ARETÉ Revista de Filosofía
Vol. XII, Nº 2, 2000
pp. 63-80

Números wittgensteinianos

Alejandro Tomasini
Universidad Nacional Autónoma de México

En este trabajo reconstruyo la concepción tractariana de los números naturales. Muestro cómo Wittgenstein usa su aparato conceptual (operación, concepto formal, propiedad interna, forma lógica) para elaborar una definición de "número" alternativa a la logicista. Por último, examino brevemente algunas de las críticas que se han elevado en su contra.

*

"Wittgensteinian Numbers". In this paper I reconstruct the tractarian view of natural numbers. I show how Wittgenstein uses his conceptual apparatus (operation, formal concept, internal property, logical form) to elaborate an alternative to the logicist definition of "number". Finally, I briefly examine some of the criticisms that have been raised against it.

1. *Introducción*

Desde que, en el siglo V a.C., los pitagóricos pusieran en circulación la idea de que los números están en las cosas, la investigación respecto de la naturaleza del número se convirtió en un tema filosófico fundamental y no es exagerado sostener que muchos sistemas filosóficos, bien armados y atractivos en relación con otros tópicos, se derrumban ante su incapacidad para dar cuenta de dicho tema. La naturaleza del número, en efecto, constituye un tema no sólo difícil -por lo técnico- sino particularmente elusivo. Por ejemplo, no es de extrañar que al abordarlo se parta de premisas aceptables y que no obstante se desemboque, por medio de razonamientos impecables, en contradicciones, en absurdos, en problemas insolubles o en propuestas francamente increíbles. A decir verdad, esto es lo que acontece con los pitagóricos: partiendo de la idea, a primera vista inobjetable e inocua, de que hablar de los números es hablar *de algo* y que usamos los números para *contar* entidades, es razonable inferir que los números, sean lo que sean, tienen algo que ver con los objetos contados, esto es, no están desligados de ellos. El que haya aquí dos leones me dice por lo menos dos cosas acerca de ellos, *viz.*, que son leones y que son dos. No es, pues, descabellado concluir que, así como están allí los trozos de materia que conforman a los leones, allí está también, de alguna manera, el número dos. Si a consideraciones de esta clase añadimos las concernientes a la verdad y falsedad de los enunciados matemáticos, la objetividad de los resultados que se obtienen, su validez universal, etc., lo extravagante sería, ciertamente no proponer una teoría realista de la verdad matemática y una concepción objetivista del número.

Estos lugares comunes permiten constatar que, en este como en muchos otros casos, las doctrinas filosóficas se extraen o se fundan en interpretaciones del simbolismo involucrado. Dicho de otro modo, debería ya ser obvio que toda teoría filosófica de los números procede de una teoría general del lenguaje, esto es, presupone una teoría así; no habría podido desarrollarse sin ella. Es claro, por otra parte, que ello es independiente de que el filósofo del número se haya pronunciado *explícitamente* en relación con temas de filosofía del lenguaje. Esto explica en parte por qué inclusive en el caso de grandes matemáticos a menudo se pueden discernir, en sus pronunciamientos filosóficos, elementos de ingenuidad, por no hablar de crudeza o de primitivismo. Aunque, desde luego, no siempre. En múltiples ocasiones podemos rastrear los fundamentos de intrincadas teorías acerca del número en la bien conocida posición que hace de los numerales nombres de entidades y de diversos signos matemáticos nombres de propiedades o de relaciones que, se supone, valen entre dichas entidades.

En este trabajo parto de la intuición wittgensteiniana de que una "representación perspicua" del lenguaje en general y del simbolismo matemático en particular debe generar la visión correcta del número y evitarnos la elaboración de una "teoría" al respecto. Me concentraré básicamente en lo que se nos dijo en el *Tractatus* y, por consiguiente, en los números naturales. En vista del carácter abiertamente polémico de aquel primer gran libro de Wittgenstein, será imposible no hacer un muy breve recordatorio de algunas ideas que constituyen su trasfondo natural y, muy especialmente, de algunas ideas del logicista más ambicioso y, pienso, coherente: Bertrand Russell. Es sobre el trasfondo de la crítica que Wittgenstein elabora en contra de Russell que irá paulatinamente emergiendo una nueva concepción del número, mucho más profunda, esclarecedora y, creo, convincente.

2. Algunas ideas de Russell

No me parece que sea necesaria otra cosa que hacer una simple enumeración de algunas fundamentales (y bien conocidas) tesis russellianas para tener ante los ojos el cuadro que será el principal blanco de Wittgenstein. Para nuestros objetivos, nos bastará con tener presentes los siguientes cuatro puntos:

a) Russell es de los pocos filósofos que dispone de un *criterio ontológico*, a saber, el de los vocabularios mínimos. De acuerdo con éste, si un término es de alguna manera eliminable es porque es dispensable y si es dispensable es porque carece de significado, es decir, *no denota*.

b) Russell no cuestiona las clasificaciones básicas del lenguaje natural, aunque sí altera sus contenidos y fronteras. Por lo tanto, hay sujetos genuinos, así como hay genuinas propiedades y relaciones.

c) Russell hace suya la teoría lógica del significado, según la cual el significado de una expresión ineliminable es un objeto o una entidad de alguna clase y de algún tipo.

d) Russell es un logicista. Lo que esto implica es que los numerales no son nombres. Desde esta perspectiva, los números no son otra cosa que "construcciones lógicas".

