ARETÉ revista de filosofía

Vol. VII, Nº 2, 1995
pp. 227-243

Ferro y los procedimientos decisorios de la lógica

Diógenes Rosales Papa
Pontificia Universidad Católica del Perú

El artículo es un esbozo general de los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado tratados por Juan Bautista Ferro. Se inicia con una breve semblanza de Ferro. Luego trata el problema de la decisión, y presenta los procedimientos decisorios de Quine (QS, QL y QM), Georg H. Von Wright (VW), Bernays-Schönfinkel (BS), S.C. Kleene y el procedimiento decisorio Ferro-Herbrand (FH). Cada uno de estos métodos muestra el esfuerzo por reducir la lógica cuantificacional monádica de primer orden a la lógica proposicional; en este sentido, el método FH opera con mayores ventajas sobre los otros métodos.

Juan Bautista Ferro, maestro de lógica

Por sus investigaciones en la filosofía moderna y contemporánea, por su aporte a la lógica con el Procedimiento Decisorio FH (Ferro-Herbrand), Juan Bautista Ferro ocupa con justicia un sitial en la historia de la filosofía en el Perú, especialmente en el desarrollo de la lógica.

Durante el tiempo que regentó las cátedras de Lógica y Filosofía Moderna en la Facultad de Letras y Ciencias Humanas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Ferro se entregó íntegramente, no sólo desarrollando a cabalidad los respectivos programas, sino que, como asiduo estudioso e investigador, escudriñó y profundizó cada materia, temas que exponía en sus clases con fluidez, claridad y rigor. El desarrollo de cada una de sus clases se matizaba de humor e ingenio criollos. Cualquier oyente no sólo adquiría o afianzaba un cúmulo de conocimientos sino que disfrutaba de las cualidades histriónicas del expositor.

La personalidad de Juan Bautista Ferro impresionaba por la vastedad de los conocimientos que poseía, por ello posiblemente le gustaba hablar, porque no soportaba en su espíritu el revuelo de tantas cosas aprehendidas. Su mayor deleite era conversar de temas surgidos circunstancialmente, sobre conocimientos académicos o cualquier otro tema, en algunos casos aparentemente triviales, pero que él solía exponer de manera interesante y asombrosa. Había que disponer de un tiempo especial para escucharlo, porque su conversación, además de amena y atractiva, siempre era un derroche de sabiduría en los distintos campos de la ciencia u otro campo del quehacer humano. Cualquier persona que haya tenido la suerte de escucharlo, creo con seguridad, habrá quedado impresionado de sus conversaciones.

Como catedrático fue todo un ejemplo de puntualidad, disciplina y sapiencia. Su capacidad pedagógica se expresaba en la trasmisión de conocimientos claros y sencillos, pero de contenidos profundos que brotaban de un espíritu pleno de riqueza intelectual. En la vida académica que tuve en suerte compartir, Juan Bautista Ferro fue justo y severo, todo un modelo de un verdadero maestro.

Juan Bautista Ferro fue un filósofo interesado en la filosofía moderna, especialmente en el empirismo inglés, pero su pasión era la lógica contemporánea. Consideraba, y con razón, a la lógica como una ciencia poco difundida en el Perú, a pesar de que Francisco Miró Quesada Cantuarias fue el primero en introducir la lógica en Latinoamérica, particularmente en el Perú ya en 1945 y 1946. La poca difusión de la lógica en nuestro medio posiblemente motivó al maestro Ferro a dedicarse de lleno a esta ciencia que tanto amó. Entre los programas de estudio que aplicó, es de remarcar la presencia de un nuevo sistema lógico basado en la *Introducción a la lógica* de I. Copi. El tema central de la lógica que abordó fue el análisis de validez o invalidez de las inferencias sobre la base del análisis lógico del lenguaje, dando especial prioridad al manejo de las reglas lógicas y los procedimientos decisorios. Con mucha frecuencia reajustaba e innovaba su programa, preocupado siempre por el aprendizaje de sus oyentes. Por ejemplo, introdujo modificaciones sintácticas en la aplicación del contenido existencial en las inferencias de la lógica tradicional donde la conclusión expresa la existencia de elementos a partir de un universo vacío. Hoy facilita enormemente el uso del contenido existencial en el análisis de este tipo de inferencias por el método de los Diagramas de Venn, técnica que también usa en el Procedimiento FH.

El esfuerzo desplegado por Juan Bautista Ferro no ha sido gratuito, porque ha contribuido a la difusión de la lógica en el Perú. El programa que enseñó el maestro constituye el sistema básico de la lógica que generalmente se enseña en las universidades, institutos superiores, y desde 1982 se difunde en los programas de educación secundaria en el curso de Filosofía y Lógica.

