ARETE revista de filosofía
Vol. IX, Nº 2, 1997
pp. 253-269

Sobre un sistema paraconsistente

Oscar Masaveu
Potomac State College of West Virginia University

El presente trabajo es un resumen de los resultados preliminares obtenidos por el autor en el marco de un estudio sistemático de sistemas modales y deónticos de base paraconsistente. Se exponen consideraciones sobre la no-trivialidad y sus diferencias con el concepto de consistencia. Se da una exposición sobre algunas de las razones por las cuales una base paraconsistente es la más natural para lógicas deónticas y afines.

This paper summarizes the preliminary results of the A.'s systematic study of modal and deontic systems with a paraconsistent basis. Some considerations on the meaning of "non-triviality" and its differences with the concept of consistency are expounded. The A. argues in favour of the reasons why paraconsistent basis is the most natural one for deontic and other similar logics.

El presente trabajo es un resumen de los resultados preliminares obtenidos por el autor en el marco de un estudio sistemático de sistemas modales y deónticos de base paraconsistente. Expondremos además de resultados puramente técnicos algunas consideraciones sobre el significado de la no-trivialidad y sus diferencias con el concepto de consistencia. Daremos también una exposición de las razones por las cuales una base paraconsistente es la más natural para lógicas deónticas y otras afines. Tratándose de un resumen, muchas demostraciones serán sólo bosquejadas, otras serán omitidas, sobre todo si son muy similares a los resultados de la lógica clásica.

1. *No-trivialidad y consistencia*

Recordemos que un sistema se llama inconsistente si en él es posible derivar una contradicción. En caso contrario el sistema se llama consistente. El sistema se llama trivial si en él se puede derivar cualquier fórmula expresable dentro de él. De otra forma el sistema es no-trivial.

Como se sabe, Newton C. A. da Costa demostró con sus trabajos que los conceptos de no-trivialidad y consistencia no son coincidentes. De hecho, hay sistemas como los C_n (descritos en da Costa [1]) para los cuales existen conjuntos inconsistentes de fórmulas que son no-triviales. Así se inició todo un campo fructífero de investigación. Sin embargo, hasta donde sabemos, sorprendentemente no se ha dado la importancia necesaria a un aspecto que ni siquiera (hasta donde hemos podido determinar) ha sido tratado. Se sabe que todo conjunto de fórmulas es trivializable, es decir que puede convertirse en un conjunto trivial agregando un conjunto (tal vez vacío o inifinito) de fórmulas a él. En caso de ser trivializable mediante un conjunto finito de fórmulas decimos que el conjunto es finitamente trivializable. Creemos que se ha descuidado el hecho de que la lógica clásica no sólo identifica inconsistencia con trivialidad. De hecho, también identifica el ser trivializable con el ser finitamente trivializable. Esto es consecuencia de las propiedades impuestas a la implicación material para los principios lógicos clásicos. Una de esas propiedades hace coincidir inconsistencia con trivialización, pero la inconsistencia siempre se puede lograr mediante un conjunto finito (en realidad con a lo más una fórmula). Este hecho es la base del teorema de compacidad. Un conjunto de fórmulas es consistente si y sólo si cada subconjunto finito de él es consistente. Sin embargo, el resultado análogo para la no-trivialidad no es válido.

Metateorema: No es válido el siguiente resultado:

Un conjunto de fórmulas es no-trivial si cada subconjunto finito de él es no-trivial[1].

Prueba. Consideremos al conjunto C_ω de da Costa que es el conjunto de las consecuencias mediante *modus ponens* del siguiente conjunto de (esquemas de) axiomas:

$\{A \to (B \to A), (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)),$
$(A \wedge B) \to A, (A \wedge B) \to B, A \to (B \to (A \wedge B)),$
$A \to (A \vee B), B \wedge (A \vee B), (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to$
$C)), A \vee \neg A, \neg\neg A \to A\}$

Se sabe, ver da Costa [2], que C_ω no es finitamente trivializable, pero es trivializable. Sea Δ un conjunto (infinito) de fórmulas que trivializa a C_ω. Así

$$\varepsilon = C_\omega \cup \Delta$$

es trivial, pero ningún subconjunto finito de él es trivial. En efecto, sea ε' un subconjunto (finito) de ε. ε' sólo puede incluir a un subconjunto finito Δ' de Δ. ε' no puede ser trivial ya que es subconjunto de

$$C_\omega \cup \Delta'$$

el cual, por no ser C_ω finitamente trivializable, no es trivial[2].

