómo los individuos crean o inventan conceptos, procedimientos o teorías matemáticas. En su libro *La energía Espiritual*, Bergson en el capítulo "el esfuerzo intelectual" hace una descripción de lo que él entiende por invención. Allí, afirma: "la invención consiste precisamente en convertir el esquema [dinámico] en imagen"[12]. Para Bergson, un esquema dinámico es una actitud intelectual, cuya "función" es esperar y preparar la llegada de las imágenes, "en unos casos, como en el de la memoria, espera imágenes precisas, en otros casos organiza el movimiento de las imágenes que se vienen a insertar en el esquema, este es el caso de la imaginación creadora"[13]. El esquema dinámico es aquella impresión cualitativa inicial que se da en nuestra mente y el desarrollo de dicho esquema conllevará un acto de invención. Este esquema, es decir, este "algo inmaterial" se produce cuando el yo "desciende" a la profundidad de la conciencia. El desarrollo de este esquema corresponde a nuestra idea de intuición como proceso, que parte de lo ya conocido, lo organiza y lo devuelve a la realidad (teórica o práctica) luego de ser formalizado o validado por la comunidad académica.

De la invención podríamos enunciar ciertas "propiedades", tales como su carácter anticipatorio, móvil, esporádico, profundo y el hecho de que requiere esfuerzo. La *anticipación* tiene que ver con la intencionalidad, con una dirección de las imágenes venideras. Las imágenes difusas que vienen a llenar el esquema no pueden ser adivinadas; ellas actúan sobre el esquema dinámico "porque se hallan entrelazadas en una red de relaciones que reflejan la tensión que orienta al esquema dinámico a desarrollarse en imágenes yuxtapuestas"[14]. Debemos entender por anticipación una organización previa de las imágenes en el interior del esquema. Tal organización es posible gracias a la similitud interna de las imágenes. Por ejemplo, si deseamos recordar el nombre de una persona, *el esquema dinámico* será la impresión general que he guardado de ese nombre, las imágenes que luego vendrán a mi mente serán determinadas letras del alfabeto. Estas imágenes se organizarán según la finalidad del esquema. La tendencia del esquema dinámico implica una intención, en nuestro caso,

[11] Peña-Páez, L.M., "El acto de invención como acto libre en la filosofía de Henri Bergson. Una aproximación desde el Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia", p. 147.
[12] Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", p. 86.
[13] Peña-Páez, L.M., "El acto de invención como acto libre en la filosofía de Henri Bergson. Una aproximación desde el Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia", p. 150.
[14] *Ibid.*

por ejemplo, de recordar un nombre. Entonces, la intención se encuentra ya pre-formada en el presente.

La invención es *móvil*, pues requiere de un doble movimiento: por un lado, el movimiento vertical del esquema a la imagen, que está dirigido hacia la profundidad de la conciencia; por otro lado, el movimiento horizontal de las imágenes, que es propio de la superficie (donde "habita" el lenguaje). Y, como ya mencionamos, en la superficie no se dan los esquemas dinámicos, allí "no se produce nada nuevo, no se manifiesta nada creativo. La novedad, y el esfuerzo interior, se manifiestan, sin embargo, en los movimientos que van hacia el objeto"[15].

La invención requiere un *esfuerzo*, es una actividad que toma más tiempo del esperado, se le presentan obstáculos durante su desarrollo. Supongamos que una persona desea inventar una máquina. Lo que inicialmente tiene en mente es la función que deberá desempeñar esa máquina. Entonces, "la forma abstracta de ese trabajo, evoca sucesivamente en su mente, a fuerza de tanteos y de experiencias, la forma concreta de los diversos movimientos componentes que realizarían el movimiento total, luego las de las piezas y combinaciones de piezas capaces de dar a luz esos movimientos"[16]. Dichos tanteos y experiencias representan la reorganización de las imágenes en el esquema dinámico, es decir, la "lucha" entre las ideas nuevas y las ya conocidas, para lograr el diseño de la máquina que se desea inventar.

El proceso de invención es *esporádico*, no se da continuamente en nuestra mente, ni en todas las mentes. De ahí que la innovación no sea una actitud intelectual habitual en todas las personas. Esto es así porque el individuo "vive" en la superficie de la conciencia, en el hábito o en la costumbre, donde no se requiere mayor esfuerzo para "sobrevivir". Por su parte, el esquema dinámico requiere de un esfuerzo profundo de la persona, ese "esfuerzo propiamente dicho se encuentra sobre el trayecto desde el esquema, invariable o cambiante, hacia las imágenes que deben llenarlo"[17], es decir, se requiere de mayor tiempo y esfuerzo para que la idea difusa inicial se desarrolle en ideas claras y distintas. Debemos comprender que la innovación no es una actividad de acumular y de adicionar imágenes nuevas a las antiguas: es la actitud de penetrar y organizar las imágenes en el esquema haciéndolo dinámico y modificándolo constantemente.

15 Mathieu, V., *Bergson. Il profondo e la sua espressione*, p. 166.
16 Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", p. 86.
17 *Ibid.*, p. 87.

Inventar requiere ir a la *profundidad* de la conciencia. Para Bergson, la invención no puede darse si nos quedamos solo en la superficie, es decir, en el mero conocimiento del lenguaje, dado que allí nos encontramos con una teoría mecanicista de las ideas, un asociacionismo psicológico o en la ya conocida teoría causal. No es que estas teorías deban ser desechadas, ya que la matemática requiere de ellas, solo que él afirma que deben ser acompañadas del esfuerzo que el yo realiza al sumergirse en las profundidades de la conciencia, donde podemos encontrar esas imágenes abstractas e incorpóreas que, con ayuda de los símbolos y la formalización, darán paso a los nuevos conceptos o teoremas matemáticos. Como se ha mencionado, Bergson recurre a su idea de *esquema dinámico* para llevarnos a lo que es la invención. Este esquema se da en la profundidad de la conciencia, es un acto puro y se dirige hacia las imágenes que están en la superficie, es decir, hacia los objetos. Recordemos también que la idea de intuición está relacionada con la forma en que este esquema dinámico se desarrolla en ideas claras y precisas, que se expresa en un lenguaje matemático y que es validado por la comunidad académica.