No es nuestro propósito volver a la carga con el recuento de las objeciones ya clásicas elevadas en contra del programa de Russell, ya que son de muy diversa índole y, en este caso, nos llevarían desde el joven Wittgenstein hasta el Wittgenstein de la madurez, pasando por Ramsey, Gödel, Benacerraf y muchos otros. En cambio, sí nos ocuparemos brevemente de las críticas contenidas en el *Tractatus*, sólo que eso lo haremos después de haber reconstruido algunas de las elucidaciones vittgensteinianas respecto del lenguaje en general. Veamos, pues, rápidamente qué nos dice el joven Wittgenstein sobre la representación lingüística para pasar después a lo que es, propiamente hablando, nuestro objeto de investigación, esto es, el número.

3. El Tractatus *y la representación*

La posición de Wittgenstein en relación con el número queda articulada por medio de unas cuantas nociones, siendo las más prominentes las de concepto formal, serie formal, relación interna y operación. Empero, estas nociones son a su vez usadas dentro del marco de la teoría general de la representación defendida por Wittgenstein, a la que se le conoce como "teoría pictórica". Dado que no es nuestro tema la teoría misma de la representación (más que tangencialmente), nos limitaremos a ofrecer únicamente sus lineamientos generales.

El lenguaje, entendido como un sistema regulado de signos, es posible porque ciertas condiciones se cumplen. Dijimos que el lenguaje sirve para representar, pero esto de inmediato hace que nos planteemos ciertas preguntas. Quizá las más pertinentes para nuestros propósitos sean las dos siguientes:

a) ¿qué representa el lenguaje?

b) ¿cómo se representa por medio del lenguaje?

Lo que se representa por medio del lenguaje es la realidad. Esto, sin embargo, exige ciertas aclaraciones. La expresión "la realidad" no es un nombre de un algo, sino que más bien sirve para englobar a sus "elementos" en una totalidad. Paralelamente, lo que representa no es "el lenguaje", sino ciertas unidades lingüísticas, a saber, las oraciones. Los elementos de la realidad que, propiamente hablando, son representados son los estados de cosas, las situaciones. La totalidad de dichas situaciones es "el mundo". Los hechos del mundo yacen en el espacio lógico, es decir, el espacio de la factualidad. A pesar de la fundamental propiedad lógica de bipolaridad de las proposiciones, el mundo del *Tractatus* es un mundo radicalmente atomizado, atomizado en el espacio, en el tiempo, en relación con los colores y sin causalidad. Los estados de cosas se dan o no con total independencia unos de otros. Por ello, la representación no es únicamente de los estados de cosas que de hecho se dan, sino de todos los estados de cosas *posibles*. Los estados de cosas, a su vez, se componen de objetos.

La esencia del lenguaje es la representación factual y ésta es posible porque con el lenguaje se "retratan" hechos. La única función posible del lenguaje es la de retratar hechos. Cada oración o signo proposicional es un retrato potencial (si la oración está bien construida) que se vuelve una proposición cuando su sentido es *pensado*. Las oraciones completamente analizadas se componen de nombres. La representación de estados del mundo presupone entre otras cosas y por lo menos, lo siguiente:

a) que en una proposición elemental o completamente analizada haya tantos nombres como objetos en el estado de cosas representado y que a cada nombre le corresponda uno y sólo un objeto.
b) que la estructura del hecho retratado sea idéntica a la estructura de la proposición.

Lo que hemos dicho está en el núcleo de las respuestas a las preguntas planteadas más arriba y vienen enmarcadas (sigo en esto a Jaakko Hintikka) en una muy especial teoría de la ostensión. En efecto, es plausible sostener que cuando Wittgenstein afirma que los objetos (esto es, la sustancia del mundo) "se muestran", lo que quiere decir es que son el contenido de nuestra experiencia inmediata, el material último con el que ésta se construye y es por eso que sólo pueden "mostrarse" y no ser puestos en palabras. En todo caso, lo importante es lo siguiente: la representación tiene un carácter empírico. No hay representación genuina que no haga intervenir el mostrar, esto es, la ostensión, aunque su precio sea el silencio. Con esto en mente, intentaré reconstruir lo que Wittgenstein tiene que decir en el *Tractatus* en relación con los números.

4. *Números y verdad matemática*

Como ya se dijo, el punto de vista correcto en relación con los números debe provenir de la intelección correcta del simbolismo matemático, el cual, a final de cuentas, no es sino una porción del lenguaje humano. Su carácter de subordinado es enunciado de diverso modo, pero una formulación particularmente cáustica es la de 6.211(a), en donde Wittgenstein afirma: "En verdad, en la vida cotidiana una proposición matemática no es nunca lo que requerimos, sino que más bien usamos proposiciones matemáticas únicamente para inferir de proposiciones que no pertenecen a las matemáticas otras que, de igual modo, tampoco pertenecen a las matemáticas"[1]. Es de crucial importancia, por lo tanto, entender cómo entra el simbolismo matemático en la representación pictórica del mundo.