Por esto, y por los resultados posteriores que presentaremos, creemos que a veces es preferible usar una base finitamente trivializable. De ahí nació nuestra búsqueda de una base adecuada. Durante el

[1] Más aún, la prueba de este metateorema puede generalizarse para probar: "Un sistema finitario es finitamente trivializable si existe en él algún conjunto finito finitamente trivializable".

[2] De la nota al pie de página anterior se desprende que en particular la existencia de un conjunto finito trivial hace que el sistema sea finitamente trivializable.

verano obtuvimos dos pruebas diferentes de la decidibilidad de los sistemas B_n de Martin Bunder. Usamos para ello los métodos de modelos de Kripke y valorizaciones. El mismo resultado fue obtenido poco después, en forma independiente, por W. A. Carnielli mediante el método de propiedades de consistencia. Dichos resultados se hallan en Carnielli y Masaveu [1]. El desarrollo de dicho problema hizo que nos interesáramos primero en los modelos de Kripke y a través de ellos en problemas modales. En segundo lugar nos llevó a buscar un candidato razonable que guarde la misma relación con respecto a los B_n que C_ω guarda respecto de los C_n. La búsqueda dio como fruto un posible B_ω, pero más que eso dio una alternativa al sistema C_ω, alternativa que a pesar de ser finitamente trivializable guarda en cierto sentido las mismas relaciones respecto de los C_n e inclusive tiene esencialmente los mismos teoremas de C_ω (cuando nos restringimos al lenguaje de C_ω). Una particularidad de ser finitamente trivializable es que siempre es posible definir una negación fuerte (en el sentido de da Costa) lo cual hace posible usar el sistema como base para lógicas modales y deónticas. Hacemos la salvedad de que para uniformizar los resultados que obtenemos con los de da Costa y Bunder, facilitando así las comparaciones, llamaremos negación fuerte a un operador que definiremos —a pesar de que creemos que en realidad no es una negación sino que se trata de un concepto muy distinto, como veremos en su momento.

2. *El Sistema P*

Nuestro sistema *P* posee como símbolos primitivos a:

- las variables proposicionales: P_1, P_2, P_3...
- los símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ (con su significado usual)
- los símbolos: T (certeza), $\perp$ (irrealizabilidad), (,)

Definición 2. 1. Las variables proposicionales y los símbolos T y $\perp$ constituyen las fórmulas atómicas.

Las fórmulas se definen recursivamente de acuerdo con las siguientes cláusulas:

(i) Toda fórmula atómica es una fórmula.

(ii) Si A y B son fórmulas también lo son $(A) \vee (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$ y $\neg(A)$

(iii) Nada más que lo especificado por las cláusulas (i) y (ii) constituye una fórmula.

Como es costumbre, muchos de los paréntesis superfluos serán omitidos. Además $A \leftrightarrow B$ abreviará a

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

También, cuando exista la posibilidad de elección, convendremos en que $\rightarrow$ será el operador principal. De esa forma $A \rightarrow A \vee B$ abreviará a $A \rightarrow (A \vee B)$ y no a $(A \rightarrow A) \vee B$.

El resultado de substituir algunas (quizás ninguna) aparición de B en A por C se abreviará A[B/C].

La regla de inferencia de *P* es *modus ponens*:

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

Sus axiomas son:

1) T
2) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
3) $A \wedge B \rightarrow A$
4) $A \wedge B \rightarrow B$
5) $A \rightarrow A \vee B$
6) $B \rightarrow A \vee B$
7) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
8) $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
10) $\neg\neg A \rightarrow A$
11) $\perp \rightarrow B$
12) $(A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$
13) $((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow A$

Pensamos en $\perp$ como representando el concepto de irrealizabilidad, es decir, la no-satisfacibilidad absoluta. Así $A \rightarrow \perp$ dice que A no es satisfacible. Todos los axiomas son entonces plausibles y queda clara la diferencia con la mera negación. Si se desea, se puede pensar que T abrevia a $\bot \to \bot$; para los fines de investigar los alcances de los axiomas que tenemos en mente, puede ser útil tener a T como símbolo primitivo.