¿Por qué no innovamos siempre? ¿Por qué algunos matemáticos tuvieron grandes ideas y otros no, compartiendo los mismos conocimientos y el mismo lenguaje matemático? Porque la invención requiere de gran esfuerzo y el espíritu humano siente una mayor comodidad al estar siempre en la superficie, donde las cosas se parecen, donde está el hábito, la repetición y se aplica la teoría asociacionista. El esfuerzo requiere ahondar: “por debajo de la superficie de contacto entre el yo y las cosas exteriores, [que] penetramos en las profundidades de la inteligencia organizada y viviente”[18].

La tarea de encontrar las imágenes requeridas para completar el esquema es un trabajo que lleva tiempo, indicio del esfuerzo necesario del trabajo intelectual. Este punto es importante, dado que se articula con la idea que venimos defendiendo de la intuición como un proceso, no como una inspiración divina o algo misterioso. Mientras el matemático permanezca solo en la superficie, es decir, solo en los símbolos, las proposiciones, los teoremas, no podrá salir del hábito y la repetición: debe ir a la profundidad de su conciencia, debe reorganizar esa imagen inicial, que es incorpórea y abstracta, para poder crear algo nuevo, para que se dé la invención.

Ahora bien, no debemos olvidar que el esfuerzo de invención tiene estados. Antes de llegar allí, podemos pasar por la memorización, la interpretación y la

[18] Bergson, H., *Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia*, p. 99.

comprensión. En la superficie, las imágenes que evocamos solo se dejan llevar por su forma externa e invariable, por ejemplo, los conceptos o los símbolos. De allí que la invención, requiera un algo adicional, "un sentimiento infinitamente móvil" diría Bergson. Requerimos de una intuición, entendida como un proceso dinámico que necesita tanto del movimiento horizontal en la superficie como del vertical de la conciencia. Entendemos, ahora, por qué innovamos tan pocas veces.

La intuición y su relación con la invención en Poincaré

Poincaré ha sido muy influyente en los intuicionistas contemporáneos, quienes afirman que "(1) Las matemáticas tienen no solo un significado formal sino también un contenido y (2) Los objetos matemáticos son captados directamente por la mente pensante"[19]. La segunda tesis se puede interpretar de dos maneras: o bien los objetos matemáticos existen independientes de nuestra mente, o bien existen independientes de nosotros, pero se conocen a través de un proceso constructivo.

El mundo de las matemáticas es un mundo ideal, en el que "pueden pasar las cosas mientras podemos imaginarlas claramente"[20]. En este mundo, por ejemplo, un número puede ser realmente positivo o arbitrariamente pequeño, pero en la realidad esto no es posible. Esto no implica que la matemática sea una ficción o un cuento de hadas. Es algo con sentido: "algo en lo que todos podemos estar de acuerdo y con lo que podemos trabajar, porque todos lo entendemos de la misma manera"[21].

Para Poincaré, las matemáticas tienen significado y van más allá de cualquier formalización. Por tanto, aunque entiende que el lenguaje matemático es necesario para la creación, por sí solo no puede crear nuevas matemáticas. Así, el razonamiento matemático deja de ser una relación lógica entre proposiciones para convertirse en una relación epistémica entre juicios. Poincaré solo usa la intuición en la aritmética en donde la secuencia de los números no es completamente independiente de la experiencia del mundo exterior. Gracias al poder de la intuición en la mente, al individuo se le presentan esquemas de acción superiores, los cuales son resultado de la creación. Esto no implica que la experiencia sea fuente de todo conocimiento, su función es hacer consciente

[19] Heinzmann, G., y P. Nabonnand, "Poincaré: Intuitionism, Intuition, and Convention" p. 163.
[20] Hersh, R., "Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey)", pp. 37.
[21] *Ibid.*

al individuo de ciertas estructuras en la mente, a las que la conciencia debe adaptarse.

En la vida práctica sabemos cosas, aunque a veces no sabemos cómo las sabemos: ¿cómo podría saber que no dejaron una trampa de osos al lado de mi cama cuando me levante? No lo sé, pero sé que eso no pasará. De la misma manera sabemos que lo que parece un límite en realidad lo es, aunque no podamos probarlo o explicarlo. Aunque es posible que pasen cosas ridículas (como la trampa de osos), es necesario reconocer que el hecho de que algo no sea cierto en las matemáticas no quiere decir que no podría serlo. Por tanto, el conocimiento práctico en matemáticas es un tipo de conocimiento real, "aunque no sea demostrativo o conocimiento deductivo"[22].

Para Poincaré, la experiencia es una oportunidad para usar la intuición directa, la cual puede entenderse como "mi devenir consciente de algo que se ha presentado ante mí"[23]. Para Poincaré, la intuición matemática está fundamentada en la prioridad que la cognición da a la forma general sobre la forma singular. Como Kant, la ubica "en una forma de cognición caracterizada por la intuición de pluralidades homogéneas únicas, de unidades de partes homogéneas, generadas a partir de reglas o esquemas, cada uno de los cuales abarca actos de construcción ilimitados de un determinado tipo"[24].

