ARETÉ revista de filosofía Vol. X, Nº 2, 1998
pp. 321-325

TORRETTI, Roberto: *El Paraíso de Cantor: La tradición conjuntista en la filosofía matemática*, Santiago de Chile: Editorial Universitaria y Universidad Nacional Andrés Bello, 1998, 589 pp.

El libro de Roberto Torretti: *El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía matemática* tiene el propósito de presentar "una historia razonada de la tradición conjuntista, desde los primeros escritos de Cantor hasta los teoremas de Cohen y su impacto inmediato" (p. xi).

Según el autor, durante los siglos XIX y XX se desarrolla entre los matemáticos una reflexión filosófica acerca de su propia disciplina. Ahora bien, dicha filosofía-matemática de la matemática existe de dos maneras, a saber: de una parte, hay una corriente más o menos unitaria, autodenominada "clásica", a la cual el autor llama "conjuntista", que ejerce enorme influencia sobre las investigaciones matemáticas y que ha llegado a dominar la enseñanza universitaria, y que se caracteriza porque coloca en el centro de la matemática la noción de conjunto y trabaja en fortalecerla. De otra parte, están los adversarios del conjuntismo, que impugnan con poderosas razones las ideas y prácticas más arraigadas, sin recibir de la masa de matemáticos mucha atención. Entre éstos, se cuentan matemáticos como Kronecker, Poincaré, Brouwer y Weyl; y también filósofos como Wittgenstein y Lorenzen.

Para el lector poco ducho en las técnicas matemáticas propiamente dichas, el libro contiene una buena cantidad de apéndices en los que ellas se explican detallada y pedagógicamente. El libro forma parte de un proyecto del autor consistente en tres partes correspondientes a tres etapas en la historia del "conjuntismo". La primera parte, titulada "Conjuntos", se refiere a la fundación de la teoría de conjuntos por Cantor, a las paradojas que surgen de inmediato y a la axiomatización de la teoría debida a Zermelo y sus continuadores. La segunda parte, titulada "Cálculos", se ocupa del programa de Hilbert para dar a la teoría de conjuntos un fundamento intuitivo inobjetable. Ella estudia también los antecedentes de dicho programa en las obras de Frege, Peano, Dedekind, Russell y Whitehead, y Skolem. Además, revisa los desarrollos durante la década de 1920 por Hilbert y sus seguidores, y el formidable escollo que le surge en los hallazgos de Gödel. La tercera parte del proyecto (que ya no aparece en el libro que nos ocupa, y que el autor promete para el futuro) se propone examinar la contribución al conjuntismo de los métodos semánticos introducidos por Gödel y Tarski desde 1930.

En la primera parte del libro, el autor empieza ocupándose de la palabra "conjunto" y de su significado en la matemática del siglo XX y en el vocabulario del mismo Cantor. Describe la manera en que éste concibió dicho concepto en la tarea de representar mediante series trigonométricas algunas funciones reales. A continuación, se explican ciertos hallazgos sobre conjuntos infinitos que Cantor publicó en 1874 y 1878. Éstos se refieren a lo que Cantor llamó la "potencia" o "numerosidad" de un conjunto (*Mächtigkeit* en alemán), y que sería la única propiedad característica de un conjunto cuando se hace caso omiso de su estructura interna y de la naturaleza de sus elementos. Es así como aparecen las dos clases de infinitud conocidas como "enumerable", que es la de los números naturales, enteros, racionales y algebraicos, y como "innumerable", que es la de los números reales y complejos. También hace hincapié el autor en la *hipótesis del continuo de Cantor*, según la cual ningún conjunto que sea innumerable tiene un subconjunto que sea a la vez más numeroso que los enumerables y menos numeroso que los innumerables.

A partir de estas consideraciones, se describe cómo desarrolla Cantor la llamada *aritmética transfinita*, al tratar de ampliar, o más bien, de continuar la serie de los números enteros "más allá del infinito". Respecto a esto, hay que tener presente que Cantor era consciente de que la matemática tradicional admitía el infinito sólo como una potencialidad inalcanzable y rechazaba de plano el infinito actual. Sin embargo, él patrocinó una concepción del infinito matemático como algo completamente determinado, al modo en que por entonces ya se entendía el "punto en el infinito" de la teoría de funciones de variable compleja. No obstante, advierte Cantor que: "mientras el punto en el infinito del plano complejo se yergue solo frente a todos los puntos del dominio finito, aquí obtendremos no tan sólo un número entero infinito único, sino una secuencia infinita de tales números, que se distinguen bien unos de otros y sostienen relaciones aritméticas regulares entre sí y con los números enteros finitos" (p. 29).