La primera de las nociones que debemos esclarecer es, me parece, la de concepto formal. Wittgenstein distingue esta noción de la de concepto genuino. Un concepto genuino es aquél que, al ser usado de manera apropiada, genera una proposición, esto es, algo que tiene condiciones de verdad. Conocer dichas condiciones es conocer su sentido. Desde el punto de vista de la teoría pictórica, un signo para un concepto genuino es un nombre, puesto que Wittgenstein rechaza no tanto la idea de estructuración lingüística como la de tipo lógico y, sobre todo, la de tipo ontológico. Como él mismo nos lo dice: "Las jerarquías son y deben ser independientes de la realidad"[2]. Aquí es pertinente distinguir entre prototipos y tipos lógicos. Una función acarrea consigo su prototipo de argumento, pero esto no significa que una función sea de un "tipo lógico" superior. Y si se nos pregunta "¿por qué es ello así?", lo único que podemos responder es: "Las reglas de la sintaxis lógica deben ser inteligibles por sí mismas, tan pronto como se conoce de qué manera significa cada signo"[3]. Si lo que Wittgenstein dice es satisfactorio o no, ello es algo completamente independiente del hecho incontrovertible de que siempre repudió la "teoría de los tipos lógicos" de Russell y, por ende, sus implicaciones metafísicas.

---

[1] Wittgenstein, Ludwig, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Londres/Henley: Routledge and Kegan Paul, 1978, 6.211(a).
[2] *Ibid.*, 5.5561(b).
[3] *Ibid.*, 3.334.

En este punto es menester recurrir al simbolismo lógico usual. Una distinción básica es la distinción entre constante y variable. Una constante es un nombre, en tanto que una variable es más bien un mecanismo. Si un concepto es usado debidamente, al ser formalizada la expresión en la que aparece, queda recogido por una constante. Pero hay conceptos que quedan recogidos en el simbolismo gracias únicamente a las variables. En casos así nos las habemos con conceptos formales y un rasgo esencial de dichos conceptos es que no pueden quedar expresados por medio de proposiciones. La razón es simple: cuando intentamos hacerlo, lo que generamos es una tautología, explícita o encubierta. Veamos rápidamente un ejemplo.

Supongamos que hablamos de niños. Tenemos entonces un *stock* de "nombres", en el sentido amplio autorizado por el *Tractatus*. Podremos entonces decir cosas como "Juanito es simpático" y "Luisito es mexicano". "Es simpático" y "es mexicano" son genuinos conceptos. Pero si ahora pretendemos decir "Juanito y Luisito son niños", nuestra expresión carece de sentido: nosotros ya sabíamos, por ser usuarios normales del lenguaje, que "Juanito" y "Luisito" eran nombres de niños. Luego, lo que en ese caso estaríamos haciendo sería construir una vacua tautología, una pseudoproposición. En relación con los niños Juanito y Luisito "ser niño" es un concepto formal y no es predicable de ellos, al igual que sería absurda la negación de dicha pseudoproposición ("los niños Juanito y Luisito no son niños"). Un punto importante en relación con esto es el siguiente: sería un error grotesco inferir que, desde el punto de vista del *Tractatus*, hay un conglomerado de conceptos formales, en tanto que opuestos a conceptos genuinos, establecido *a priori*. Wittgenstein tiene el cuidado de recordarnos que los elementos de su aparato conceptual, nociones como objeto, propiedad, estado de cosa, etc., tienen un "uso oscilante". Dicho de otro modo, qué sea un objeto dependerá de qué sea un nombre en un lenguaje dado; asimismo, un concepto que en un discurso puede funcionar como un concepto genuino *puede* funcionar en otro como un concepto formal. Eso es algo que sólo pueden revelar nuestras variables. "Un concepto formal está automáticamente dado cuando se da un objeto que cae bajo él"[4]. Si ahora hablamos de los

[4] *Ibid.*, 4.12721.

alumnos, decir que Juanito es un niño será decir algo con sentido, pero decir que es un alumno ya no será decir nada significativo, puesto que de entrada sabíamos que lo que teníamos eran nombres de alumnos. En este caso, el concepto formal será "ser alumno" y Juanito automáticamente cae bajo él.