Definición 2.2. $\neg^* A$ abrevia a $A \to \bot$

Teorema 3.3. P es estrictamente más débil que la lógica proposicional clásica. En particular los siguientes esquemas no son válidos en *P*:

- $A \wedge \neg A \to B$
- $A \wedge \neg A \to \bot$
- $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
- $(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \leftrightarrow \neg B)$
- $\neg A \to (A \to \bot)$
- $(A \leftrightarrow B) \to (D[C/A] \leftrightarrow D[C/B])$[3]
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg^*(A \wedge \neg A)$
- $A \to \neg\neg A$

al igual que los demás esquemas del teorema 2 en da Costa [1].

Prueba. Las matrices trivalentes[4] de da Costa, con valores designados 1 y 2, dan valores designados a los teoremas de *P*, pero no a los esquemas señalados.

Teorema 2.4. (Teorema de la deducción) Sea Γ un conjunto de fórmulas entonces:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash_P B^5 \quad \text{ssi} \quad \Gamma \vdash_P A \to B$$

Prueba: Consecuencia inmediata de que la única regla de *P* es *modus ponens* y del hecho de que los esquemas (2) y (9) son válidos para *P*.

Teorema 2.5. Los siguientes esquemas son válidos en *P*:

(i) $A \wedge \neg^* A \to B$

[3] Todos los anteriores tomarían a *P* en un sistema clásico.

[4] Ver el apéndice.

[5] $\Gamma \vdash_P$ significa es derivable a partir de Γ en *P*

(ii) $\neg^*(A \wedge \neg^*A)$

(iii) $\neg^*A \rightarrow \neg A$

(iv) $\neg^*\neg^*A \leftrightarrow A$

(v) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg^*B \rightarrow \neg^*A)$

(vi) $\neg^*(A \wedge B) \leftrightarrow \neg^*A \vee \neg^*B$

(vii) $\neg^*(A \vee B) \leftrightarrow \neg^*A \wedge \neg^*B$

(viii) $A \vee \neg^*A$

(ix) $A \vee \neg A$

(x) $\neg(A \wedge \neg^*A)$

Prueba. Probaremos sólo algunos esquemas a manera de ilustración:

(i) $A \wedge \neg^*A \vdash A,\ A \rightarrow \bot$

$A \wedge \neg^*A \vdash \bot,\ \bot \rightarrow B$

$A \wedge \neg^*A \rightarrow B$ (Teorema 2.4)

(ii) Por (i) $A \wedge \neg^*A \rightarrow \bot$

es decir $\neg^*(A \wedge \neg^*A)$

(iii) Es simplemente (12)

(v) Probaremos sólo $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg^*B \rightarrow \neg^*A)$

$A \rightarrow B, \neg^*B \vdash A \rightarrow B, B \rightarrow \bot$

$A \rightarrow B, \neg^*B, A \vdash \bot$

$A \rightarrow B, \neg^*B \vdash A \rightarrow \bot$ (Teorema 2.4)

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg^*B \rightarrow \neg^*A)$ (Teorema 2.4)

(viii) $\neg^*(A \wedge \neg^*A)$, por (ii) luego:

$\neg^*A \vee \neg^*\neg^*A$, por (vi) y de ahí

$A \vee \neg^*A$ por (iv)

(ix) $A \vee \neg A$, por (viii) y (iii).

El teorema 2.5 muestra que $\neg^*$ constituye lo que da Costa llama una negación clásica.

Daremos ahora una semántica para *P* y probaremos que *P* es decidible.

Definición 2.6. Una valorización (para *P*) es una función v del conjunto de fórmulas en {0,1} que cumple con:

(i) $v(A \wedge B) = \text{Min}\ (v(A), vB))\}$

(ii) $v(A \rightarrow B) = \max\ (v(A), v(B))$

(iii) $v(A \rightarrow B) = 1$ sii $v(A) = 0$ ó $v(B) = 1$

(iv) Si $v(A) = 0$ entonces $v(\neg A) = 1$ y $v(\neg\neg A) = 0$

(v) $v(T) = 1$ y $v(1) = 0$

Aun cuando no probaremos este hecho aquí, si omitimos (v) obtendríamos una definición de valorización adecuada para C_ω con la cual se podría probar el resultado de Fidel: C_ω es decidible. No sabemos si la prueba original de Fidel sigue líneas similares, aun cuando una observación de da Costa en [2] parece indicar que usó métodos algebraicos.

Definición 2.7. $\Gamma \models A$ sii $v(A) = 1$ para toda valorización v tal que $v(B) = 1$ para toda fórmula B de Γ.