El pensamiento de Poincaré está enmarcado en la filosofía de los fundamentos de la matemática. A diferencia de Frege, para quien todo lo que pensamos sobre una cuestión matemática está relacionado con los principios lógicos y los presupuestos racionales con los que se cuente, Poincaré considera que las definiciones legítimas deben rastrear lo oscuro hasta lo claro, donde las nociones de claridad y oscuridad se entienden psicológicamente[25]. Sus ideas influyeron en muchos filósofos de la ciencia. Él concebía las matemáticas como el producto del pensamiento de los seres humanos y de las relaciones entre los objetos matemáticos. Para él, la claridad de los enunciados es juzgada por los estándares que los propios individuos inventaron para tal fin. Para Goldfarb[26], las ideas de Poincaré permiten evidenciar no solo los puntos débiles del logicismo, sino comprender el enfoque naturalista contemporáneo.

22 *Ibid.*, p. 38.
23 Godlove, T., "Poincaré, Kant, and the Scope of Mathematical Intuition", pp. 783.
24 *Ibid.*
25 *Cf.* Aspray, W. y P. Kitcher, *History and Philosophy of Modern Mathematics.*
26 Goldfarb, W., "Poincaré against the Logicists", pp. 61-81.

Para el matemático francés, la intuición es una experiencia psicológica que es falible y que debe ser tenida en cuenta en cualquier filosofía realista de las matemáticas. Las intuiciones son "suposiciones o ideas obtenidas por un razonamiento plausible, ya sea totalmente consciente o en parte subconsciente"[27]. La intuición está alejada de ese mito antiguo, en el que supera la lógica y se conecta directamente con lo trascendental.

La lógica se puede comparar con un juego de ajedrez. Es decir, uno no entiende el juego solo por saber las reglas. La intuición es necesaria "para obtener una comprensión de las pruebas en el análisis". Más aun, es la intuición quien guía la elección "de las convenciones a adoptar y de las rutas a tomar hacia una prueba"[28]. Actúa como la sagacidad matemática, "es decir, percibir el motivo interior que hace de esta serie de sucesivos movimientos una especie de todo organizado"[29].

Para Brouwer, Poincaré pertenece a esa larga tradición francesa del intuicionismo, en la que existe una separación entre la mente y la materia y la aceptación de la intuición como complementaria a la inteligencia. Ryle (1949) describe la separación de la mente y la materia "como la 'doctrina del fantasma en la máquina' y el 'mito de Descartes' en el universo cartesiano"[30]. Para Poincaré, la intuición es necesaria para las etapas del proceso creativo, para la elección de axiomas y para tejer la secuencia del argumento lógico. El matemático francés rechazaba la tesis según la cual los símbolos y la lógica son suficientes para fundamentar las matemáticas. Aunque acepta que el lenguaje y los símbolos son una parte esencial, él distingue la invención (proceso mental de búsqueda, inspiración y construcción) de la prueba lógica, convirtiendo a la intuición en instrumento de invención.

Para Poincaré la intuición no proporciona certeza ni rigor. Por ejemplo, parece una verdad intuitiva que toda función continua tenga derivada; hoy sabemos, no obstante, que algunas funciones continuas no la tienen. ¿Por qué nos engaña la intuición en este caso? Porque es casi imposible imaginarnos una curva sin ancho y bajo esta imagen siempre podemos encontrarle una recta tangente. Se requiere de un análisis riguroso para entender por qué la función valor absoluto no es derivable en cero. Para que el rigor aparezca en

[27] Hersh, R., "Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey)", p. 44.
[28] Goldfarb, W., "Poincaré against the Logicists", p. 64.
[29] Poincaré, H., "La Intuición y la lógica en las matemáticas", p. 7.
[30] Citado en van Stigt, W.P., Brouwer's Intuitionism, p. 129.

el razonamiento se requieren las definiciones, puesto que la mayor parte de los objetos con los que trabajan los matemáticos se consideran bien definidos.

Algunos matemáticos y filósofos de la ciencia aún piensan que se puede alcanzar el rigor absoluto, lo que contrasta con la idea de Poincaré, para quien "la pura lógica nunca nos podría conducir a otra cosa que a tautologías; no podría crearse nada nuevo; de ella sola no podría surgir nunca un tema científico"[31]. Por tanto, para construir cualquier parte de la matemática se requiere algo más que la lógica.

Poincaré critica a aquellos lógicos que pretenden eliminar la intuición, porque encuentra que los ideales de la lógica pueden apartarse de la realidad. Encarcelados en su torre de marfil, renuncian a todo contacto con el mundo físico. Revisemos la siguiente situación.

Un matemático quiere mostrar una propiedad que le pertenece a un objeto, el cual, a primera vista, parece indefinible y, por tanto, intuitivo. Luego de varias aproximaciones al concepto, logra encontrar la propiedad precisa que permite establecer de manera irreprochable la propiedad buscada. Ahora bien, los filósofos se preguntarán si la definición encontrada corresponde con el objeto intuido originalmente "o bien que algún objeto real y concreto cuya conformidad con su idea intuitiva que cree usted reconocer de inmediato corresponde a su nueva definición"[32]. Entonces, la dificultad no se ha desplazado, se ha dividido. La propiedad buscada estaba compuesta por dos verdades diferentes que, en principio, no eran fáciles de distinguir: "la primera era una verdad matemática, y ahora queda rigurosamente establecida. La segunda era una verdad experimental. Sólo la experiencia puede enseñarnos que un objeto real y concreto corresponde o no corresponde a una definición abstracta"[33]. Y, sin embargo, esta segunda propiedad no puede ser matemáticamente demostrada.

En matemáticas, aunque nos cercioremos de que cada enunciado de la lógica es correcto, no estamos seguros de comprender el verdadero significado de la manifestación, más aún, aunque por un esfuerzo de memoria seamos capaces de repetir una prueba sin olvidar ninguno de los pasos, no poseeremos toda la realidad, "no poseeremos algo importante, que hace que la unidad de la demostración nos eluda por completo"[34], pero asume que la realidad más interesante es la idea global y no solo la de los elementos aislados.