Ahora bien, Wittgenstein sostiene que los números son conceptos formales. Lo primero que esto implica es que los *numerales no son nombres*. O sea, el modo como entran los números en la representación pictórica de los hechos no es vía la designación, sino por medio de variables. Los numerales no son más que un mecanismo simbólico para recoger lo indicado por las apariciones de las variables, una vez que se ha encontrado la forma lógica de una oración. En efecto, si decimos que hay 3 objetos sobre la mesa lo que decimos es algo tan simple como ('$\exists x, y, z$) [(Mx & My & Mz) & (w) ($Hw \rightarrow x = w \vee x = y \vee w = z$)]. Es así como entran los números en las proposiciones. Los números, por lo tanto, son más como cuantificadores que como designadores de objetos. Las implicaciones filosóficas de este señalamiento son increíbles: ponen coto a toda clase de disquisición acerca del número de objetos que hay en el mundo y permiten echar por tierra el axioma russelliano de infinitud, así como la jerarquía numérica de Russell. Si esto, que en verdad parece trivial, es acertado, entonces nada parece más descabellado que las concepciones filosóficas elaboradas a partir de consideraciones sobre los numerales en oraciones gramaticalmente bien formadas, pero cuya sintaxis lógica fue ignorada. Probablemente lo que más contribuya a desacreditar a dichas concepciones sea su idea ingenua de que los numerales son nombres de objetos. Ahora que sabemos que los signos matemáticos no entran en las proposiciones como nombres, nos resultará comprensible la aseveración de Wittgenstein en el sentido de que "las proposiciones de las matemáticas no expresan ningún pensamiento"[5]. En otras palabras, las proposiciones matemáticas no son ellas mismas retratos de nada. Dicho de otro modo: no hay hechos matemáticos. ¡Esto sí que resulta inteligible y sensato!

Consideremos ahora la noción de relación interna. La definición wittgensteiniana, que es concisa y clara, concierne a las propiedades, pero es obvio que vale por igual para las relaciones. De acuerdo con él,

[5] *Ibid.*, 6.21.

"una propiedad es interna si es impensable que su objeto no la posea"[6]. Así, pues, una relación interna es lo que nosotros llamaríamos una "relación necesaria". La aportación de Wittgenstein a esta venerable controversia consiste en señalar que una relación interna *no puede* quedar expresada por medio de proposiciones. Una relación así se muestra en las relaciones necesarias que de hecho valen entre las proposiciones involucradas. "La existencia de relaciones internas entre posibles estados de cosas se expresa en el lenguaje mediante una relación interna entre proposiciones que los expresan"[7]. De ahí que, cuando imaginemos estar enunciando una relación necesaria entre objetos o entre estados de cosas, lo único que estaremos haciendo será construir una tautología o un enunciado analítico. Por ejemplo, decir que el 3 no habría podido ser inferior al 2, o que necesariamente es mayor que el 2, no es algo que tenga sentido decir. Eso es algo que se muestra en las sumas y restas que de hecho hagamos: si sumamos 3, el resultado es mayor que si sumamos 2, y si restamos 3, el resultado será menor que si restamos 2. Es así como se ve que el 3 es necesariamente mayor que 2.

La siguiente noción que Wittgenstein requiere para articular su punto de vista es la de operación. Las operaciones se ejercen *prima facie* sobre proposiciones y su objetivo no es sino el de extraer ciertas proposiciones a partir de otras. Desde la perspectiva estrictamente extensional del lenguaje defendida en el *Tractatus*, todas las proposiciones, independientemente de su apariencia superficial, son el resultado de operaciones de verdad que toman como bases a las proposiciones elementales. La noción de operación está, pues, vinculada a la de inferencia, por lo que tiene que ver, ante todo, con la forma lógica. Las operaciones permiten las transiciones proposicionales. "Una operación es aquello que hay que hacerle a una proposición para obtener otra de ella"[8]. Las operaciones son modificaciones estructurales o formales. Ellas mismas, por consiguiente, no dicen nada, no son una enunciación de nada. "En verdad, una operación no dice nada, sino sólo su resultado y ello depende de las bases de la operación"[9]. En este punto es importante trazar una

[6] *Ibid.*, 4.123(a).
[7] *Ibid.*, 4.125.
[8] *Ibid.*, 5.23.
[9] *Ibid.*, 5.25(b).

distinción. Hay operaciones que se ejercen sobre proposiciones genuinas, esto es, proposiciones que enuncian la existencia de relaciones empíricas, de relaciones que pueden tanto darse como no darse y que no son, por así decirlo, adivinables. En realidad, en la vida cotidiana constantemente estamos efectuando operaciones, es decir, hacemos inferencias y extraemos conclusiones. Las operaciones que en casos así se realizan nos llevan de ciertas proposiciones a otras que, aunque implícitas, son diferentes. Sin embargo, hay casos en los que lo que deseamos efectuar es *una y la misma* operación, esto es, repetir la operación, tomando como base para ello el último resultado. Lo que en estos casos nos importan son proposiciones generales, como por ejemplo la proposición general "*a* es el sucesor de *b*", independientemente de qué o quiénes sean *a* y *b*. Surgen entonces series que ya no son empíricas sino formales, es decir, que se expenden por una relación interna, a diferencia de lo que acontece con las conexiones o series empíricas, las cuales están regidas por relaciones externas o contingentes. Las series formales son fundamentales para la caracterización del número: "Las series numéricas no están ordenadas por una relación externa, sino por una relación interna"[10]. Aquí el punto importante es el de que la noción de operación no presupone a la de número. Las relaciones internas hacen ver que en matemáticas los resultados son necesarios. El precio de ello, empero, ya lo conocemos: la no construcción de genuinos pensamientos.