En particular $\models A$ sii $v(A) = 1$ para toda valorización.

Teorema 2.8. Si $\Gamma \vdash_P A$ entonces $\Gamma \models A$.

Prueba. Sea v una valorización tal que $v(B) = 1$ para toda fórmula B de *P*. Si $\Gamma \vdash_P A$, hay tres casos posibles

(i) A pertenece a Γ, en cuyo caso $v(A) = 1$

(ii) A es un axioma de *P*, en cuyo caso se puede verificar que $v(A) = 1$. Nosotros lo verificaremos para (10) y (13) a manera de ejemplos:

Para (10): Supongamos $v(\neg\neg A \rightarrow A) = 0$

Se tiene entonces $v(\neg\neg A) = 1$ y $v(A) = 0$ por la cláusula (iii) de la definición 2.6, luego, por la cláusula (iv), $v(\neg\neg A) = 0$ que es una contradicción.

Para (13): Supongamos $v(((A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow A) = 0$ se tiene entonces $v((A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) = 1$ y $v(A) = 0$ pero como $v(\bot) = 0$, tendremos $v(A \rightarrow \bot) = 0$ de modo que $v(A) = 1$, una contradicción.

(iii) A se deduce por *modus ponens* de B y $B \rightarrow A$, que son demostrables a partir de Γ en *P* (por lo tanto para ellas puedo asumir ya demostrado que $v(B) = 1$ y $v(B \rightarrow A) = 1$). Por la cláusula (iii) de la definición 2.6 $v(A) = 1$.

De esta forma en cualquier caso posible: Si $\Gamma \vdash_P A$ entonces v(A) = 1. De acuerdo con la definición 2.7: $\Gamma \models A$.

Definición 2.9.

(i) Dado un conjunto (de fórmulas) Γ de *P*, Γ es no-trivial si hay al menos una fórmula B tal que $\Gamma \nvdash_P B$ (B no es derivable a partir de Γ en *P*).

(ii) Un conjunto Γ (de fórmulas) es trivial si no es no-trivial.

(iii) Un conjunto Γ (de fórmulas) es maximal-no-trivial si Γ es no-trivial y sea cual fuere la fórmula A, que no pertenezca a Γ, $\Gamma \cup \{A\}$ es trivial.

Teorema 2.10. Dado un conjunto no-trivial Γ existe un conjunto maximal-no-trivial Δ que lo contiene.

Prueba. Definamos $\Delta_0 = \Gamma$, tomemos una enumeración A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de las fórmulas de *P* (cualquiera, pero fija). Definamos inductivamente a Δ_{n+1} como sigue:

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n & \text{si } \Delta_n \cup \{A_n\} \text{ es trivial} \\ \Delta_n \cup \{A_n\} & \text{si } \Delta_n \cup \{A_n\} \text{ es no-trivial} \end{cases}$$

En cualquier caso Δ_n es no-trivial para $n \geq 0$. Además $\Gamma = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \Delta_n \subset \ldots$

Tomemos Δ como la reunión de todos los Δ_n, formalmente:

$$\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$$

Probaremos que Δ es maximal-no-trivial (que $\Gamma \subset \Delta$ es obvio).

Supongamos que Δ es trivial, en ese caso $\Delta \vdash \bot$ (o cualquier otra cosa). Pero como en toda prueba se usa sólo una cantidad finita de elementos de Δ, habrá algún $n_0 \geq 0$ tal que Δ_{n_0} contiene todos esos elementos. Así $\Delta_{n_0} \vdash \bot$ pero entonces por el Axioma (11) Δ_{n_0} sería trivial, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que A no pertenece a Δ pero que $\Delta \cup \{A\}$ es no-trivial. Como A es una fórmula de *P*, aparece en la enumeración dada, digamos que es la fórmula A_{n_1}. Pero

$$\Delta_{n_1} \cup \{A\} \subset \Delta \cup \{A\},$$

por lo tanto $\Delta_{n_1} \cup \{A\}$ es también no-trivial. De esa forma $\Delta_{n_1}+1 = \Delta_{n_1} \cup \{A\}$. Como $\Delta_{n_1}+1 \subset \Delta$ tendríamos $A \varepsilon \Delta$, que es una contradicción. Así Δ es maximal-no-trivial e incluye a Γ.

