ARETE. Vol. IV. Nº 2. 1992

LA FORMULA DE BARCAN ES EQUIVALENTE AL TEOREMA DE DEDUCCION

José Carlos Cifuentes Vásquez

"En esta nota discutimos una forma general del Teorema de Deducción (TD) para sistemas modales de primer orden, la cual permite derivar varias otras formulaciones del mismo que aparecen en la literatura, así como su relación con la Fórmula de Barcan".

"In this note we discuss a general form of the Deduction Theorem (DT) for first order modal systems, which permits to derive several other formulations of DT found in the literature, and their relationship with the Barcan's Formula".

El *teorema de deducción* (abreviado TD), probado por Herbrand en 1930, vale en varias versiones del cálculo de predicados, incluyendo las versiones con la Regla de Generalización (abreviado RG) en la forma de $A \vdash (\forall x)A$

Una de las formulaciones más generales de TD es la siguiente (cf. [Hamilton 1978], pp. 75): si $\Gamma, A \vdash B$ y RG no ha sido aplicado a ninguna variable libre de A, entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

Una versión más general está dada en [Kleene 1952], pp. 104, para sistemas de primer orden con la regla $B \rightarrow A \vdash B \rightarrow (\forall x)\, A$, donde x no está libre en B.

En esta nota nosotros discutimos esa forma general de TD para el caso modal, que permite derivar otras formulaciones de TD que se encuentran en la literatura y sus relaciones con la fórmula de Barcan (Véase [Hughes and Cresswell 1968]).

Nosotros tratamos algunos sistemas modales de primer orden (a saber, QK, QT, QK4, QS4, QB y QS5, definidos más abajo), con o sin la fórmula de Barcan.

El sistema Q, que es la base para otros sistemas, tiene el siguiente alfabeto: 1) $x, x_1, x_n, \ldots, y, \ldots$ como variables; 2) $\neg$, $\rightarrow$ y $\wedge$ como conectivas; 3) $\forall$ y $\exists$ como cuantificadores. Nosotros reservamos A, B,... como metavariables sobre fórmulas, y asumimos que todas las nociones sintácticas se definen al modo usual, salvo que se diga otra cosa.

Los axiomas y reglas para Q son las siguientes:
Q1) Todas ocurrencia de una tautología del cálculo proposional.
Q2) $(\forall x)\, A \rightarrow A\, (y)$, siendo y cualquier variable.

Q3) $(\forall x)$ (A —> B) —> (A —> $(\forall x)$B, para x no libres en A
MP) A —> B, A |— B (regla de Modus Ponens).
RG) A |— $(\forall x)$ A, siendo x cualquier variable (regla de Generalización)

Para la extensión modal de nuestro sistema, nosotros añadimos al lenguaje de Q el símbolo de necesidad $\Box$ y el símbolo de posibilidad $\Diamond$ definido como: $\Diamond$ A: = $\neg \Box \neg$ A.

Los axiomas y reglas que gobiernan las modalidades son los siguientes (cf. [Chellas 1980] y [Hughes and Cresswell 1968]):

K) $\Box$ (A —> B) —> ($\Box$ A —> $\Box$B)

T) $\Box$ A —> A

4) $\Box$ A —> $\Box\Box$ A

B) A —> $\Box\ \Diamond$ A

5) $\Diamond$ A —> $\Box\ \Diamond$ A

RN) A |— $\Box$ A (regla de necesidad o regla de Gödel)

FB) $(\forall x)$ $\Box$ A —> $\Box$ $(\forall x)$ A (fórmula de Barcan)

Llamamos la *conversa* de la fórmula de Barcan a la fórmula $\Box$ $(\forall x)$ A —> $(\forall x)$ $\Box$ A

Definición 1

Sea Γ u {A} un conjunto de fórmulas; la *relación de derivalidad* Γ |—A vale entre Γ y A si existen fórmulas $A_1,...,A_n$ tales que:

i) A_n es A,
ii) Para todo i=1,...,n, A_i es una axioma, o $A\varepsilon\Gamma$, o existen j, k < i tales que A_i es una consecuencia de A_j y A_k por MP, o A_i es una consecuencia de A_j por RG o RN.