Aunque son muchas las cosas que se pueden decir en relación con las operaciones, me limitaré aquí a señalar una diferencia fundamental, enfatizada por Wittgenstein, entre operación y función. Su posición es que "una función no puede ser su propio argumento, en tanto que una operación puede tomar como su base a sus propios resultados"[11]. La idea de una función que se autoaplica es una idea espuria: no entender que una función, que contiene un prototipo, no puede ser su propio argumento, nos conduce directamente a la paradoja de Russell y a toda una serie de absurdos; en cambio, la idea de una repetición, de una y la misma operación que se ejerce una y otra vez, de una iteración, de una recursión, no tiene nada de ilegítima. Más aún, es lo que nos permite

[10] *Ibid.*, 4.1252(b).
[11] *Ibid.*, 5.251.

comprender qué son los números. Llegamos así a la caracterización del número. Para el *Tractatus* un número es simplemente "el exponente de una operación"[12]. Intentemos poner esto en claro.

Cuando repetimos indefinidamente una cierta operación tomando sistemáticamente como base el resultado anterior, generamos una serie formal, esto es, una serie regida por una regla que sistemáticamente se aplica. Ahora bien, en el caso de los números naturales esto es precisamente lo que sucede: se efectúa una operación (digamos una suma) sobre un término inicial y se construye "el siguiente" o "el sucesor". De ahí que, como afirma Wittgenstein, la forma general de un número entero sea $[0, \xi, \xi + 1]$. No obstante, la forma general del número no nos da números particulares, así como la forma general de la proposición no nos da una proposición. Más bien, un número, por así decirlo, acabado, aparece cuando en la serie formal apuntamos a un lugar determinado. Esto, sin embargo, no es otra cosa que indicar *cuántas* veces se efectuó la operación en cuestión. Desde esta perspectiva, el número es un lugar en una serie formal, en una progresión, es decir, un lugar en una serie regulada por una relación interna y al que llegamos por la iteración de una operación. El número es, pues, como ya se dijo, el exponente de una operación. Nada más.

La concepción del número desarrollada por Wittgenstein lo conduce directamente a un determinado punto de vista acerca de la verdad matemática. Frege y sobre todo Russell nos acostumbraron a ver en las verdades matemáticas tautologías. La razón es por todos conocida: los logicistas traducen las verdades matemáticas a verdades expresadas en la terminología de la lógica y la teoría de conjuntos. Para ellos los números son conjuntos, clases de clases. Así, los enunciados numéricos se convierten en enunciados de la lógica (en un sentido muy amplio de la expresión puesto que por "lógica" ahora se entiende "lógica + teoría de conjuntos"). Nada más alejado del pensamiento de Wittgenstein que esto. Para él, la idea misma de conjunto es la idea de algo conformado empíricamente. Desde luego que se puede "definir" un conjunto por medio de una función proposicional, pero eso no pasa de ser un mero artificio formal, no la idea originaria de conjunto, de colección, de grupo. La idea de conjunto es la idea de una totalidad, en tanto que en matemáticas no

[12] *Ibid.*, 6.021.

nos las habemos con totalidades sino con sistemas, esto es, con series formales, las cuales obviamente pueden desarrollarse *ad infinitum*, es decir, tanto como uno quiera o pueda. Esto explica el violento pronunciamiento antilogicista de Wittgenstein de acuerdo con el cual "La teoría de las clases es completamente superflua en matemáticas"[13]. Un número es un modo de marcar un punto dentro de un sistema, no un elemento de una totalidad, de una clase.

¿Qué son, pues, las verdades matemáticas si no son ni tautologías ni proposiciones empíricas? "Las proposiciones de las matemáticas son ecuaciones y, por lo tanto, pseudoproposiciones"[14]. En general, nos vemos incapacitados para entender esto porque la gramática superficial de las verdades matemáticas es sumamente engañosa. Cuando decimos, por ejemplo, que el número 3 es primo, o que 3 + 2 = 5, tenemos la impresión de estar construyendo una auténtica proposición, de algo que es verdadero o falso en el mismo sentido en que lo es una proposición como "París es la capital de Francia". Pero esto es un error: el signo de igualdad "=" no es el mismo que el signo de identidad "≡". La identidad es una noción lógica espuria, pero la igualdad es un signo legítimo y útil: sirve para indicar que las expresiones que están a ambos lados del signo son intercambiables, sustituibles. Esto se ve fácilmente si se recurre a las definiciones. Wittgenstein afirma que "es una propiedad de '(1 + 1 + 1 + 1)' que pueda construirse como '(1 + 1) + (1 + 1)'"[15]. Aplicando esta propiedad y las definiciones de "1" como "0 + 1", "2" como "1 + 1", etc., a la expresión anterior, *i.e.*, a "3 + 2 = 5", lo que tenemos es un esquema como:

$$(1 + 1 + 1) + (1 + 1) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1)$$

La gran ventaja de esta nueva formulación es que nos permite ver que al sumar no estamos predicando nada de nada, que no estamos, propiamente hablando, aseverando nada. Nuestra ecuación no es otra cosa que una regla para el uso de signos y lo que dicha regla indica es que éstos son sustituibles. En matemáticas no nos las habemos con

[13] *Ibid.*, 6.031(a).
[14] *Ibid.*, 6.2(b).
[15] *Ibid.*, 6.231(b).

conceptos, sino con reglas de sintaxis, gracias a las cuales logramos determinar extensiones a través de proposiciones.