[31] Poincaré, H., "La Intuición y la lógica en las matemáticas", p. 4.
[32] *Ibid.*, p. 5.
[33] *Ibid.*, p. 6.
[34] *Ibid.*

El análisis pone a nuestra disposición gran cantidad de procedimientos, cuya infalibilidad está garantizada y, aunque cada uno de ellos satisfaga lo que estamos buscando, "¿cuál de ellas nos llevará más rápidamente a nuestra meta? ¿Quién nos dirá cuál elegir? Necesitamos una facultad que nos haga ver el final desde lejos, y la intuición es esta facultad"[35]. Explorar para elegir la ruta es tan importante como saber por qué se eligió esa ruta. Así, en las matemáticas, tanto la lógica como la intuición tienen un papel importante: "cada una es indispensable. La lógica, la única que puede dar certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención"[36]. Teniendo esta afirmación en mente, pasaremos a estudiar la invención en el pensamiento del matemático francés.

Para Poincaré, la invención matemática "es el acto en el cual parece que el espíritu humano toma lo menos posible del mundo exterior, donde no obra o no parece obrar sino por sí mismo o sobre sí mismo"[37]. Luego, nos dirá que "inventar consiste precisamente en no construir las combinaciones inútiles y sí las útiles, que están en ínfima minoría. Inventar en discernir, es elegir"[38]. Finalmente, nos brindará el siguiente argumento: "pero antes de demostrar ha sido necesario inventar. No se inventa por deducción pura. Si toda la conclusión estuviera ya en las premisas conocidas ya no sería una invención, una creación, no sería más que una ejecución, una transformación"[39].

Ahora bien, este acto de invención en matemáticas requiere ser validado por las leyes de la lógica, leyes que cualquier matemático domina a la perfección, y, sin embargo, aunque puedan seguir un razonamiento matemático complejo, no todos son capaces de inventar algo nuevo. Incluso, algunos matemáticos podrían ostentar una excelente memoria o una atención prodigiosa y, aun así, no crear nuevas teorías. El mismo Poincaré reconoce que, aunque su memoria es buena, y conoce todas las reglas del ajedrez, esto no le alcanza para ser un buen jugador de ajedrez. Así mismo, matemáticos que conocen todas las leyes de la lógica y los axiomas no logran llegar a la invención. ¿Por qué? Porque en realidad, la matemática no es una lista de silogismos, sino que tiene que ver con el orden determinado en que son colocados: "…y el orden en el cual están colocados estos elementos es más importante que los elementos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición, por decirlo así, de este orden, que me

[35] *Ibid.*, p. 7.
[36] *Ibid.*
[37] Poincaré, H., "Invención Matemática", p. 42.
[38] *Ibid.*, p. 47.
[39] Poincaré, H., *Las ciencias y las humanidades*, p. 80.

permite percibir de una ojeada la totalidad del razonamiento, no debo sentir temor de olvidar ninguno de los elementos, cada uno de los cuales vendrá a colocarse por sí mismo en el cuadro que le está asignado, y sin que me vea obligado a hacer ningún esfuerzo de memoria"[40].

En su ensayo "La invención matemática", Poincaré describe cómo le surgió la idea de las funciones fuchsianas. Este relato permite comprender que sus ideas fueron conquistadas por la intuición y legitimadas por la lógica. Para el matemático francés, la invención ocurre en el pensamiento subconsciente, lo que no implica que sea dado por el azar. Por tanto, existe la posibilidad "de que el subconsciente sea en realidad más inteligente que la mente consciente"[41]. Aunque no se dice explícitamente, otros escritores han sostenido "que el subconsciente es menos inhibido, más imaginativo, más creativo que el consciente"[42]. Jacques Hadamard, un matemático brillante, otorga un papel primordial al subconsciente en el descubrimiento matemático y su conexión con la intuición[43].

Un inventor, cuando emprende la tarea de resolver un nuevo problema, recurre en primera instancia a buscar problemas similares ya resueltos por el mismo método, "entonces debe percibir de qué manera se diferencia esta nueva pregunta de las de problemas anteriores y de ahí deducir las modificaciones necesarias para aplicar el método"[44]. Cuando las analogías y diferencias no son muy evidentes, se requiere de una penetración poco común; es decir, que el inventor, sin la ayuda de los sentidos ni de la imaginación, debe "tener una comprensión directa de lo que constituye la unidad de la pieza del razonamiento, de lo que hace, por así decirlo, su alma y su fundamento"[45].

Poincaré no pretende asegurar que los matemáticos, capaces de inventar, recurren solo a la intuición, sino que entiende la necesidad del cuerpo lógico y axiomático de la matemática. Ahora bien, existen varias clases de intuición, desde la del número puro que da paso a la inducción matemática rigurosa, hasta la intuición sensible, para la cual la imaginación es su principal contribuyente. Estos dos "extremos" de la intuición no tienen el mismo objeto y ponen en juego dos facultades diferentes de nuestro intelecto: "podríamos pensar en dos luces de búsqueda dirigidas a dos mundos extraños entre sí"[46]

[40] Poincaré, H., "Invención Matemática", p. 46.
[41] Hersh, R., "Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey)", p. 42.
[42] *Ibid.*
[43] *Cf.* Hadamard, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.*
[44] Poincaré, H., "La Intuición y la lógica en las matemáticas", p. 8.
[45] *Ibid.*
[46] *Ibid.*, p. 9.