Teorema 2.11. Si Γ es un conjunto maximal-no-trivial entonces

(i) $A \wedge B \varepsilon \Gamma$ sii $A \varepsilon \Gamma$ y $B \varepsilon \Gamma$
(ii) $A \vee B \varepsilon \Gamma$ sii $A \varepsilon \Gamma$ ó $B \varepsilon \Gamma$
(iii) $A \rightarrow B \varepsilon \Gamma$ sii $A \notin \Gamma$ ó $B \varepsilon \Gamma$
(iv) Si $A \notin \Gamma$ entonces $\neg A \varepsilon \Gamma$ y $\neg\neg A \notin \Gamma$
(v) $T \varepsilon \Gamma$, $\perp \notin \Gamma$

Prueba. Probaremos primero que siendo Γ maximal-no-trivial: $\Gamma \vdash_P A$ entonces $A \varepsilon \Gamma$. En primer lugar $\Gamma \cup \{A\}$ no es trivial. Si lo fuera: $\Gamma \cup \vdash \{A\} \vdash_P B$, para cualquier fórmula B.
Por lo tanto $\Gamma \vdash_P A \rightarrow B$, y como $\Gamma \vdash_P A$, tendríamos $\Gamma \vdash_P B$ y Γ sería trivial. Como $\Gamma \cup \{A\}$ es no-trivial y Γ es maximal-no-trivial, se tiene $A \varepsilon \Gamma$.

El resto de la prueba es rutina; probaremos sólo parte de (iii) y (iv) como ejemplo:

Para (iii): (Probaremos sólo: Si $A \notin \Gamma$ ó $B \varepsilon \Gamma$ entonces $A \rightarrow B \varepsilon \Gamma$).

Supongamos $B \varepsilon \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_P B$, y por el axioma (2) y la observación hecha más arriba, obtenemos sucesivamente

$$\Gamma \vdash_P B \rightarrow (A \rightarrow B),\ \Gamma \vdash_P A \rightarrow B,\quad A \rightarrow B \varepsilon \Gamma$$

Supongamos $A \notin \Gamma$ por el teorema 2.5 (viii) $\Gamma \vdash_P A \vee \neg^* A$, por la observación: $A \vee \neg^* A \;\varepsilon\; \Gamma$. Por la parte (i) del presente teorema, $\neg^* A \;\varepsilon\; \Gamma$, es decir, $A \rightarrow \bot \;\varepsilon\; \Gamma$. De esa forma $\Gamma \vdash_P A \rightarrow \bot$, $\Gamma, A \vdash_P \bot$ y así por el axioma (11) $\Gamma \cup \{A\} \vdash_P B$ y finalmente $\Gamma \vdash_P A \rightarrow B$ por lo cual $A \rightarrow B \;\varepsilon\; \Gamma$.

Para (iv): (Probaremos sólo: Si $A \not\in \Gamma$ entonces $\neg\neg A \not\in \Gamma$)

Supongamos $\neg\neg A \;\varepsilon\; \Gamma$, así $\Gamma \vdash_P \neg\neg A$. Por el axioma (10): $\Gamma \vdash_P \neg\neg A \rightarrow A$, así $\Gamma \vdash_P A$ y $A \;\varepsilon\; \Gamma$.

Teorema 2.12. (Teorema de compleción). Si $\Gamma \models A$ entonces $\Gamma \vdash_P A$.

Prueba. Supongamos $\Gamma \not\vdash_P A$ entonces $\Gamma \cup \{\neg^* A\}$ es no-trivial[6].

Por el teorema 2.10 hay un Δ maximal-no-trivial tal que

$$\Gamma \cup \{\neg^* A\} \subset \Delta .$$

Defínase la función v que a cada fórmula B le asigna un valor en $\{0,1\}$ como sigue

$v(B) = 1$ sii $B \;\varepsilon\; \Delta$.

En particular si $B \;\varepsilon\; \Gamma \subset \Delta$, $v(B) = 1$. Pero como $\neg^* A \;\varepsilon\; \Delta$, si suponemos $A \;\varepsilon\; \Delta$, tendríamos $\Delta \vdash_P A \wedge \neg^* A$, por lo tanto, por el teorema 2.5 (i), Δ sería trivial, lo cual es una contradicción. Así $v(A) = 0$. Pero en esencia el teorema 2.11 dice que v es una valorización. Así $\Gamma \not\models A$.

No daremos una prueba detallada (pues es paralela a la prueba usual del hecho de que el cálculo proposicional clásico es decidible) de que *P* es decidible. Sólo bosquejaremos el resultado.