Los procedimientos decisorios

Juan Bautista Ferro dio especial importancia a los procedimientos decisorios, porque consideró que uno de los objetivos centrales de la lógica matemática es decidir la validez o invalidez de las inferencias mediante técnicas algorítmicas, esto es, mediante operaciones fijas, precisas y comprensibles. Sobre este punto Quine sostiene: "El objetivo más importante de la lógica, en su aplicación a la ciencia y al discurso cotidiano, es la justificación y crítica de la inferencia. La lógica se ocupa en gran parte de la tarea de arbitrar técnicas para mostrar que un determinado enunciado 'se sigue lógicamente' o 'no se sigue lógicamente' de otro enunciado"[1]. Ferro, estudioso de Quine, comparte y continúa su trabajo en esta línea, admite que la base de la teoría de la inferencia en cuanto tal supone una compleja estructura conceptual y técnica, que constituye una importante área de investigación. "Y fue justamente dentro de esta área, dice Ferro, en que se produjeron los nuevos desarrollos, así como las grandes polémicas que habrían de aflorar en los estudios lógico-matemáticos del presente siglo"[2] área denominada desde entonces Lógica Moderna o Matemática, que en la actualidad constituye un campo muy amplio que incluye diversos tipos de problemas para las investigaciones.

Uno de estos problemas en un sistema formal es el *problema de la decisión o Entscheidungsproblem*. Según Hilbert y Herbrand, el *Entscheidungsproblem* es el problema fundamental de la lógica matemática. Para abordar este problema, Ferro parte de la cuestión: ¿cómo establecer de manera precisa o, mejor aún, cómo decidir si una determinada expresión del sistema es o no teorema del sistema? La tarea de buscar un procedimiento se inicia para responder esta pregunta; en otros términos, Ferro emprende la búsqueda de un algoritmo que pueda responder afirmativa o negativamente si una proposición es o no derivable en un sistema axiomático.

Por ejemplo, la interpretación semántica de una fbf[3], en la lógica bivalente, nos da como resultado o bien *verdadera* o bien *falsa*; sin embargo, existen fbfs que son *verdaderas* en cualquier interpretación posible, esto es, son universalmente válidas o lógicamente verdaderas. Entonces el problema se centra en encontrar un algoritmo que decida la validez o invalidez de las fórmulas lógicamente verdaderas. Este problema generó investigaciones que permitieron a los lógicos aprovechar una rama de la teoría de las funciones numéricas o teoría de las funciones recursivas, lo que condujo a aclarar los conceptos

1 Quine, Willard Van Orman, *Los métodos de la lógica*, trad. Manuel Sacristán, Barcelona: Ariel, 1967, p. 72.

2 Ferro, Juan Bautista, "Lógica y procedimientos decisorios" en: Miró Quesada, Francisco y otros, *Lógica: aspectos formales y filosóficos*, Lima: Fondo Editorial Universidad Católica, 1978, p. 46.

3 fbf: fórmula bien formada, es decir, secuencia de símbolos según las reglas de formación.

de *decidibilidad* y *computabilidad.* "Es así como, con el auxilio de la teoría de las funciones recursivas, el problema de la existencia o no existencia de procedimientos decisorios puede formularse rigurosamente como problema de pura computabilidad"[4].

En 1936 Church había demostrado la imposibilidad de un procedimiento decisorio para fórmulas cuantificacionales n-ádicas de primer grado; sin embargo, las fórmulas cuantificacionales monádicas de primer grado son decidibles. Con respecto de la decisión para la *derivabilidad* se demostró que, en un sistema axiomático consistente no se puede derivar una contradicción, esto es, no se puede derivar A y no-A a la vez; pero, en un sistema axiomático completo se puede derivar A o no-A, siempre que en A no figuren variables libres. Por su parte Gödel demostró que en un sistema logístico, como el de *Principia Mathematica* o el sistema axiomático Zermelo-Fraenkel-von Neumann, no es posible derivar por lo menos una fórmula válida, por lo tanto dicho sistema es incompleto.

En la lógica proposicional, el método de las tablas de verdad es un algoritmo para decidir la validez o invalidez de las fórmulas proposicionales, método ya usado por G. Frege en 1879 y como procedimiento decisorio en 1885 por Charles S. Peirce.

En la lógica cuantificacional monádica de primer grado existen procedimientos decisorios. En 1915 L. Löwenhein fue el primero en demostrar que las fórmulas cuantificacionales eran decidibles. Después aparecieron algoritmos cada vez más simples como los de T. Skolem y H. Behmann, de P. Bernays y M. Schönfinkel, de W. V. O. Quine, G.H. von Wright y de S. C. Kleene.