Hay en el *Tractatus* unas cuantas secciones dedicadas a demoler la explicación fregeana de expresiones como "2 + 3 = 5" en términos de identidad de denotación y diferencia de sentido. No sólo la noción misma de significación quedó de hecho expulsada de las matemáticas, sino que Wittgenstein mostró que la noción de identidad, requerida por la explicación fregeana, es absurda y da lugar a inmensas peticiones de principio. La identidad de denotación no se puede aseverar: se muestra en el uso de los mismos nombres. Es porque yo ya sé que dos expresiones denotan lo mismo o sirven para que nos refiramos a lo mismo que digo que sus denotaciones son idénticas. Comprender este rechazo es importante para entender la idea wittgensteiniana de ecuación. Su posición se expresa como sigue: "Una ecuación tan sólo caracteriza el punto de vista desde el cual considero a ambas expresiones, esto es, desde el punto de vista de su igualdad de significado"[16]. Así, si no nos dejamos desviar por las interpretaciones metafísicas del simbolismo, ciertamente podemos decir que "2 + 3" y "5" significan lo mismo. Lo que entonces se quiere decir es simplemente que la operación que se efectúa con el signo que está del lado izquierdo de la igualdad produce el mismo número que está indicado por la expresión numérica ubicada del otro lado del signo de igualdad. Esto no tiene nada que ver con el sentido y la referencia fregeanos.

El que las ecuaciones sean pseudoproposiciones no impide que efectivamente se parezcan más a las proposiciones, esto es, a los retratos, que las tautologías. Desde el punto de vista del *Tractatus*, la lógica es "el gran espejo" de la realidad. Las leyes de la lógica sólo muestran la estructura del mundo, pero no dicen nada. Las ecuaciones, en cambio, si bien muestran lo mismo ("La lógica del mundo, que las proposiciones de la lógica muestran en las tautologías, la muestran las matemáticas en las ecuaciones"[17]), se diferencian de las tautologías por cuanto *dicen* algo, a saber, que muestran algo. La razón de esta diferencia procede, ante todo, del signo de igualdad de las ecuaciones matemáticas. Dicho signo se conduce como un auténtico verbo, como un signo de aseveración:

[16] *Ibid.*, 6.2323.
[17] *Ibid.*, 6.22.

indica o parece decir que dos operaciones producen el mismo número. Esta diferencia, sin embargo, ni convierte a las ecuaciones en retratos, esto es, en proposiciones empíricas, ni las desliga por completo de la lógica, puesto que a final de cuentas las matemáticas son un "método lógico"[18]. Cabría entonces preguntar: ¿hay alguna diferencia más palpable entre tautologías y ecuaciones que la diferencia respecto al decir y el mostrar? La respuesta es que sí: la diferencia parece residir en el carácter altamente operativo o funcional de las ecuaciones, algo totalmente ausente en las tautologías. Las tautologías son perfectamente inútiles ("Por ejemplo, no sé nada acerca del tiempo si sé que llueve o no llueve"[19]), en tanto que las ecuaciones matemáticas están integradas en nuestro lenguaje, en nuestras formas lingüísticas, en las teorías científicas, y permiten hacer transiciones que desde un punto de vista práctico son importantes.

Quizá debamos ya sintetizar o resumir la posición general del *Tractatus* en relación con el número, tomando en cuenta todos los elementos hasta ahora mencionados. Para Wittgenstein, un número no es ni un mero numeral ni una entidad. Un número es más bien un esquema proposicional, una manera de marcar la forma de una proposición. En la medida en que los números tienen que ver con las formas lógicas de las proposiciones, y no con la idea empírica de clase o de agregado, el "conocimiento" matemático es, como el de la lógica, enteramente *a priori*. Sin tener que comprometerse con la explicación conjuntista de las progresiones, de las series formales, Wittgenstein puede dar cuenta de lo que es contar, puesto que la idea de contar es la de enumerar objetos *nombrados*. Puede, pues, constatarse que la excursión por los abstractos dominios de la elucidación filosófica no le impide al *Tractatus* hacernos entender también en qué consiste la practicalidad del simbolismo matemático.