En la sección siguiente del libro, se presenta el tema de las paradojas. Se empieza con el teorema de Cantor según el cual la cardinalidad de todo conjunto es menor que la cardinalidad de su conjunto potencia, es decir el conjunto de todos sus subconjuntos. Si se aplica este teorema al conjunto universal o conjunto de todos los conjuntos (cuya existencia se tomaba como garantizada naturalmente por la intuición), es obvio que se llegará a una contradicción, a saber, que el conjunto potencia del conjunto universal es más numeroso que éste.

Luego se narra cómo Russell reformuló ese teorema y su demostración empleando no la noción de *conjunto* sino la de *clase*, en tanto que extensión de un concepto. Es reflexionando acerca de las consecuencias del teorema de Cantor que Russell llega a su famosa paradoja: que la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas es tal que ella pertenece a sí misma si, y sólo si, no pertenece a sí misma. Esta contradicción fue fatal para el sistema de fundamentación de la aritmética y para el análisis elaborado por Frege en *Grundgesetze der Arithmetik*, como lo reconoció el mismo Frege en un epílogo al segundo tomo en el cual informa sobre la carta que Russell le enviara en 1902. Sin embargo, hay que tener en cuenta que para Cantor no cualquier concepto determinaba un conjunto ni que cada conjunto corresponda a un conjunto. Nos dice el autor que: "La polémica apasionada de Cantor en la década de 1880 contra quienes, desde Aristóteles, han negado el infinito actual, puede entenderse como un primer paso hacia la certificación de la realidad trascendente de los conceptos inventados por él, pero también como un mero intento para demostrar informalmente su consistencia" (p. 61).

Luego de una breve presentación histórica y conceptual del teorema del buen orden (se dice que un conjunto linealmente ordenado está *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío de él tiene un primer elemento) y del axioma de selección (que de toda colección no vacía de conjuntos no vacíos es posible formar un conjunto que contenga exactamente un elemento de cada conjunto de la colección) procede el autor a ocuparse de las axiomatizaciones propuestas para la teoría de conjuntos. Empieza con la de Zermelo y termina con la de von Neumann, realizando una presentación muy asequible de ambas a la vez que un estudio comparativo de gran utilidad para la comprensión de cada una.

Se inicia la segunda parte del libro con una sección dedicada al llamado *programa de Hilbert*. Según éste, "se persigue que al hacer de cada enunciado matemático una fórmula que pueda exhibirse en concreto y derivarse con rigor y al darle así a las conceptualizaciones e inferencias matemáticas una forma tal que resulten irrefutables y a la vez proporcionen una representación de la matemática entera, se eliminase definitivamente del mundo la cuestión de los fundamentos de las matemáticas" (p. 115).

Ayuda a entender el porqué de estos afanes el situarse en el contexto de la época y confrontar el propósito de Hilbert con las ideas que acerca de las posibilidades y limitaciones de las matemáticas tenían ya por entonces matemáticos como Kronecker, Brouwer y Weyl.

En efecto, habiendo ya demostrado en 1899 que su axiomatización de la geometría no era contradictoria a menos que el concepto clásico de número real lo fuese, creía Hilbert que la certeza indisputable que perseguía se habría logrado en cuanto se dispusiese de una teoría consistente de los reales. Así, los conjuntistas intentaron fundar una teoría de los reales por lo menos tan consistente como la aritmética. Pero para Brouwer y Weyl era éste nada más que un fútil intento, como se había puesto en evidencia mediante las paradojas de la teoría de conjuntos. En esta cuestión esencial, el programa de Hilbert se apoya en la formalización de la lógica y de las matemáticas emprendida por Frege y perfeccionada por Russell y Whitehead.