Juan Bautista Ferro, estudia y analiza las ventajas y desventajas de cada uno de estos procedimientos decisorios, para proponer luego el suyo. A continuación presentamos un breve esbozo de algunos algoritmos sustentados en su conocida tesis sobre *Procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado.*

Creo que, lo que más interesó a Ferro fueron los métodos de Quine; de él presenta los tres prodedimientos decisorios contenidos en *O Sentido da Nova Logica* (QS), *On the Logic of Cuantification* (QL)[5] y en *Methods of Logic* (QM).

---

[4] Ferro, Juan Bautista, *ibidem*, p. 54.

[5] Artículo aparecido en *Journal of Symbolic Logic*, 10 (1945).

El autor del método FH demuestra que QS es un procedimiento decisorio, aunque para Quine sólo es un "criterio mecánico" que permite decidir si las matrices que representan a una fórmula cuantificacional monádica son válidas. Detalladamente el autor de la tesis expone las instrucciones que deben seguirse[6] en el proceso de la demostración de validez o invalidez de la fórmula. En esencia, el método QS consiste en transformar una fórmula S a un equivalente S_1, donde S_1 debe tener sólo operadores '$\wedge$', '$\sim$' y sólo cuantificadores universales. Luego, el operando de cada cuantificador universal se debe unir mediante '$\wedge$' con una fórmula de la forma '$\sim(\Phi x \wedge \sim\Phi x)$' ("$\Phi$" es cualquier predicado), después se debe hallar la forma canónica de cada cuantificador. La forma canónica de cada cuantificador se obtiene eligiendo sólo los valores falsos del resultado después de haberse evaluado mediante las tablas de verdad a los operandos de cada cuantificador universal donde ya está incluida, en cada caso, la fórmula de la forma '$\sim(\Phi x \wedge \sim\Phi x)$'. La forma canónica será una conjunción de conjunciones negadas. En seguida se obtiene el equivalente de cada cuantificador universal, en este paso se aplica la regla de la distribución de cada cuantificador universal si es necesario. Finalmente se decide la validez de la fórmula construyendo su forma condicional '$\sim(A \wedge \sim C)$'. Para distinguir con cierta facilidad la validez o invalidez de la fórmula se sustituye cada símbolo predicativo por una variable proposicional, o en su defecto se somete a evaluación por las tablas de verdad.

La aplicación del método QS aparece detalladamente explicada en la tesis mediante abundantes ejercicios, pero en sí es un algoritmo muy tedioso, como lo afirma Ferro cuando dice: "El procedimiento QS es arduo y fatigoso, aun tratándose de esquemas monádicos relativamente simples, y así lo ha reconocido su autor"[7], motivo por el cual no es recomendable; incluso el mismo Quine no vuelve a tocar este método en ninguna de sus obras.

QL es el método decisorio que sigue al anteriormente mencionado. Este método se aplica sólo a fórmulas cuantificacionales básicas cerradas. En todo caso, se puede decidir mediante QL cualquier fór-

[6] Ferro, Juan Bautista, *Procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado*, Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 1966, Cap. 2, 2.5 y siguientes.
[7] *Ibidem*, p. 2.32.

mula cuantificacional monádica siempre que se pueda transformar en una fórmula cuantificacional básica.

El proceso de transformación de una fórmula no básica a una fórmula cuantificacional básica consiste en expulsar los operandos que no deben estar en las cuantificaciones, proceso que culmina en una fórmula disyuntiva, fórmula que expresa la alternativa de las operaciones efectuadas, primero como verdadero y luego como falso, a los operandos que no forman parte de las cuantificaciones. En la siguiente fase se construye una tabla de valores para los cuantificadores, esto es, se combinan los valores V y F para los cuantificadores sin negar. Si el resultado es válido, la fórmula es lógicamente verdadera, pero, si el resultado no es válido, se toma en cuenta sólo los valores falsos, y si cumple cada línea F con las siguientes condiciones, la fórmula es válida. a) Asigna F a una cuantificación básica cuyo operando es válido. b) Asigna V a una cuantificación básica cuyo operando es inconsistente o a varias cuantificaciones básicas, la conjunción de dichos operandos es inconsistente. c) Asigna V a una o más cuantificaciones básicas cuyo operando, o la conjunción de cuyos operandos, implica al operando de otra a la que se asigna F[8]. La fórmula original es válida si cada una de las líneas que resultaron falsas cumple por lo menos con una de esas tres condiciones[9].

De acuerdo a las características de las fórmulas cuantificacionales monádicas aparecen más reglas adicionales y condiciones que deben cumplir las fórmulas en ciertos pasos para el análisis de validez o invalidez. Con la claridad que lo caracteriza, Ferro demuestra la aplicación del método QL a un conjunto de fórmulas tipo, explicando paso a paso las secuencias seguidas[10]. Luego explica que este procedimiento está en proceso de evolución porque hay ciertas imprecisiones en la prueba de algunas fórmulas inconsistentes, de igual modo, QL tanto como QS no deciden fórmulas cuantificacionales con constantes individuales, salvo en algunos casos; sin embargo, QL a pesar de ser laborioso es menos operativo que QS. La simplicidad se manifiesta

[8] *Ibidem*, Cap. 3, 3.8 y 3.9.