5. *Críticas al* Tractatus

Sería ocioso negar que las posiciones alcanzadas por Wittgenstein en el *Tractatus* hacen justicia a muchas intuiciones básicas, y me parece que es igualmente indiscutible que uno de sus mayores méritos es que

[18] *Ibid.*, 6.2.
[19] *Ibid.*, 4.461(e).

nos evita adoptar tesis metafísicas con respecto a los números. Empero, habría también que reconocer que el libro contiene pronunciamientos oscuros y, sobre todo, que quedan amplias zonas de las matemáticas sin explicar. En lo que resta del trabajo, enumeraré y comentaré, sin entrar mayormente en detalles, algunas de las objeciones que se han elevado en contra de lo que se dice en el *Tractatus* acerca de las matemáticas y que considero inválidas. Terminaré enunciando lo que en mi opinión constituye la debilidad de la posición wittgensteiniana.

En su célebre "Introducción" al libro de Wittgenstein, Russell escribe: "A mí me parece que, en relación con algunos temas, la teoría del Sr. Wittgenstein necesita un mayor desarrollo técnico. Esto se aplica en particular a su teoría del número (6.02 y ss.), la cual, así como está, es susceptible de dar cuenta únicamente de los números finitos. Ninguna lógica puede considerarse adecuada hasta que se haya mostrado que es capaz de dar cuenta de los números transfinitos. No pienso que haya nada en el sistema del Sr. Wittgenstein que le haga imposible llenar esta laguna"[20]. Hasta aquí el comentario de Russell.

Yo creo que, en este caso, aunque podemos explicarnos por qué Russell hace este señalamiento (dada la falta de aclaraciones por parte de Wittgenstein), es Russell quien no parece comprender lo que está en juego y es dudoso inclusive que *pudiera* hacerlo. Esto es algo que sólo quedará debidamente esclarecido en la obra posterior de Wittgenstein. Para éste, el infinito no es ni una cantidad ni una extensión ni un número. No hay, por lo tanto, como lo piensa Russell, "números transfinitos". La aritmética transfinita es algo que exige elucidación gramatical, ya que el comportamiento de sus nociones clave, de nociones como $\aleph$, no es transparente. Wittgenstein da una idea de su novedoso (y por ello de difícil aprehensión, especialmente para un matemático) punto de vista cuando afirma que "el concepto de aplicaciones sucesivas de una operación es equivalente al concepto 'y así sucesivamente'"[21], es decir, a nuestro "etc.", y es claro, por otra parte, que el concepto de infinito está conectado con el "etc." que no es el de la pereza, es decir, el "etc." que usamos cuando nos da flojera contar todos los elementos de un conjunto cuyos elementos, no obstante, podríamos enumerar. La idea correcta de infinito,

[20] Russell, Bertrand, "Introduction", en: Wittgenstein, Ludwig, *o.c.*, p. XX.
[21] Wittgenstein, Ludwig, *o.c.*, 5.2523.

que posteriormente Wittgenstein desarrollará en detalle, tanto en las *Observaciones filosóficas* como en las *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*, es la idea de una aplicación ilimitada de determinada operación, de la posibilidad de realizarla las veces que uno quiera. Esta posibilidad está inscrita en una regla, que es peculiar a los juegos de lenguaje de las matemáticas. Esta posición, que equívocamente ha sido llamada "estrictamente finitista", puede resultarnos convincente o no, pero en todo caso debe quedar claro que la pretensión de Russell de extender la explicación que Wittgenstein ofrece de los números naturales a los números transfinitos es algo totalmente fuera de lugar. Es cierto, pues, que el "sistema" de Wittgenstein permite, en principio, dar cuenta del infinito, pero es falso que dicha explicación se funde en la que ofrece de los números naturales.

Mucho más penetrante y certera es, en cambio, la crítica de Frank P. Ramsey. Hablando de la concepción wittgensteiniana de las ecuaciones matemáticas dice lo siguiente: "No veo cómo pueda suponerse que esta explicación cubra el todo de las matemáticas y es evidentemente incompleta puesto que también hay desigualdades, que son más difíciles de explicar"[22]. Él sostiene asimismo que, así como está, la posición de Wittgenstein "es obviamente una concepción ridículamente estrecha de las matemáticas y la limita a la simple aritmética"[23]. Nuestra dificultad consiste en evaluar qué tan demoledora es la critica de Ramsey.

Yo pienso que la objeción de Ramsey apunta a una dificultad resoluble y, por lo tanto, que no constituye una *refutación* de lo afirmado por Wittgenstein. Lo único que muestra es que la concepción del *Tractatus* es de alcance limitado. Lo que ciertamente Ramsey *no* muestra es que esté en principio incapacitada para abarcar los sectores de las matemáticas de los que Wittgenstein no se ocupa, como por ejemplo la geometría. Por otra parte, es obvio que el ámbito fundamental para la especulación y la discusión filosóficas es el de los números naturales, puesto que otras clases de números son conjuntos de números naturales regidos por otras reglas. Por ejemplo, π es, digamos, 3.1416. Sus

[22] Ramsey, Frank P., "Review of '*Tractatus*'", en: Copi, Irving M. y Robert W. Beard (eds.), *Essays on Wittgenstein's Tractatus*, Londres: Routledge and Kegan Paul, 1966, p. 20.
[23] Ramsey, Frank P., *Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics*, editado por D.H. Mellor, Londres/Henley: Routledge and Kegan Paul, 1978, p. 168.

ingredientes, por así decirlo, son números naturales (3, 1, 4, 6), sólo que regidos por otras reglas que las de la aritmética elemental. Luego, la naturaleza del número de uno u otro modo depende de lo que se diga en relación con los números naturales. En cierto sentido, por consiguiente, la objeción de Ramsey es superable.