Definición 2.13. Una casi-matriz para una fórmula A es un arreglo de 0's y 1's construido como en una tabla de verdad clásica excepto que se asigna sólo 1's a T y sólo 0's a $\bot$. También se altera la

[6] Si $\Gamma \cup \{\neg^* A\}$ es trivial, $\Gamma \cup (A \rightarrow \bot) \vdash_P \bot$, $\Gamma \vdash_P (A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$, y $\Gamma \vdash_P A$ por el axioma (13).

construcción si A es la negación de una fórmula B. En este caso se procede como sigue: Si a B se le ha asignado 0 en la línea, a A se le asigna 1. Si a B se le ha asignado 1 hay dos casos:

Si B es la negación, digamos de D, y a D se le ha asignado 0, en la misma línea, a A se le asigna 0.

De otra forma se "parte" la línea en dos líneas asignando un 0 a A en la primera y un 1 a A en la segunda, manteniendo el resto de los valores ya obtenidos en la línea antes de "partirla".

Siguiendo de cerca el caso clásico, se puede probar esencialmente de la misma forma que *P* es decidible por casi-matrices. La prueba será publicada junto con los resultados anunciados en las siguientes secciones.

3. *Relaciones con los C_n y los B_n*

Los axiomas de los C_n, $n < \omega$, son (2) - (10) y $A \vee \neg A$ junto con $B^{(n)}$ $((A \rightarrow B \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$ y $A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \rightarrow B)^{(n)}$, donde se define: A^0 como $\neg(A \wedge \neg A)$, A^n como $A \underbrace{^{00\ldots0}}_{\text{n veces}}$ y $A^{(n)}$ como $A^0 \wedge A^1 \wedge A^2 \wedge \ldots \wedge A^n$. Pueden hallarse en da Costa [1].

Los axiomas de los B_n, $n < \omega$, son (2) - (9) junto con ${}^{n+1}A \rightarrow B$ y $(A \rightarrow {}^{n+1}B) \rightarrow \neg A$, donde se define: ${}^0A$ como A y ${}^{n+1}A$ como ${}^nA \wedge \neg{}^nA$, pueden hallarse en Bunder [1].

En ambos casos la única regla de inferencia es la de *modus ponens*. Anunciamos los siguientes resultados cuyas pruebas serán publicadas.

Si a *P* le quitamos los axiomas (10) y (13) el sistema P^- resultante es decidible y es esencialmente un sub-sistema de cada B_n, (en el sentido de que cada fórmula de P^- que no contenga ni a T ni a $\perp$, que sea demostrable en P^-, lo es también en cada B_n). Para ver esto basta transformar cada fórmula de P^- en una fórmula de B_n de manera que se preserven teoremas y que la transformación deje invariantes las fórmulas que no contienen ni a T ni a $\perp$. En esencia basta reemplazar $\perp$ por ${}^{n+1}P_0$ y T por ${}^{n+1}P_0 \supset {}^{n+1}P_0$.

P mismo es esencialmente un subsistema (en el sentido anterior) de los C_n, $n < \omega$. Para verlo se procede como arriba pero con la transformación de $\perp$ por $P_0 \wedge \neg^{(n)}P_0$ y de T por $P_0 \vee \neg^{(n)}P_0$ donde $\neg^{(n)}$A es $\neg A \wedge A^{(n)}$.

Más aún, P es esencialmente C_ω, ya que C_ω es un subsistema de P, y a su vez cualquier fórmula A de C_ω que no es demostrable en C_ω posee una valorización que le asigna un 0 a A. Dicha valorización puede extenderse a una valorización para P que asigne 0 a A y así A no sería demostrable en P. Dos corolarios inmediatos son importantes:

- Si una fórmula A no contiene ni a T ni a $\perp$ entonces,

$$\vdash_{P} A \quad \text{sii} \quad \vdash_{C_\omega} A$$

- Ningún conjunto finito de fórmulas puede trivializar a P a menos que alguno de sus elementos contenga a $\perp$ como símbolo. Por lo tanto ningún conjunto finito o infinito de fórmulas en las cuales no aparece $\perp$ puede trivializar a P.