[9] Estas condiciones se cumplen sólo para fórmulas cuyo resultado después de la evaluación veritativa no es inconsistente. Obviamente las fórmulas con resultados inconsistentes son lógicamente inválidas. QL demuestra también la invalidez de esta clase de fórmulas. *Ibidem*, véase, 3.10 y siguientes.

[10] *Ibidem*, véase 3.14 - 3.22.

especialmente en fórmulas condicionales, por ejemplo en fórmulas de silogismos categóricos.

En opinión de Ferro, Quine tampoco quedó satisfecho con el método QL, pero después culminará su técnica decisoria en *Methods of Logic* (QM). Indudablemente QM es un método que supera a QS y QL en precisión, claridad y elegancia, y resulta ser uno de los más prácticos entre las técnicas decisorias en uso hasta aquel entonces. A continuación esbozamos brevemente QM de la exposición hecha por el autor de FH[11].

El procedimiento decisorio QM es aplicable a tres clases de fórmulas cuantificacionales monádicas: a) a fórmulas uniformes cerradas "típicas" o esquemas "puros", b) a fórmulas "mixtas" y c) a fórmulas "atípicas".

La aplicación del método QM consiste, en primer lugar, en negar a cualquier fórmula S, luego, ~S se debe transformar a un esquema canónico (en el proceso de aplicarse las conocidas reglas de transformación deben eliminarse las variables indefinidas). Un esquema canónico o fórmula canónica debe ser:

i) La cuantificación existencial de un esquema abierto fundamental. Ejemplos:
$\exists F$, $\exists{\sim}F$, $\exists(F \wedge G)$, $\exists(F \wedge {\sim}G \wedge H)$[12]

ii) La negación de un esquema de la forma *i*. Ejemplos:
${\sim}\exists F$, ${\sim}\exists{\sim}F$, ${\sim}\exists(F \wedge G)$, ${\sim}\exists(F \wedge {\sim}G \wedge H)$

iii) La conjunción de dos o más esquemas de la forma *i*. Ejemplos:
$(\exists F \wedge \exists{\sim}F)$, $[\exists F \wedge \exists(F \wedge G)]$

iv) La conjunción de dos o más esquemas de la forma *ii*. Ejemplos:
$({\sim}\exists F \wedge {\sim}\exists{\sim}F)$, $[{\sim}\exists{\sim}F \wedge {\sim}\exists(F \wedge G) \wedge {\sim}\exists(F \wedge {\sim}G \wedge H)]$

v) La conjunción de dos o más esquemas de las formas *i* y *ii*. Ejemplos:
$(\exists F \wedge {\sim}\exists F)$, $[\exists(F \wedge G) \wedge {\sim}\exists(F \wedge {\sim}G \wedge H)]$

[11] *Ibidem*, Cap. 4, 4.1 y siguientes.

[12] He preferido usar los símbolos de los operadores lógicos más difundidos en la jerga lógica. Además, el mismo Quine cambia de notación en la cuarta edición de *Methods of Logic*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1982.

vi) La disyunción de dos o más esquemas de las formas del *i* al *v*. Ejemplos:
$[\exists F \vee \sim\exists(F \wedge G)]$, $[\exists F \wedge \exists(F \wedge G) .\vee. \sim\exists F \wedge \sim\exists\sim F]$

Sobre la validez, la demostración de Quine prosigue:

a) Los esquemas canónicos de las formas *i, ii* y *iii* son siempre consistentes.
b) Los esquemas de la forma *iv* son consistentes si y sólo si la expresión que resulta de borrar los cuantificadores es consistente.
c) Los esquemas de la forma *v* son consistentes si y sólo si ninguno de los operandos de las cuantificaciones no negadas implica composicionalmente a la disyunción de los operandos de las demás cuantificaciones.
d) Los de la forma *vi* son consistentes si y sólo si al menos uno de los miembros de la disyunción es consistente.

Como se puede apreciar, QM es una prueba de consistencia, esto es, si la fórmula original S es válida, ~S será inconsistente, pero si ~S es consistente, S es inválida. A continuación ilustramos la prueba QM tomando como ejemplo una fórmula que pertenece al modo *Bárbara* del silogismo tradicional.