La otra parte de la objeción, a saber, que las igualdades no constituyen los fundamentos de las matemáticas, es algo que Ramsey nunca demuestra. Hay un intento de demostración de esto en su artículo "The Foundations of Mathematics", pero no es fácil ver su fuerza. Su idea es simple y es la siguiente: en aseveraciones en las que intervienen expresiones matemáticas, como por ejemplo, la afirmación de que "el cuadrado del número de los *u* es menor por 2 que el cubo del número de los *w*", parte de la aseveración es acerca de objetos y propiedades y parte acerca de signos (puesto que las reglas matemáticas son reglas para el uso de signos). Pero, entonces, la parte matemática no es un elemento veritativo-funcional de la oración completa, sino que entra más bien como una constante lógica. Y esta observación le basta a Ramsey para sostener que "la teoría de las matemáticas como identidades es totalmente inadecuada para explicar dicho uso de $m^2 = n^3 - 2$"[24]. Confieso que no veo en qué consista el problema para el *Tractatus*. Desde la perspectiva de Wittgenstein, la ecuación asevera que la operación efectuada sobre *m* produce el mismo número que la realizada con *n* cuando a su resultado se restan 2. Supongamos que $m = 5$ y que $n = 3$. Tenemos entonces que $5^2 = 3^3 - 2$, o sea, $25 = 27 - 2$. La explicación de Wittgenstein no parece enfrentar aquí ningún problema.

Quizá hayan sido elaboradas otras objeciones a las ideas de número y de ecuación desarrolladas en el *Tractatus*, pero debo decir que no las he encontrado. Ahora bien, si no me he alejado demasiado de la verdad, podríamos tal vez inferir que las criticas hechas, por así decirlo, desde fuera, no han sido particularmente certeras. ¿Significa ello que la filosofía de las matemáticas del *Tractatus* es inatacable? Creo que la respuesta tiene que ser matizada. En mi opinión, la debilidad fundamental del *Tractatus* no se debe ni mucho menos a ignorancia o a incomprensión de técnicas matemáticas por parte de su autor, sino que procede más bien del enfoque general, enteramente formal, de la primera filosofía de

---

[24] *Ibid.*, p. 170.

Wittgenstein. Me parece que podemos dar expresión a nuestra insatisfacción preguntando: a final de cuentas ¿para qué, según el *Tractatus*, sirven los números? Russell, por ejemplo, diría: los números sirven para contar. Empero, como bien observó Max Black, a diferencia de Russell, al Wittgenstein del *Tractatus* no parece importarle mayormente la idea de contar ni, en general, lo que de hecho se haga con ellos. Las ambiciones filosóficas de Wittgenstein eran, aunque mal encaminadas, de un carácter mucho más abstracto. Sin embargo, si nos despreocupamos del contar y, en general, de toda clase de cálculo, nos vuelve a asaltar la pregunta: ¿para qué o por qué queremos o necesitamos números? La respuesta de Wittgenstein es, en síntesis, que los números son esquemas que exhiben la forma lógica de las proposiciones. Nuestra pregunta, por lo tanto, nos conduce a otra, de la cual depende, *viz.*, ¿por qué en la práctica son importantes las formas lógicas, las formas *a priori* de los hechos contingentes conformados por los objetos de todos los mundos posibles? La respuesta es que el conocimiento de las formas lógicas es importante porque encarna el conocimiento supremo, esto es, el conocimiento, inexpresable proposicionalmente, de la estructura del mundo. Así, desdeñando toda respuesta que nos lleve por las vías de la practicalidad, el joven Wittgenstein se mueve más bien en la dirección de la contemplación, pero también, por qué no decirlo, del misterio. Es claro que para un genio que regresa a la filosofía una respuesta así no podía resultar aceptable por mucho tiempo. Su segunda filosofía, es bien sabido, se inicia con un ataque simultáneo sobre diversas nociones y posiciones del *Tractatus* y, a no dudarlo, una de las nociones que con mayor rapidez se vio desmantelada fue precisamente la de forma lógica. Con el derrumbe de dicha noción se abrieron las puertas de la posibilidad para la gestación de una nueva filosofía de los números. La idea del *Tractatus* de que los números son como esquemas proposicionales sobrevivió, sólo que al ser reubicada en el marco de una nueva concepción del lenguaje se transmutó. Estudiar la evolución del pensamiento de Wittgenstein sobre las matemáticas es ciertamente enriquecedor y apasionante. Naturalmente, dicho estudio rebasa los modestos objetivos que me planteé para este trabajo, por lo que no diré ya nada más al respecto.