Son poco comunes los matemáticos que pueden inventar sin la ayuda de la imaginación. Algunos "iluminados" por la intuición del número puro y de las formas lógicas no solo pueden demostrar, sino también inventar. Estos pocos analistas son capaces de percibir a simple vista el plan general de un edificio lógico, sin la intervención (aparente) de los sentidos. Sin embargo, en la mayoría de los casos "no deja de ser cierto que la intuición sensible es en matemáticas el instrumento más habitual de invención"[47]

Los matemáticos con una intuición más desarrollada y cultivada a lo largo de toda su vida con sus experiencias físicas y conceptos de su disciplina "sabrán elegir, sabrán adivinar, sabrán crear. Su obra se reducirá quizás a unas pocas páginas de las que cualquier profesional un poco hábil extraerá fácilmente numerosos volúmenes"[48].

El esquema dinámico de Bergson en Poincaré

En este apartado mostraremos cómo la idea de *esquema dinámico* propuesta por Bergson en su estudio sobre la invención está presente implícitamente en el pensamiento creativo de Poincaré.

Bergson reconoce que "el esquema es algo difícil de definir, pero que cada uno de nosotros siente, y cuya naturaleza entenderemos si comparamos los distintos tipos de recuerdos, especialmente los recuerdos técnicos o profesionales"[49]. El filósofo identifica este esquema como un *esquema dinámico*, que puede entenderse como una actitud intelectual, el cual espera, prepara la llegada y organiza el movimiento de las imágenes que van a insertarse en el esquema, tal como sucede en la imaginación creadora. Por su parte, Poincaré, no define qué sea un esquema. Sin embargo, cuando describe su práctica matemática y cómo llega a sus invenciones, notamos que está haciendo uso de un *esquema dinámico* en el sentido de Bergson. Poincaré asume que la invención es posible cuando se encuentra la mejor "combinación" de las ideas diversas. Vemos que la organización era justo la función de la intuición dentro del esquema dinámico: "Una noche tomé café muy cargado, contra mi costumbre, y no pude dormir; las ideas surgían en tropel y yo las sentía como si chocasen, hasta que dos de ellas se engancharon, por decirlo así, para formar una combi-

[47] *Ibid.*
[48] Poincaré, H., *Las ciencias y las humanidades*, p. 81.
[49] Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", p. 89.

nación estable. A la mañana siguiente había establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas…”[50].

Las ideas llegan y se organizan luego de un trabajo exhaustivo previo. Poincaré hace énfasis en la importancia del trabajo inconsciente en el cual se da la invención. Las inspiraciones repentinas surgen luego de varios días de esfuerzos voluntarios: “tales esfuerzos no han sido, por tanto, tan estériles como se pensaba, pues han puesto en conmoción la máquina inconsciente, y sin ellos, ésta no hubiera marchado y nada hubiera producido”[51]. Este esfuerzo es de un tipo especial. En palabras de Bergson, sería un esfuerzo intelectual, el cual es el más profundo de todos los esfuerzos y el que da paso a la invención. El mayor esfuerzo intelectual se producirá en el acto de invención, y allí la intuición es aquella que permite organizar las ideas al interior del esquema.

Por naturaleza se concibe que un esquema es algo determinado. Sin embargo, para que la invención pueda ser posible, el esquema debe ser *dinámico*, es decir, móvil y elástico. De esta forma, las imágenes pueden “entrar” en él, y gracias a la intuición estas imágenes intangibles e incorpóreas se organizan para dar solución a un solo y mismo problema: “…Kepler consagró una parte de su vida a ensayar hipótesis extrañas hasta el día en que, habiendo descubierto la órbita elíptica de Marte, todo su trabajo anterior tomó cuerpo y se organizó en sistema organizado. En otros términos, en lugar de un esquema único, de formas inmóviles y rígidas, con el que uno se da de inmediato la concepción distinta, puede haber un esquema elástico o moviente, cuyos contornos la mente se niega a fijar, porque espera su decisión de las imágenes mismas que debe atraer el esquema para darse un cuerpo. Pero, sea el esquema fijo o móvil, es durante su desarrollo en imágenes que surge el sentimiento de esfuerzo intelectual”[52]. Para Poincaré, la ‘mejor combinación’ tiene un carácter doble. Por un lado, el trabajo subconsciente no nos lo da *todo hecho*, sino que parece inicialmente desordenado y vago. Estos son los puntos de partida para que, después, en el trabajo consciente, las inspiraciones sean verificadas gracias a reglas estrictas. Por tanto, queda evidenciado que la invención se da gracias a esa dualidad o, mejor aún, a “los métodos de trabajo de uno y otro yo”[53].

Para ejemplificar el *esquema dinámico* de Bergson podemos recurrir a lo que le sucede al dramaturgo o al músico: “todos tienen en la mente en primer

[50] Poincaré, H., “Invención Matemática”, p. 49.
[51] *Ibid.*, p. 53.
[52] Bergson, H., “El Esfuerzo Intelectual”, p. 87-88.
[53] Poincaré, H., “Invención Matemática”, p. 61.

lugar algo simple y abstracto, quiero decir incorpóreo”[54]. El primero desarrolla su tesis en acontecimientos, en sentimientos representados en sus personajes; el segundo, desarrolla su esquema dinámico en sonidos, ejecutadas en sonatas, óperas, canciones. Matemáticos brillantes como Euler, Gödel, Ramanujan, entre otros, gracias a sus conocimientos previos en matemáticas, conseguidos en la academia o, en el último caso, adquiridos en los libros, han tenido una o varias ideas, las cuales inicialmente no eran tan claras, ni tan precisas. Luego de un trabajo arduo, que incluye el movimiento de sus imágenes en la superficie (lenguaje matemático) y el tránsito vertical a lo profundo (esfuerzo intelectual), logran desarrollar su esquema en imágenes que se pueden yuxtaponer y expresar de manera tangible (símbolos, proposiciones matemáticas) a la comunidad académica. Es decir, se parte de un esquema de la totalidad, que se desarrolla y encuentra su resultado final, cuando encuentra imágenes claras y distintas.

