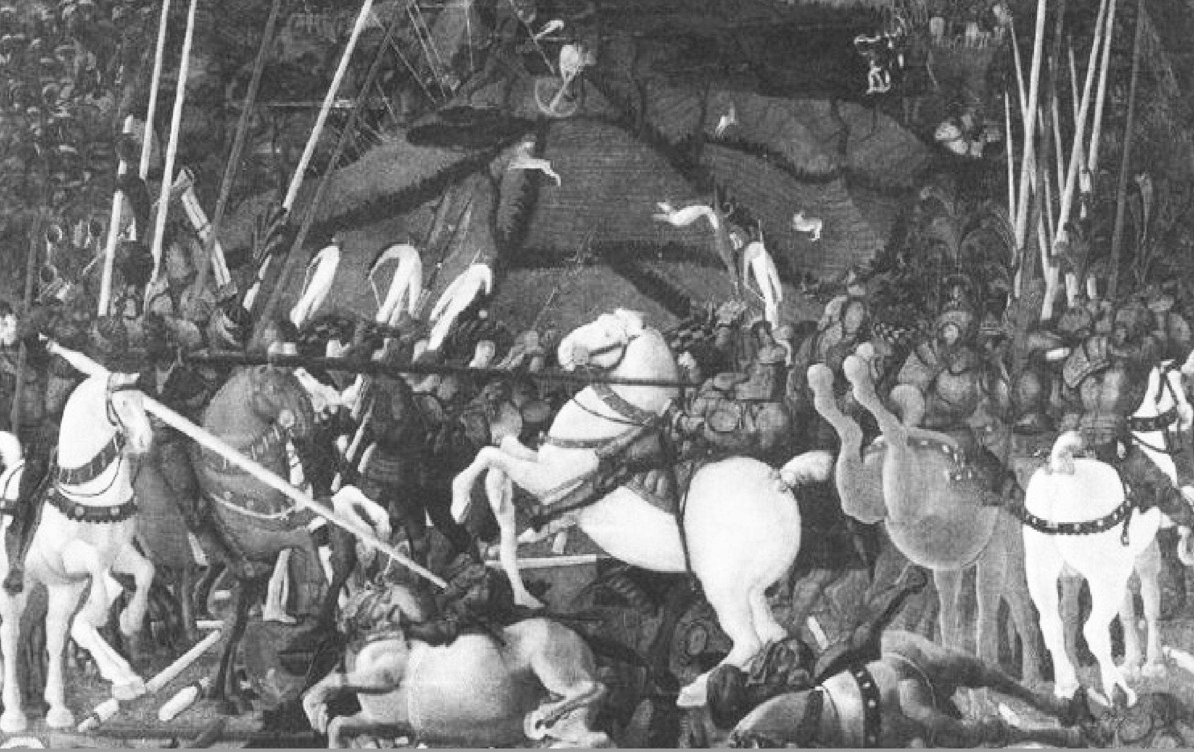

“La Batalla de San Romano”. Paolo Ucello. Galeria de los Uffizi. Florencia (Italia).

PERSPECTIVA Y GEOMETRÍA PROYECTIVA

JORGE MOZO FERNÁNDEZ

El presente trabajo es un resumen de las lecciones sobre introducción a la geometría proyectiva, impartidas en la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Pontificia Universidad Católica del Perú entre septiembre y octubre de 2007, y cuya versión completa será objeto de una publicación posterior. Nuestra propuesta busca introducirse en las construcciones geométricas habitualmente empleadas en dibujo técnico y en geometría descriptiva, a través de las diferentes técnicas que proporciona la geometría proyectiva.

Es bastante conocido que los antiguos griegos realizaron importantes avances en el estudio de la Geometría, fundamentalmente en lo que se refiere al campo de las construcciones geométricas. En efecto, los problemas matemáticos que suscitaban el mayor interés en ellos eran aquellos que “se podían construir”, entendiendo por esto “construir con regla y compás”, el género más simple de instrumentos a su alcance.