Pero había, además de la consistencia, otra exigencia en el programa de Hilbert, a saber, la de la compleción, es decir, la propiedad según la cual la matemática pudiera demostrar cada una de sus verdades. Lamentablemente para Hilbert y sus seguidores, en 1931 habría de demostrar Gödel sus célebres teoremas de incompleción, en virtud de los cuales ninguna formalización "hilbertiana" de la matemática (esto es, que cuente con una cantidad enumerable de símbolos, que permita determinar precisamente los enunciados aceptables sintácticamente y que posea un procedimiento preciso de "demostración") puede, a la vez, ser consistente y completa.

A continuación se presentan los intentos de formalización de la aritmética llevados a cabo por Frege, por Peano y por Dedekind. Se incluye también una detallada y clara presentación de la famosa teoría de los tipos lógicos debida a Russell, según la cual queda impedida de venir al mundo sintáctico (y por ende semántico) toda autorreferencia, ya que la clase a la cual pueda algo pertenecer se encuentra en un tipo lógico superior al del objeto perteneciente. Es claro que de esta manera queda definitivamente excluida del mundo lógico-matemático la paradoja de Russell.

Luego se revisan los intentos de ejecución del programa de Hilbert realizados antes de la aparición de las "bombas" gödelianas. Entre dichos intentos están los de Skolem, Ackermann, Herbrand e, incluso, del mismísimo Gödel, quien logró demostrar la compleción del cálculo de predicados de primer orden en la lógica. Vale la pena recordar que "primer orden" consiste, en este contexto, en sólo poder cuantificar universalmente individuos, mas no conjuntos ni predicados.

En la siguiente sección se ocupa el autor de presentar detalladamente los célebres teoremas de incompleción de Gödel aparecidos en su artículo: "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia mathematica* y sistemas afines". Aparte de la enorme importancia que ellos tienen para el pensamiento en todas sus manifestaciones, se hace notar cómo los métodos de los cuales se vale Gödel para demostrar sus teoremas sentaron las bases para una nueva disciplina matemática, a saber, la teoría de las funciones "recursivas" o "computables". La gran importancia de ésta radica en que ella es el núcleo teórico en torno al cual se desarrolla, en la segunda mitad del siglo XX, la informática.

A continuación se presenta el teorema que establece la incompleción de la aritmética, es decir, el hecho de que hay en ésta verdades carentes de demostración, no sólo por ahora, sino por siempre jamás. Entra el autor en el detalle de la demostración de Gödel logrando precisión y claridad. Sólo con el ánimo de facilitar la intuición de este resultado, y a riesgo de pecar de exceso de simplificación, puede decirse que lo que logra Gödel es construir una oración aritmética que dice algo así como: *Soy indemostrable*. Ha de estar claro que si ella fuera falsa, sería demostrable, y por ende, verdadera, pues sí se ha establecido la llamada "corrección" de la aritmética, es decir, el hecho de que todo lo que en ella se demuestre es verdadero.

Por último, se presenta el resultado según el cual la posible consistencia de la aritmética es indemostrable; es éste el llamado segundo teorema de incompleción de Gödel.

La penúltima sección del libro está dedicada a presentar detalladamente y de modo asequible al no ducho en asuntos lógico-matemáticos la teoría de las funciones recursivas o computables.

Termina el libro presentando la prueba de Gentzen de la consistencia de la aritmética. Podría parecer extraño el que pueda, finalmente, probarse esto, pues ya se ha dicho antes que la consistencia de la aritmética es indemostrable, según el segundo teorema de incompleción de Gödel. Lo que ocurre es que, precisamente a raíz de los teoremas de incompleción de Gödel, anunciaron Hilbert y Bernays en 1939 que su programa de fundamentación de la matemática requería de una ampliación del punto de vista "finitista". Esta ampliación consistió en admitir como un método propiamente "finito" la inducción transfinita con la cual Gentzen logró establecer la consistencia de la aritmética.

Como ya se ha dicho al inicio de esta reseña, es el libro de Torretti que nos ocupa uno cuyos aportes a la divulgación de la historia y la filosofía de la lógica-matemática y de las matemáticas son grandes. Su lectura y su estudio resultarán casi necesarios en cualquier curso de postgrado que tenga relación con los temas antedichos.

Ramón García-Cobián
Pontificia Universidad Católica del Perú