1. $(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge (\forall x)(Hx \rightarrow Fx) .\rightarrow. (\forall x)(Hx \rightarrow Gx)$ S

Nótese, esta fórmula S pertenece a la clase de "esquemas puros" o básicos. Luego negando la fórmula se tiene:

2. $\sim[(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \wedge (\forall x)(Hx \rightarrow Fx) .\rightarrow. (\forall x)(Hx \rightarrow Gx)]$ ~S

Eliminando la variable "x" y aplicando las conocidas reglas lógicas de transformación, se obtiene el esquema canónico (EC):

3. $\sim\exists(F \wedge \sim G) \wedge \sim\exists(H \wedge \sim F) \wedge \exists(H \wedge \sim G)$ EC

Este EC es de la forma *v*. Para decidir si es o no consistente, vamos a probar si los operandos del cuantificador no negado implican o no a la disyunción de los operandos de los cuantificadores negados, como sigue:

4. $(H \wedge \sim G) .\rightarrow. (F \wedge \sim G) \vee (H \wedge \sim F)$
V V VF   V F FV   F   V F FV

Como se puede observar, el método de las tablas abreviadas nos muestra que hay implicación, lo que significa que ~S es inconsistente, y por lo tanto, S es válido.

El método QM decide también la validez o invalidez de las fórmulas mixtas. Una fórmula mixta es una fórmula pura o típica con añadido de fórmulas proposicionales. En este caso, después de negar la fórmula se transforma en un esquema básico o típico; para el efecto se le asigna los valores T y $\perp$ a cada una de las variables proposicionales, luego se sigue el proceso de reducción de la fórmula, lo que nos llevará a una de estas tres posibilidades:

a) Si se termina en T, S no es válido.
b) Si termina en $\perp$, S es válido.
c) Si termina en una forma canónica, se verá si es consistente o inconsistente. Si es inconsistente, S es válido.

A continuación un ejemplo:

1. $(\forall x)\ (Fx \wedge Gx)\ .\rightarrow.\ \sim p \vee (\exists x)Fx$ S

2. $\sim [\ (\forall x)\ (Fx \wedge Gx)\ .\rightarrow.\ \sim p \vee (\exists x)Fx\ ]$ ~S

3. $\sim\exists{\sim}F \wedge \sim\exists{\sim}G \wedge p \wedge \sim\exists F$

A partir de este esquema se efectúa la reducción asignándole primero T a 'p' y después $\perp$ también a 'p', como sigue:

a_1. $\sim\exists{\sim}F \wedge \sim\exists{\sim}G \wedge T \wedge \sim\exists F$ b_1. $\sim\exists{\sim}F \wedge \sim\exists{\sim}G \wedge \perp \wedge \sim\exists F$

a_2. $\sim\exists{\sim}F \wedge \sim\exists{\sim}G \wedge \sim\exists F$ EC b_2. $\perp$

a_3. $\sim F \wedge \sim G \wedge F$

La reducción del esquema 3 termina en un esquema canónico de la forma *iv* como aparece en a_2, y como ambas interpretaciones son inconsistentes, ~S es inconsistente y S es válido.

La aplicación de QM a la tercera clase de fórmulas o esquemas atípicos sigue casi la misma rutina anterior. Como la fórmula atípica incluye una fórmula proposicional bajo el dominio de un cuantificador, el objetivo es eliminar las fórmulas proposicionales, pero previamente se intercambia los cuantificadores universales por existenciales y transformando la fórmula sólo a operadores proposicionales "$\wedge$", "v" y "~", se obtiene una fórmula mixta. A partir de ésta se niega la fórmula y se siguen las mismas operaciones del ejemplo anterior.

Tanto el método QM como el QS y el QL, según Juan Bautista Ferro, son incapaces de garantizar las decisiones de fórmulas que contienen constantes individuales, además, siguen reduciéndose a ser métodos con operaciones fatigosas especialmente para fórmulas mixtas y atípicas; sin embargo, "QM es sin disputa el mejor de los procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado que Quine ha publicado"[13].

El otro procedimiento decisorio que aborda el maestro Ferro es el de Georg H. Von Wright (VW), método que aparece expuesto en su monografía "On the Idea of Logical Truth"[14]. La aplicación de VW sigue las instrucciones siguientes: a) intercambiar los cuantificadores universales por existenciales, b) obtener la forma normal disyuntiva perfecta de los operandos de los cuantificadores existenciales, c) construir la tabla de valores para los operandos de cada cuantificador existencial (en este paso debe añadirse a los operandos de cada cuantificador existencial una fórmula de la forma '$A \lor (\alpha_1 \land \sim\alpha_1) \lor (\alpha_2 \land \sim\alpha_2) \lor (\alpha_n \land \sim\alpha_n)$', de acuerdo al número de componentes de la fórmula, cuidando de no repetir variables idénticas), y d) la fórmula original será lógicamente verdadera cuando exprese la tautología de las proposiciones indicadas por los operandos del cuantificador existencial.