Para Poincaré es en el leguaje (en la superficie) donde los avances matemáticos adquieren su certeza y rigor, que se obtienen gracias a las definiciones y a los enunciados matemáticos demostrados. Sin embargo, los objetos que “vienen” a la mente creativa del matemático no están definidos desde un principio; este solo tiene “una imagen tenue de ellos y no una idea precisa sobre la que el razonamiento pudiera afianzarse. Fue allí en primer lugar a donde los lógicos tuvieron que dirigir sus esfuerzos”[55].

La idea de esquema como un todo la encontramos velada en el ejemplo que Poincaré nos da sobre el juego de ajedrez. Bien sabemos que, para ser un excelente jugador, no basta con saber cómo se mueve cada una de las piezas en el tablero. Esto solo nos ayudará a identificar si el movimiento está hecho según las reglas: “Para entender el juego es imprescindible otra cuestión, saber por qué el jugador mueve esta pieza en lugar de aquella otra que podría haber movido sin romper las reglas del juego. Es decir, percibir el motivo interior que hace de esta serie de sucesivos movimientos una especie de todo organizado”[56].

Tenemos, entonces, que el esquema dinámico es una totalidad en la que las imágenes que han llegado, una vez organizadas, ya no se pueden separar unas de otras. Por ello, la invención será precisamente ese esfuerzo intelectual que gradualmente convertirá las ideas iniciales confusas, dadas en la profundidad de la conciencia, en imágenes que se pueden distinguir y entender claramente en el espacio.

[54] Bergson, H., “El Esfuerzo Intelectual”, p. 86.
[55] Poincaré, H., “La Intuición y la lógica en las matemáticas”, p. 4.
[56] *Ibid.*, p. 71.

Para Bergson, en el *esquema dinámico* debe haber un cierto tipo de organización de las imágenes, pero, como no siempre esta organización es viable, el esquema se modifica. El esfuerzo que demanda la invención radica en esa "lucha" o negociación, bien sea entre las imágenes o las imágenes y el esquema.

Esa idea de *negociación*, de orden, también está presente en Poincaré. Cuando realizamos una demostración, esta no comprende solamente una yuxtaposición de las premisas, sino que es el orden en que son colocados los enunciados matemáticos. Este orden es dado por la intuición, y, gracias a esta intuición, ya no importa si la memoria falla, porque "no debo sentir temor de olvidar ninguno de los elementos, cada uno de los cuales vendrá a colocarse por sí mismo en el cuadro que le está asignado"[57]. Es decir, la intuición es la que permite a Poincaré, en palabras de Bergson, organizar las imágenes en el esquema dinámico.

Bergson, en su análisis sobre la invención, describe que el esquema tiene un doble movimiento horizontal entre las imágenes (que se da en la superficie) y un movimiento vertical del esquema a las imágenes (que se da en la profundidad de la conciencia hacia su superficie): "trabajar intelectualmente consiste en conducir una misma representación a través de los diferentes planos de conciencia en una dirección que va de lo abstracto a lo concreto, del esquema a la imagen"[58]. Ahora bien, Poincaré, cuando hace referencia a la invención, expresa: "hay que hacer a propósito de este trabajo inconsciente, y es que éste no es posible y en todo caso no es fecundo sino cuando va de una parte precedido y de otra seguido de un periodo de trabajo consciente"[59], reconociendo que no existen "inspiraciones repentinas" e implícitamente mostrándonos una dirección, de las imágenes al esquema, del esquema a las imágenes, en palabras de Bergson.

Bergson ha insistido en que el *esquema dinámico* se produce en el yo profundo: de ahí que la invención venga luego de realizar un gran esfuerzo, "así, el esfuerzo de invención tendrá la dirección de lo abstracto a lo concreto, es decir, de la profundidad de la conciencia a la superficie del espacio"[60]. Por su parte, Poincaré afirmará: "Ahora se comprende mejor la necesidad del segundo periodo de trabajo consciente después de la inspiración. Es preciso trabajar

57 Poincaré, H., "Invención Matemática", p. 44.
58 Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", p. 88.
59 Poincaré, H., "Invención Matemática", p. 44.
60 Peña-Páez, L.M., "El acto de invención como acto libre en la filosofía de Henri Bergson. Una aproximación desde el Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia", p. 148.

con los resultados de esta inspiración, deducir las consecuencias inmediatas, ordenarlas, redactar las demostraciones y, sobre todo, es necesario comprobarlas... El yo inconsciente, o, como se dice, el yo *subliminal*, representa un papel capital en la invención matemática"[61].

Si los grandes matemáticos siempre se quedaran en la cotidianidad, si no intentaran salir de la repetición o si no tuviesen algo más que el solo simbolismo, no habrían sido posibles todas sus geniales ideas. Ahora bien, la invención no debe ser vista como el acto que "llena" un intervalo que va de la idea inicial a la idea final. No es una cuestión tan simple como proponerse un objetivo e ir yuxtaponiendo ideas hasta que llegue el invento final: "nos es forzoso entonces admitir que el todo se ofrece como un esquema, y que la invención consiste precisamente en convertir el esquema en imagen"[62].

Poincaré nos aclara que el trabajo del inconsciente no nos proporciona la idea "completamente hecha", sino que, más bien, esa inspiración o esquema que es fruto de este trabajo inconsciente nos brinda puntos de partida, cuyos cálculos se harán en lo que él denomina la segunda parte del trabajo, es decir, en el trabajo consciente. Esto es así dado que en la conciencia "habitan" la disciplina, la voluntad, la atención, entre otras habilidades necesarias para demostrar que los cálculo son correctos, mientras que "en el yo subliminal reina, por el contrario, lo que llamaría la libertad, si se pudiera dar ese nombre a la ausencia de disciplina y al desorden. Este desorden mismo permite, no obstante, lazos de unión inesperados"[63].