El número n anterior es llamado *la longitud de la derivación.*

Nosotros señalamos que RG y RN, anteriores, pueden ser usadas sin ninguna restricción en $\Gamma \vdash A$, esto es, si $\Gamma \vdash A$ vale también valen $\Gamma \vdash (\forall x) A$ y $\Gamma \vdash \quad A$. Una versión más débil de la relación de derivabilidad, como usualmente se define, permite aplicaciones de RG y RN a teoremas solamente; es claro, sin embargo, que estas dos versiones son equivalentes para pruebas sin premisas, esto es, ambos sistemas prueban los mismos teoremas. La notación $\Gamma \vdash A_1 \vdash A_2 \vdash \ldots \vdash A_m$ significa $\Gamma \vdash A_1$ y $A_1 \vdash A_2$ y ... $A_{m-1} \vdash A_m$.

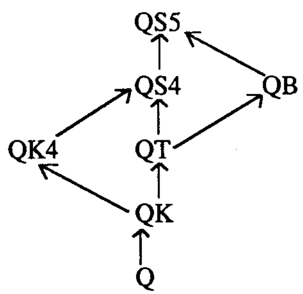
Definición 2

Los siguientes sistemas son definidos añadiendo los respectivos axiomas y reglas a Q:

QK:= Q + K +RN
QT:= QK + T
QK4:= QK + 4
QS4:= QT + 4
QR:= QT + B
QS5:= QT + 5

Los sistemas proposicionales correspondientes son definidos simplemente eliminando Q.

La siguiente interdependencia deductiva es bien conocida (cf. [Hughes and Cresswell 1968]):



Lema

Las siguientes derivaciones valen:

i) ***** En Q: $\bigwedge_{k=1}^{m} (A_k \to B_k) \mid\!\!- \bigwedge_{k=1}^{m} A_k \to \bigwedge_{k=1}^{m} B_k$ para $m \geq 1$

2) *** $\bigwedge_{k=1}^{m} A_k \to A \mid\!\!- \bigwedge_{k=1}^{m} (\forall x)A_k \to (\forall x)A$ para $m \geq 0$

3) *** $\underset{\sigma}{(\forall x)} \ldots (\forall x)A \Leftrightarrow (\forall x_{\sigma(1)}) \ldots (\forall x_{\sigma(n)})A$

para toda permutación de $\{1,...,n\}$

ii) **** En QK: $\bigwedge_{k=1}^{m} A_k \to A \mid\!\!- \bigwedge_{k=1}^{m} \Box A_k \to \Box A$ para $m \geq 0$

iii) **** En QK: $\Box^{k} (\forall x)A \to (\forall x)\Box^{k} A$ $k \geq 0$, donde $\Box^{o} A := A$ y $\Box^{k} A := \Box (\Box^{k-1} A)$

(Note que en n=1 proporciona la conversa de la fórmula de Barcan)

iv) En QB, y por tanto en QS5, vale la fórmula de Barcan.

Prueba (i) a (iii) son dejados al lector. Para (iv) véase {[Hughes and Cresswell 1968], pp. 145.

Definición 3

La relación de derivabilidad $\Gamma \mid\!\!-_{n}^{m} A$ vale si $\Gamma \mid\!\!- A$ y:

i) La regla RN ha sido aplicada m veces, $m \geq 0$, a fórmulas que no son teoremas, y

iii) La regla RG ha sido aplicada a las variables $x_1,... x_n$, $n \geq 0$, por lo menos una vez para cada variable de esta lista.

Teorema 1(Teorema de Dedución para QK)

$$**** \ \Gamma, A \vdash_n^m B \Rightarrow \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^k (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) A) \rightarrow B$$

Prueba. Por inducción sobre la longitud i de la deducción de B a partir de Γ y A.

i = 1
Caso 1. Si B es un axioma o B$\varepsilon\Gamma$ entonces el resultado es trivial.
Caso 2. Si B es A, entonces m = n = 0 y el resultado se sigue de $\vdash$ A —> A.