El método decisorio VW también resulta ser sumamente laborioso, por ejemplo en la fórmula siguiente:

$$(\exists x)\, Px \land (\exists x)Qx \land (\forall x)\, (Px \rightarrow \sim Qx) \land (\forall x)\, (Qx \rightarrow Rx).\rightarrow.(\exists x)(Rx \land \sim Px)$$

después de efectuar las operaciones correspondientes se obtiene una forma normal disyuntiva perfecta de siete conjunciones básicas, lo que significa siete operandos de siete cuantificadores existenciales distintos, por lo tanto la combinación de valores será de 2^7. Ferro sugiere modificar algunas operaciones juntando algunas reglas de procedimiento y finalmente sustituyendo los símbolos predicativos por variables proposicionales. Sin embargo, VW tiene los mismos defectos que QS, porque amplía engorrosamente la aplicación de las tablas de verdad, además, comparte con los métodos decisorios de Quine el no decidir fórmulas cuantificacionales monádicas con constantes individuales.

El procedimiento decisorio Bernays-Schönfinkel (BS) decide fórmulas cuantificacionales monádicas de primer grado en universos

[13] Ferro, Juan Bautista, *o.c.*, Cap. 4, 4.24.

[14] *Cf.*, *ibidem*, 5.1.

finitos e infinitos. Para ello, introduce la noción básica de "dominio de individuos y la determinación del número de individuos que ha de poseer un dominio"[15]. Para un número que existe exactamente, es decir "n" cantidad de individuos, se debe aplicar como regla general las siguientes equivalencias para los cuantificadores universal y existencial:

$R_1)$ $(\forall x)\ \Phi x \leftrightarrow (\Phi\alpha_1 \wedge \Phi\alpha_2 \wedge \ldots \wedge \Phi\alpha_n)$
$R_2)$ $(\exists x)\ \Phi x \leftrightarrow (\Phi\alpha_1 \vee \Phi\alpha_2 \vee \ldots \vee \Phi\alpha_n)$ ("α" es cualquier constante individual)

Después de aplicarse estas reglas, la fórmula resultante ha de someterse al método de las tablas de verdad. Si el resultado es una tautología, la fórmula será válida en un universo en el que existe exactamente "n" cantidad de individuos.

El método BS aplicado de este modo es incompleto, como es obvio imaginar; es imposible probar la *validez universal* de una fórmula S, dado que tendría que demostrarse la validez de S en cada dominio de individuos, esto es, en un universo de exactamente un solo individuo, en un universo con existencia exacta de dos individuos, y así sucesivamente en un universo en el que existe exactamente "n" cantidad de individuos.

El problema de la validez universal de una fórmula S se soluciona mediante el teorema de Bernays y Schönfinkel, que puede enunciarse así: "si k es un número de letras predicativas que exhibe una fórmula monádica de primer grado, ésta es válida para todo dominio de individuos si y sólo si lo es para un dominio compuesto por 2^k individuos"[16]. Con el añadido de este teorema, el método BS puede decidir la validez o invalidez de una fórmula S en un *universo infinito.*

El método BS, a diferencia de los métodos comentados anteriormente, es un método directo y sencillo, aunque con el inconveniente de ser muy laborioso al aplicarse la evaluación por tablas de verdad. En su comentario, el autor de la tesis explica una simplificación o abreviación de BS, lo que significaría reducir el número de individuos respecto a 2^k, pero esto violaría el principio expresado en el teorema antes mencionado, y constituiría otro procedimiento decisorio.

[15] *Ibidem*, 6.1.
[16] *Ibidem*, 6.5.

En su análisis en pos de un procedimiento decisorio más conveniente, Juan Bautista Ferro también aborda el método de Kleene, procedimiento vinculado con el teorema de Bernays y Schönfinkel. Para Kleene, una fórmula predicativa elemental n-ádica es diferente de una variable proposicional, "de manera que una fórmula predicativa elemental no puede ser sustituida directamente por V o F (valores proposicionales), sino por funciones de n-variables sobre un dominio"[17] 'r', donde 'r' es cualquier número positivo entero. "Para cada fórmula elemental habrá entonces $2(r^n)$ funciones de esta naturaleza".

El procedimiento de Kleene decide fórmulas cuantificacionales monádicas de primer grado, donde están incluidas variables proposicionales y/o variables libres y/o constantes individuales. El método consiste en elaborar una tabla de valores para una fórmula S. Previamente a la evaluación de valores, se debe determinar los valores de la función lógica 'l ι (x)' sobre la base de 2^k que constituyan el dominio de 'x'. Después de establecer los valores de cada línea o arreglo, S será lógicamente verdadera si y sólo si todas las líneas o arreglos de su tabla son verdaderos[18].