La geometría básica emplea conceptos como distancia, ángulos, paralelismo, incidencia, etc., pudiendo clasificar los distintos problemas geométricos en función de cuáles de éstos se utilizan. Por nuestra parte, serán de interés, dentro del estudio de las construcciones geométricas, fundamentalmente las propiedades proyectivas de las figuras.

Si realizamos una construcción geométrica sobre la base de líneas rectas, ésta debe ser “invariante por proyecciones”; es decir, que si proyectamos nuestra construcción por medio de un foco de luz sobre otra hoja de papel, debemos obtener una construcción similar.

La geometría proyectiva trata este tipo de construcciones y propiedades y permite una justificación rigurosa de muchas de las construcciones geométricas que se emplean habitualmente en dibujo técnico con el nombre de "perspectiva". No perdamos de vista el hecho de que cuando pretendemos representar en papel (dos dimensiones) una imagen del mundo real e intentamos que esta representación sea realista, lo que hacemos es proyectar sobre un plano el espacio tridimensional desde un punto de vista que corresponde al ojo. Esto debe responder a unas reglas geométricas precisas para garantizar el realismo de la construcción. No es de extrañar, pues, que buena parte de las reglas de la geometría proyectiva hayan sido desarrolladas a lo largo del Renacimiento por los artistas que hicieron del uso de la perspectiva un elemento fundamental de su arte.

En el minicurso origen de este trabajo, pretendimos desarrollar la geometría proyectiva sin necesidad de utilizar coordenadas. Los principales conceptos se introducen de manera intrínseca y, a partir de ellos, se irán deduciendo las propiedades útiles para justificar las construcciones geométricas que se desarrollen. Pese a prescindirse de las nociones de distancia o ángulo (no invariantes por proyecciones), la geometría proyectiva permite deducir varias propiedades de carácter métrico, algo que *a priori* puede parecer sorprendente.

Es nuestro modesto objetivo despertar la curiosidad del lector por esta bella disciplina, la cual es un paradigma de la interesante relación existente entre el arte y las matemáticas. Deseamos agradecer a la Pontificia Universidad Católica del Perú por su calurosa acogida y por la oportunidad de dictar el curso, y en particular, a la Facultad de Arquitectura y Urbanismo, el Departamento de Matemáticas y al profesor Francisco Ugarte.

1. PERSPECTIVA Y GEOMETRÍA EN LA HISTORIA

El nacimiento de la perspectiva, o lo que es lo mismo, de la geometría proyectiva en su uso artístico, se produce fundamentalmente durante el Renacimiento. La representación fiel de la realidad fue una obsesión de los artistas de esta época, especialmente de los pintores, quienes ansiaban plasmar en el papel (bidimensional) figuras de la vida real (tridimensionales) de la forma más cabal.

Paolo Uccello (1394-1475), quien pinta el tríptico de *La batalla de San Romano*, fue uno de los pioneros en la búsqueda de la perspectiva y sus leyes matemáticas. En ese cuadro, él sitúa diversas figuras en escorzo en los primeros planos y juega con las posiciones de las lanzas con el objeto de dar sensación de profundidad.

Filippo Brunelleschi (1377-1446), el arquitecto de la catedral de Florencia, entre otras grandes obras, es el primero que desarrolla la noción de perspectiva lineal: ésta toma como punto de referencia el ojo humano. De él, tenemos la pirámide visual en forma de rayos, la cual corta un plano (el del dibujo) sobre el que se representa la imagen tridimensional. Sus conocimientos de perspectiva los plasmó en unas tablas, hoy perdidas, que sólo se conocen por descripciones de sus coetáneos. En éstas, representaba el Baptisterio y la Piazza della Signoria, en Florencia, empleando para ello sus conocimientos de óptica y matemáticas. Otros artistas pioneros en el uso de la perspectiva son Masaccio (del cual ilustramos en la Figura 3 uno de sus cuadros más representativos), Giotto y Rafael.