i > 1
Caso 1. Es análogo
Caso 2. Si B es A; el resultado sigue de:

$$***** \ \vdash \bigwedge_{k=1}^{m} \Box^k (\forall x_1) \ldots (\forall x_m) A) \rightarrow (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) \ A \rightarrow A)$$

Caso 3. Si B es una consecuencia de C —> B y C por MP y Γ, A $\vdash_n^m$ C, C —> B, el resultado sigue de la manera usual
Caso 4. B es una consecuencia de C por RN, ie. B es $\Box$ C
Subcaso 1. Si $\vdash$C: entonces el resultado si sigue de $\vdash \Box$ C, ie $\vdash$B
Subcaso 2. Si Γ, A $\vdash_n^{m-1}$ C, tenemos:

$$**** \ \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m-1} \Box^k (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) A) \rightarrow C \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m-1} \Box^{k+1} (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) A) \rightarrow \Box C$$

$$**** \ \text{del lema (ii), ie. } \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=1}^{m} \Box^k (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) A) \rightarrow B \vdash$$

$$**** \ (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^K (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) A) \rightarrow B$$

Caso 5. B es una consecuencia de C por RG
Subcaso 1. Si B es $(\forall xj)$ C, j=1,...,n y Γ, A $\vdash_n^m$C,

Tenemos:

$$**** \; \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A) \rightarrow C \vdash (\forall x_j) [\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A)$$

$$\rightarrow C] \vdash$$

$$**** \; (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A) \rightarrow (\forall x_j)C$$

Subcaso 2. Si B es $(\forall x_n)$ C y $\Gamma \vdash_{n-1}^{m}$ C, tenemos:

$****, \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} (\forall x_1)\ldots(\forall x_{n-1})A) \rightarrow C$, y por el lema (i)

$$**** \; \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} (\forall x_n) \Box^{k} (\forall x_1)\ldots(\forall x_{n-1})A) \rightarrow (\forall x_n)C$$

ahora bien, del lema (iii) tenemos:

$**** \; \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} (\forall x_n) (\forall x_1)\ldots(\forall x_{n-1})A) \rightarrow B$, y del lema (i),

$$**** \; \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A) \rightarrow B$$

Observación 1

En todos estos sistemas una especie de forma conversa del TD vale; por ejemplo, en QK tenemos:

$$***** \; \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A) \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, A \vdash_{n}^{m} B.$$

Corolario 1

i) Si m = 0 (en particular, en el sistema Q) tenemos la siguiente versión de TD:

$$\Gamma, A \vdash_{n} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall x_1)\ldots (\forall x_n) A \rightarrow B,$$

que implica la formulación de TD para el cálculo de predicados (véase la introducción)

ii) Si n = 0 (en particular, en el sistema proposicional K), nosotros tenemos:

$$**** \ \Gamma, A \ \vdash^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \ \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} A \rightarrow B$$

que ofrece una interpretación para el número m en la versión probada en [Czelakowski 1986), pp. 380.

Observación 2

Merece ser observado que nuestra versión $\Gamma, A \vdash^{m} B$ de (ii) arriba permite calcular un valor de m en la relación de esta manera el resultado de Czelakowski.

Puede ser interesante observar que el resultado de Czelakowski también puede ser probado usando la noción de Propiedades de la Consistencia, como en [Fitting 1983], pp. 78.

Colorario 2

En QK + FB lo siguiente vale:

$$***** \ \Gamma, A \ \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \ \vdash (\bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k_o}(\forall x_1)\ldots\Box^{k_{n-1}}(\forall x_n) \ \Box^{k_n}A) \rightarrow B$$

con $k_o + \ldots + k_n = k$

Prueba. Es suficiente notar que FB es esencial para la alternación entre $\Box$ y $\forall$

Teorema 2 (Teorema de Deducción en QT)

$$\Gamma, A \ \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \ \vdash \Box^{m} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n) \ A \rightarrow B$$

Prueba. Es suficiente notar que en QT tenemos: $\vdash \Box^{m} C \rightarrow \Box^{k} C$, k = 0,...m entonces por el lema (parte i) tenemos: $\vdash \Box^{m} C \rightarrow \bigwedge_{k=0}^{m} \Box^{k} C$

Corolario 3
Lo siguiente vale en T:

$$\Gamma, A \vdash^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Box^{m} A \rightarrow B$$

(Véase [Czelakowski 1985]; p. 375).