Después de analizar el procedimiento de Kleene sobre la base de un conjunto de ejemplos, Ferro advierte que este método no es realmente utilizable y práctico, por ser agobiante la secuela de operaciones que sus reglas prescriben; sin embargo aprecia la ingeniosa concepción de las funciones lógicas, además del tratamiento de las variables libres "y su potencial aplicabilidad a fórmulas que ostenten constantes individuales"[19].

El procedimiento decisorio FH

En vista de que los procedimientos decisorios comentados resultan ser operativamente complejos o incompletos porque no pueden decidir fórmulas cuantificacionales monádicas de primer grado que contengan constantes individuales, Juan Bautista Ferro, siguiendo la demostración de Herbrand, propuso un nuevo procedimiento decisorio

[17] *Ibidem*, 7.2 y 7.3.

[18] Creo innecesario reproducir la secuencia de instrucciones sobre la combinación de valores, en todo caso véase Ferro, *o.c.*, 7.4.

[19] *Ibidem*, 7.15.

denominado FH (Ferro-Herbrand). Al igual que los procedimientos anteriores, FH es un algoritmo que decide la validez o invalidez de cualquier fórmula cuantificacional monádica de primer grado, es decir que, con la enorme ventaja de su simplicidad operativa, FH se puede aplicar a toda fórmula cuantificacional monádica de primer orden, básica o no básica (las fórmulas no básicas son las que contienen variables libres, fórmulas proposicionales y/o constantes individuales, o fórmulas en forma normal prenex con prefijo propio). En este sentido FH cumple el objetivo de su autor, esto es, la utilidad y familiaridad de una técnica decisoria en la enseñanza de un curso de lógica elemental o de nivel medio[20].

El método FH consiste en la transformacón de una fórmula cuantificacional monádica básica S a otra que es su equivalente S_n, donde S_n, generalmente, es una forma normal conjuntiva. S será válida si y sólo si S_n es lógicamente verdadera. En el proceso de la transformación se debe tomar en cuenta las siguientes reglas:

i) Dada una fórmula S, transformar a una equivalente S_1 donde S_1 contenga sólo operadores '$\wedge$' '$\vee$' y/o '$\sim$', además de cuantificadores. '$\sim$' sólo debe afectar símbolos predicativos.

ii) En S_1 se introducen constantes individuales diferentes para los operandos de cada cuantificador universal, a la vez los operandos de cada cuantificador existencial llevarán disyuntivamente las constantes individuales de los cuantificadores universales. En este paso desaparecen los cuantificadores y las variables indefinidas.

iii) No se alteran las variables proposicionales que S_1 exhibe.

iv) Aplicar cualquier método de la lógica proposicional para determinar si la fórmula S_n es o no válida[21].

Para ilustrar la aplicación de estas reglas usaremos el mismo ejemplo que para el método QM (véase *supra*); esto es, demostramos a continuación la validez de un silogismo tradicional del modo *Bárbara*:

1) $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge (\forall x)\ (Hx \rightarrow Fx) .\rightarrow. (\forall x)\ (Hx \rightarrow Gx)$ S

Aplicándose las reglas de transformación para cumplir con la regla *i*, se tiene:

[20] *Ibidem*, p. iii.

[21] *Ibidem*, 8.2.

2) $(\exists x)(Fx \wedge \sim Gx) \vee (\exists x)(Hx \wedge \sim Fx) \vee (\forall x)(\sim Hx \vee Gx)$ S_1

Como en S_1 sólo hay un cuantificador universal, según la regla *ii* se introduce una sola constante individual [a/$\forall$x)]. Las 'x' de los operandos de los cuantificadores existenciales serán sustituidas sólo por 'a'. Eliminando los cuantificadores, se tiene:

3) $(Fa \wedge \sim Ga) \vee (Ha \wedge \sim Fa) \vee (\sim Ha \vee Ga)$ S_2

S_2 es una fórmula que se puede decidir por cualquier método de la lógica proposicional. En este caso, aplicando la regla de la absorción, podemos reducirla a una disyunción básica, así:

4) $Fa \vee \sim Fa \vee \sim Ha \vee Ga$ S_3

Como se puede observar, S_3 es una disyunción básica tautológica, porque contiene la ley del tercio excluido. Ahora, como en el proceso de transformación de S a S_3 se ha aplicado sólo reglas equivalentes de transformación, S_3 es equivalente de S, por lo tanto S es válida.

A continuación vamos a aplicar el método FH a una fórmula cuantificacional monádica no básica que contiene una fórmula proposicional y una constante individual:

1) $(\forall x) [Fx \wedge Ga .\rightarrow. \sim p \vee (\exists y)Fy]$ S

Aplicando la regla *i* se tiene:

2) $(\forall x) [\sim Fx \vee \sim Ga \vee \sim p \vee (\exists y)Fy]$ S_1

Ahora, aplicando las reglas *ii* y *iii* se obtiene:

3) $\sim Fb \vee \sim Ga \vee \sim p \vee Fa \vee Fb$ S_2

Vemos que S_2 es tautológica, por lo tanto S es válida. Siguiendo las mismas operaciones de rutina, FH puede decidir la validez o invalidez de cualquier fórmula cuantificacional monádica de primer orden.