Conclusiones

A lo largo de este articulo hemos intentado sustentar la idea de la intuición "como un *proceso dinámico* que no puede desconocer el contexto real del individuo (no necesariamente el físico)"[64]. Inicialmente, las ideas, o en palabras de Bergson, las imágenes, pueden "llegar" a la conciencia de manera desordenada, las cuales propician dentro del esquema dinámico una lucha o negociación con las imágenes ya conocidas (en el caso particular de las matemáticas, los enunciados o los conceptos previos) para finalmente emerger a la superficie o al lenguaje matemático, de forma clara y distinta para ser formalizados por la lógica y avalados e insertados a las teorías de la comunidad académica. El esquema

[61] Poincaré, H., "Invención Matemática", p. 53-54.
[62] Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", p. 87.
[63] Poincaré, H., "Invención Matemática", pp. 53-54.
[64] Peña-Páez, L.M., "Consideraciones sobre la noción de intuición matemática", p. 129.

o el acto incorpóreo, intangible y abstracto que se da en la conciencia inicia su movimiento hacia la superficie, por lo que va perdiendo su carácter móvil para hacerse cada vez más parecido a una forma espacial. Es decir, la idea difusa que un matemático tiene al inicio va tomando forma a medida que la va desarrollando y es perfectamente clara cuando la puede materializar en un teorema o proposición matemática, con ayuda del lenguaje. En el *esquema dinámico*, los elementos, inicialmente, son indistinguibles y diversos, una unidad entre sí. Empero, cuando el esquema se desarrolla completamente, las imágenes se diferencian unas de otras, se separan, se yuxtaponen y se chocan, dado que ya están espacializadas, ya están en la superficie. Y aquí encontramos el lenguaje.

La experiencia del individuo (no solo la física sino también su experiencia matemática) juega un papel importante en la génesis de los conceptos más fundamentales de la matemática. No es simplemente un apoyo para la abstracción ni algo que al final se reduce a la mera manipulación de los signos. Para Poincaré, el leguaje se convirtió en una herramienta esencial en la conceptualización de la matemática, más allá de su uso para memorizar y comunicar, y "es una parte integral de todo el marco experiencial en el que se basan nuestras facultades internas"[65]. Por otro lado, encontramos que la invención en matemáticas requiere de algo más que el conocimiento de los signos y los enunciados de la lógica, esto es, la intuición. Ahora bien, la concepción de invención en Bergson y Poincaré tienen puntos en común.

Para Bergson, "la invención consiste precisamente en convertir el esquema en imagen"[66]. El filósofo francés concibe la invención como la materialización creciente de lo inmaterial. Así, cuando un matemático tiene un problema que desea resolver, inicialmente la solución no es ni clara ni precisa. Esta solo se obtiene una vez que, luego de organizar las ideas, el matemático logra desarrollarlas y expresarlas de una manera tangible y perceptible a los sentidos; es decir, al expresarlas en conceptos, en teoremas, o enunciados matemáticos. Para Poincaré, por su parte, el proceso de invención consiste en elegir. El yo inconsciente le presenta a la conciencia una cantidad de imágenes que deben organizarse, combinarse de forma tal que tomen sentido y sean fructíferas para la creación matemática. Este yo inconsciente al que se refiere Poincaré no es automático: puede discernir, elegir, adivinar y lo hace "mejor que el yo consciente, puesto que triunfa allí donde este había fracasado"[67]. Ahora bien,

[65] van Atten, M. y otros (eds.), *One hundred years of intuitionism (1907-2007). The Cerisy Conference*, p. 177.
[66] Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", p. 95.
[67] Poincaré, H., "Invención Matemática", p. 55.

el inconsciente deberá elegir de entre todas las imágenes las que son más apropiadas y este no es un trabajo del azar, “entre todas las excitaciones de nuestros sentidos, por ejemplo, solamente las más intensas llamarán nuestra atención”[68]

Tanto para Bergson como para Poincaré la intuición es una clase de sentimiento, el cuál acompaña lo que ellos llamarán la invención. En Bergson el esquema debe ser desarrollado en imágenes, en la dirección de lo profundo a la superficial, lo que será acompañado por un sentimiento de esfuerzo intelectual. Y este sentimiento se acentuará entre más negociaciones o concesiones se lleven a cabo entre las imágenes y el esquema: “Aquí tenemos el claro *sentimiento* de una forma de organización, variable sin duda, pero anterior a los elementos que deben organizarse, luego el *sentimiento* de una convergencia entre los elementos mismos, y finalmente, si la invención llega a un resultado, el *sentimiento* de un equilibrio que es una adaptación recíproca entre la forma y la materia”[69].

Por su parte, Poincaré habla de un sentimiento o de un espíritu de sutileza necesario para la invención. Para él no se inventa solo usando las premisas de la lógica, “nos hace falta algo más, y ese algo es el espíritu de sutileza”[70]. Es este espíritu el que permite que entre una variedad de datos dudosos y múltiples se elijan y ordenen aquellos que conducirán a la invención. “Concíbase que este sentimiento, esta intuición del orden matemático, que nos hace adivinar armonías y relaciones ocultas, no sea patrimonio de todas las gentes. Habrá muchos que no poseerán ni ese sentimiento delicado y difícil de definir… Otros no tendrán ese sentimiento sino en escaso grado… Por último, otros poseerán en alto grado, más o menos elevado, la referida intuición especial, y entonces, no solamente podrán comprender las matemáticas, aun cuando su memoria no tenga nada de extraordinario, sino que podrán convertirse en creadores, podrán dirigir sus facultades a inventar, claro es que con éxito vario, según el desarrollo de la potencia intuitiva”[71].