Colorario 4
Lo siguiente vale en QT + FB:

$$\Gamma. A \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Box^{ko} (\forall x_1) \ldots \Box^{kn-1} (\forall x_n) \Box^{kn} A \rightarrow B$$

con $k_o + \ldots + k_n = m$.

Teorema 3

Supóngase que S es el sistema deductivo que tiene a RG y RN entre sus reglas, entonces:

i) Si TD en la formulación de QT + FB vale en S, entonces la fórmula de Barcan vale en S.
ii) Si TD en la formulación de QT vale en S, entonces la conversa de la fórmula de Barcan vale en S.

Prueba. En el primer caso tenelos $A \vdash_{1}^{1} \Box (\forall x) A$, entonces por TD:

$\vdash (\forall x) \Box A \rightarrow \Box (\forall x) A$. El segundo caso es análogo.

Observación 3

El teorema anterior muestra que en QT (y en sus extensiones) FB y TD son equivalentes

Teorema 4 (Teorema de Deducción en QK4)

$$**** \ \Gamma, A \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{\varepsilon(m)} \Box^{k} (\forall x_1) \ldots (\forall x_n) A) \rightarrow B$$

**** donde $\varepsilon(m) = \begin{cases} 0, \text{ si } m = 0 \\ 1, \text{ si } m \neq 0 \end{cases}$

Prueba. Se deja al lector

Corolario 5
En K4 vale:

$$\text{****}\ \Gamma, A \vdash^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{\varepsilon(m)} \Box^{k} A) \rightarrow B$$

Corolario 6
En QK4 + FB vale:

$$\text{****}\ \Gamma, A \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\bigwedge_{k=0}^{\varepsilon(m)} \Box^{k_o} (\forall x_1)\ldots\Box^{k_{n-1}}(\forall x_n) \Box^{k_n} A) \rightarrow B$$

con $k_o + \ldots + k_n = k$

Teorema 5 (Teorema de Deducción en QS4)

$$\Gamma, A \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Box^{\varepsilon(m)}(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ A \rightarrow B$$

Prueba. Es inmediata a partir del teorema 2

Corolario 7
En S4 vale:

$$\Gamma, A \vdash_{n}^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Box^{\varepsilon(m)} A \rightarrow B$$

Corolario 8
En QS4 + FB vale:

$$\Gamma, A \vdash^{m} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Box^{ko}(\forall x_1)\ldots\Box^{kn-1}(\forall x_n) \Box^{kn} A) \rightarrow B$$

con $k_o + \ldots + k_n = \varepsilon\ (m)$

Observación 4

Vale la pena notar que, de acuerdo con nuestra prueba de TD (Teorema 1), si en un sistema S se aprueba TD, entonces en S^* también se prueba TD, si S^* es una extensión de S obtenida añadiendo nuevos axiomas pero no nuevas reglas.

En particular, tenemos que la formulación de TD tal como se obtiene en QT + FB (respectivamente QS4 + FB) es válida en QB (respectivamente QS5), ya que QB es QT + B y FB se puede probar en QB (del mismo modo para QS5).

Institute of Mathematics
University of Campinas.
Brasil

(Traducido del inglés por Oscar Trelles)

REFERENCIAS

Chellas, B.F.
1980 *Modal Logic: An introduction.* Cambridge Univ. Press. Cambridge.

Czelakowski, J.
1985 *Algebraix Aspects of Deduction Theorems.* Studia Logica Vol. 44 369-387.

Czelakowski, J.
1986 *Local Deduction Theorems.* Studia Logica Vol. 45. 377-391.

Firring, M. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics.* D. Reidel Pub. Comp. Dordrecht, Holland, 1983.

Hamilton, A.G.
1978 *Logic for Mathematicians.* Cambridge Univ. Press. Cambridge.

Hughes, G.E. and Gresswell, M.J.
1986 *An Introduction to Modal Logic.* Methuen and Co. Ltd., London.

Kleene, S.C.
1952 *Introduction to Metamathematics.* North Holland Pub. Comp. 1952.