El método FH, a diferencia de los métodos decisorios comentados, permite o no obtener directamente la tautología del equivalente de la fórmula original, no requiere necesariamente usar el método tabular o *"truth function"*, como sí ocurre con los métodos de Quine, especialmente en QS, donde se producen operaciones tabulares con sus respectivas ramificaciones, o en los procedimientos decisorios de Von Wright, Bernays-Schönfinkel o de Kleene, donde la combinación del número de variables y sus respectivas operaciones de acuerdo a sus reglas son enormes y muy laboriosas. El método QM, a pesar de ser el más efectivo y elegante, tiene ramificaciones y operaciones fatigosas. En este sentido, FH tiene la virtud de usar operaciones sencillas y simplificar los resultados, cuyo reconocimiento de validez o invalidez de las fórmulas resultantes no requieren de la *"truth function"*.

Sin embargo, el método QM no requiere reglas adicionales para demostrar la validez de inferencias de la lógica tradicional cuando se obtiene la conclusión particular o existencial a partir de un conjunto de premisas universales. En cambio FH necesita una regla adicional, regla del *contenido existencial*, para demostrar la validez de inferencias con la característica mencionada. Creo que QM es el único método decisorio que ostenta ese privilegio. Para ilustrar esta distinción, vamos a aplicar, primero QM y después FH, a una relación válida por subalternación, según el cuadro tradicional de la oposición.

1) $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$ S

Luego, negando S y aplicando las reglas de transformación se obtiene el siguiente esquema canónico de la forma *iv*:

2) $\sim\exists(F \wedge \sim G) \wedge \sim\exists(F \wedge G)$ EC

Ahora, borrando los cuantificadores se tiene:

3) $F \wedge \sim G \wedge F \wedge G$

Vemos que 3 es inconsistente. Como 3 se ha obtenido a partir de '~S', entonces '~S' es inconsistente, por lo tanto 'S' es válida. En todo el procedimiento se ha aplicado únicamente las reglas estipuladas por QM (*Supra,* véase reglas de QM).

Aplicando FH al mismo ejemplo, se tiene:

1) $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$ S

Efectuando la transformación correspondiente según la regla *i*, se tiene (*Supra,* véase reglas de FH):

2) $(\exists x)\ (Fx \wedge \sim Gx) \vee (\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$ S_1

En este paso se introduce el contenido existencial eligiendo el símbolo predicativo que se repite idénticamente entre los operandos de los cuantificadores existenciales. En este caso, el contenido existencial es '$(\exists x)$ Fx'. Para la demostración respectiva, el contenido existencial debe implicar a toda la fórmula 3, como sigue:

3) $(\exists x)\ Fx\ .\rightarrow.\ (\exists x)\ (Fx \wedge \sim Gx) \vee (\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$ $\quad S_0$

Luego, las reglas de FH proceden como si 3 fuera una fórmula S. Nuevamente transformando S_0 según la regla *i*, se llega a:

4) $(\forall x) \sim Fx \vee (\exists x)\ (Fx \wedge \sim Gx) \vee (\exists x)\ (Fx \wedge Gx)$ $\quad S_1$

Introduciendo la constante individual según *ii*, se tiene:

5) $\sim Fa \vee (Fa \wedge \sim Ga) \vee (Fa \wedge Ga)$ $\quad S_2$

Simplificando mediante la regla de la absorción, se obtiene la siguiente disyunción básica:

6) $\sim Fa \vee \sim Ga \vee Ga$

La fórmula 6 es tautológica, por lo tanto S es válida. Para inferencias con contenido existencial, QM resulta ser menos operativo y más elegante que FH.

Por otra parte, ninguno de los procedimientos que Juan Bautista Ferro previamente reseña tiene una fundamentación ontológica, pero sí una justificación mediante reglas mecánicas conocidas en la lógica de primer orden. Por ejemplo, la regla *ii* de FH supone las propiedades de un cuantificador universal que incluye las propiedades de los cuantificadores existenciales, por ello, si hay un solo cuantificador universal y n-cuantificadores existenciales, al aplicarse *ii* se introduce una sola constante individual. A la vez nos hace pensar, que si hay más de un cuantificador universal, cada cuantificador existencial comparte alternativamente la propiedad que posee cada cuantificador universal.

Los procedimientos decisorios han permitido además simplificar las fórmulas cuantificacionales monádicas de primer grado, reduciéndolas a fórmulas de la lógica proposicional. En este aspecto, el método Ferro-Herbrand opera claras ventajas sobre los otros procedimientos.