La invención es el máximo esfuerzo, requiere que el yo transite por los diferentes estados de conciencia, desde el yo profundo hasta el yo superficial. En la invención, el esquema es modificado por las imágenes, las cuales no permanecen idénticas a sí mismas. Esto implica un movimiento horizontal (entre las imágenes) y uno vertical, que requiere un mayor esfuerzo.

68 *Ibid.*, p. 56.
69 Bergson, H., “El Esfuerzo Intelectual”, p. 93, las cursivas son nuestras.
70 Poincaré, H., *Las ciencias y las humanidades*, p. 81.
71 Poincaré, H., “Invención Matemática”, pp. 46-47.

El mencionado movimiento de las imágenes se produce en la superficie de la conciencia donde está el hábito, la costumbre y lo inmediato. Por el contrario, el tránsito de lo profundo a lo superficial, es decir, el desarrollo del esquema que da paso a la invención no es inmediato. Comprendemos, en este sentido, coincidiendo con Gödel, que la intuición matemática "no proporciona conocimiento inmediato, sino que formamos nuestras ideas sobre la base de algo dado, que aquí no son las sensaciones"[72]. Lo dado, en matemáticas, está relacionado con los objetos abstractos contenidos en las ideas empíricas. Esto no implica que los datos sean subjetivos, sino que son de una clase diferente, un tipo de realidad entre el sujeto y su contexto.

El "proceso" por medio del cual una idea inicial confusa se materializa en símbolos o enunciados matemáticos es la intuición y ella requiere de un máximo esfuerzo, así llegamos a la invención. El matemático innovador concibe su idea inicial difusa gracias a un esfuerzo máximo intelectual, el cual ha sido "construido" durante mucho tiempo, lo lleva de la profundidad a la superficie, donde se materializa. Allí es aceptado por la comunidad académica e insertado en las teorías existentes.

Bibliografía

Aspray, W. y P. Kitcher (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988.

Bergson, H., "El Esfuerzo Intelectual", en: *La energía espiritual*, Buenos Aires: Cactus, 2015, p. 84-103.

Bergson, H., *Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia*, Salamanca: Sígueme, 1999.

Bergson, H., *Introducción a la metafísica y la intuición filosófica*, Buenos Aires: Ediciones Leviatán, 1956.

Bunge, M., *Intuición y Razón*, Buenos Aires: Editorial Sudamericana, 1996.

Chudnoff, E., "Intuition in Mathematics", en: Osbeck, L.M. y Held, B.S. (eds.), *Rational Intuition: Philosophical Roots, Scientific Investigations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2014, pp. 174-191. https://doi.org/10.1017/CBO9781139136419.010

Fischbein, E., *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*, Dordrecht: Reidel, 2002.

Fischbein, E., "Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning", en: *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1999), pp. 11-50. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_2

[72] Gödel, K., *Ensayos inéditos*., p. 111.

Gödel, K., *Ensayos inéditos*, Rodríguez, F. (ed.), Barcelona: Mondadori, 1994.

Gödel, K., *Obras completas*, Mosterín, J. (ed.), Madrid: Alianza, 2006.

Godlove, T., "Poincaré, Kant, and the Scope of Mathematical Intuition", en: *The Review of Metaphysics*, LXII, 4 (2009), pp. 779-801.

Goldfarb, W., "Poincaré against the Logicists", en: Aspray, W. y Kitcher, P. (ed.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota: University of Minnesota Press, 1988, pp. 61-81.

Hadamard, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Nueva York: Donver, 1954.

Heinzmann, G., y P. Nabonnand, "Poincaré: Intuitionism, Intuition, and Convention", en: van Atten, M. y otros (eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007). The Cerisy Conference*, 1ra edición, Basilea: Birkhäuser, 2008, pp. 163-177. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8653-5_11

Hersh, R., "Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey)", en: *Montana Mathematics Enthusiast*, VIII, 1/2 (2011), pp. 35-49. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1205

Husserl, E., *Investigaciones lógicas*, Madrid: Alianza, 1999.

Kant, I., *Crítica de la razón pura*, Madrid: Alfaguara, 1978.

Kitcher, P., *The nature of mathematical knowledge,* Nueva York: Oxford University Press, 1984.

Maddy, P., "Perception and Mathematical Intuition", en: *The Philosophical Review*, LXXXIX, 2 (1980), pp. 163-196. https://doi.org/10.2307/2184647

Mathieu, V., *Bergson. Il profondo e la sua espressione*, Napoli: Guida, 1971.

Peña-Páez, L.M., "El acto de invención como acto libre en la filosofía de Henri Bergson. Una aproximación desde el Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia", en: *Franciscanum*, LV, 160 (2013), pp. 135-161. https://doi.org/10.21500/01201468.833

Peña-Páez, L.M., "Consideraciones sobre la noción de intuición matemática", en: *Agora. Papeles De Filosofía*, XXXIX, 2 (2020), pp. 127-141. https://doi.org/10.15304/ag.39.2.6299

Poincaré, H., "Invención Matemática", en: *La Ciencia y El Método*, 1ra. edición, Madrid: Biblioteca de filosofía científica, 1910, pp. 42–62.

Poincaré, H., "La Intuición y la lógica en las matemáticas", en: *El Valor de La Ciencia*, 1964, pp. 1-9.

Poincaré, H., *Las ciencias y las humanidades*, Oviedo: Grafinsa, 2017.

Tieszen, R., *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2293-8

van Atten, M., y otros (eds.), *One hundred years of intuitionism (1907-2007). The Cerisy Conference*, 1ra edición, Basilea: Birkhäuser Basel, 2008. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8653-5

van Stigt, W.P., *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam: Elsevier Science, 1990.

Recepción: 28/10/2021
Aceptación: 06/09/2023