De acuerdo con el último resultado, P ofrece "casi la misma seguridad que C_ω" de no producir conjuntos triviales, pero ofrece la ventaja de que puede medirse la trivialidad a través de la compacidad. Debe observarse sin embargo que con ciertos conjuntos infinitos de fórmulas en las cuales no aparece $\perp$, es posible conseguir una especie de "trivialidad relativa a C_ω", por cuanto todas las fórmulas de C_ω serán demostrables a partir de dicho conjunto en P.

4. *Apéndice: hacia las modalidades*

Creemos que el sistema P es una base adecuada para lógicas modales ya que es posible definir:

$\Diamond$A como $\neg^*\Box\neg^*$A (es irrealizable que A sea necesariamente irrealizable).

Lo cual permite tener gran parte de los resultados usuales sobre sistemas modales, incluyendo gran parte de la teoría de modelos de Kripke.

Por ejemplo sea P-S5 el sistema cuyos axiomas son los de P más:

(14) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

(15) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(16) $\Box A \rightarrow A$

y cuyas reglas de inferencia son *modus ponens* y la regla de Gödel:

$$\frac{A}{\Box A}$$

Teorema 4.1. En *P*-S5 son válidos.los siguientes esquemas y las siguientes reglas:

- $A \rightarrow \Diamond A$
- $\dfrac{A}{\Diamond A}$
- $\Box T,\ \Diamond T,\ \neg^*\Box\bot,\ \neg\Box\bot,\ \neg^*,\ \Diamond\bot,\ \neg^*\Diamond\bot,\ \neg\Diamond\bot$
- $\dfrac{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A}{\Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \rightarrow \Box A}, \quad n \geq 0$
- $\dfrac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$
- $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$
- $\dfrac{A \rightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n}{\Diamond A \rightarrow \Diamond A_1 \vee \ldots \vee \Diamond A_n}, \quad n \geq 0$
- $\dfrac{A \rightarrow B}{\Diamond A \rightarrow \Diamond B}$
- $\dfrac{A \leftrightarrow B}{\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B}$

- $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$

- $\dfrac{\neg^* A,}{\neg^* \Diamond A}$, $\dfrac{\neg^* A}{\neg \Diamond A}$

- $\Diamond \neg^* A \rightarrow \Diamond \neg A$, $\Box \neg^* A \rightarrow \Box \neg A$
- $\neg^* \Diamond A \rightarrow \neg^* A$

Prueba. Esencialmente las clásicas usando $\neg^*$ en vez de $\neg$.

Teorema 4.2. P-S5 es más débil que S-5 ya que, por ejemplo, $\neg(\Box A \wedge \Box \neg A)$ no es demostrable.

Prueba. Las matrices que damos a continuación.

Para el caso de las lógicas deónticas, permite separar de una manera más simple que la lógica clásica (ver Chellas [1]) los siguientes principios (leyendo $\Box A$ como "A es obligatorio"):

- $\neg \Box \bot$ (Nada imposible es obligatorio.)
- $\neg(\Box A \wedge \Box \neg A)$ (No hay obligaciones contradictorias)

De los cuales el primero es defendible, pero el segundo no. Más aún, la separación es posible inclusive en presencia de:

$$\frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}, \quad \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B) \ \text{ y } \ \Box T.$$

Para ver esto basta considerar las siguientes tablas trivalentes debidas a N.C.A. da Costa[7]. (La última produce el efecto de "eliminar" el operador $\Box$.)

[7] Se toma además T : 1, $\bot$: 3.

$A \vee B$

A	B	1	2	3
1		1	1	1
2		1	1	1
3		1	1	3

$A \wedge B$

A	B	1	2	3
2		1	1	3
2		1	1	3
3		3	3	3

$A \rightarrow B$

A	B	1	2	3
1		1	1	3
2		1	1	3
3		1	1	1

A	$\neg A$
1	3
2	1
3	1

A	$\Box A$
1	1
2	2
3	3

5. *Referencias bibliográficas*

- Bunder, Martin

[1] *A New Hierarchy of Paraconsistent Logic*, Proceedings of the Third Brazilian Conference of Mathematical Logic, 1980, pp. 13-22.

- Carnielli, Walter y Oscar Masaveu

[1] *On the Method of Valuations versus Consistency Properties Applications for the Calculi B_n as a Test Case*, (en prensa).

- Costa, Newton da

[1] "On the Theory of Inconsistent Formal Systems", en: Notre Dame Journal of Formal Logic, XV (1974), pp. 497-510.

[2] *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, Sao Paulo: Husitec, 1980.

- Chellas, Brian

[1] *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 1980.