El primer tratado de la representación perspectiva que se conoce es *De pictura*, publicado por Leon Battista Alberti (1404-1472) en 1435. El problema central de esta representación es el trazado de ortogonales, y más concretamente, el dibujo de un embaldosado. La regla de la convergencia de líneas paralelas ya había sido utilizada en obras anteriores y él la asume como propia. En los pasos que propone Alberti en su construcción, y que forman parte del libro I.19, ya se encuentran implícitos los conceptos de punto de fuga principal (central), pirámide visual y línea de horizonte.

Alberti no proporciona argumentos matemáticos que justifiquen esta construcción, pero ofrece un medio de comprobarla: trazando las diagonales del embaldosado dibujado. Esta última regla hace pensar que él era consciente del hecho de que las imágenes proyectivas de una recta dada debían ser rectas.

Figura 1: Demostración de perspectiva en "La Última Cena" (1955). Salvador Dalí. Galería Nacional de Arte. Washington D.C. (E.E.U.U.). Elaboración: Jorge Mozo.

Piero della Francesca (1416-1492) escribe *De prospectiva pingendi*, tratado en el cual intenta explicar por qué las construcciones funcionan. En particular, elabora una teoría de proporciones para determinar la longitud con la que debe pintarse un segmento dado perpendicular al plano del cuadro.

Diversas críticas se hicieron a este concepto de perspectiva, algunas de ellas fundadas en que se ignora la curvatura del campo visual, así como la visión binocular. Pero es esta noción, la de intersección de la pirámide visual con un plano, la que da lugar a las construcciones que fundamentan la geometría proyectiva. No podemos dejar de mencionar el *Trattato della pittura* de Leonardo da Vinci (1452-1519), en el que define tres tipos de perspectiva: "*... el primero consiste en la disminución del tamaño según la distancia; el segundo en la disminución de la percepción de estos objetos, y el grado de precisión que estos deben exhibir a varias distancias.*" Así mismo, un ejemplo notable del tratamiento de la perspectiva en la pintura contemporánea lo encontramos en el cuadro La Última Cena, de Salvador Dalí (1955).

Las bases están echadas, y un largo camino matemático que pasa por Girard Desargues, Guidobaldo del Monte, Blaise Pascal, von Staudt, Chasles, y llega hasta Gaspard Monge y Jean-Victor Poncelet, desarrolla la actual geometría proyectiva, algunos de cuyos principios matemáticos nos proponemos describir de manera breve, así como ejemplos de construcciones geométricas que pueden justificarse con la ayuda de esta disciplina.

2. INTRODUCCIÓN A LAS CONSTRUCCIONES E INVARIANTES PROYECTIVAS

Definiendo el plano afín como el plano en el que estamos habituados a hacer geometría, tomamos dos planos no paralelos π_1 y π_2. La proyección de π_1 sobre π_2 supone la proyección de una recta del primero sobre otra del segundo. Llamamos "plano proyectivo" al plano ampliado de esta forma.

En el plano proyectivo, se verifica las siguientes propiedades básicas:

- Dos rectas distintas se cortan siempre en un único punto. Desaparece así la distinción entre rectas concurrentes y rectas paralelas.

- Por dos puntos pasa una única recta. Uno de estos puntos puede ser un punto del infinito, el cual identificamos con una dirección en el plano; en este caso, la recta buscada es una recta que pasa por un punto P del plano afín, y lleva la dirección definida por el punto del infinito.

  Este tipo de proyección de una recta en otra, es el que corresponde a la *perspectiva lineal* empleada por Alberti. Llamaremos “perspectividad” de origen P entre r y s a la aplicación que hemos definido.

Dadas dos rectas r y s, una aplicación $\pi : r \to s$ es una proyectividad si existen rectas $r_0 = r, r_1, \ldots, r_n = s$, y perspectividades $\pi_i : r_i \to r_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, tales que $\pi = \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_0$.

De manera análoga, podemos dar definiciones en el espacio tridimensional hablando de perspectividades y proyectividades entre planos. Ya Alberti advirtió que determinados entes geométricos (distancias, ángulos) varían al aplicar proyectividades sobre ellos. Poncelet considera como fundamental el problema de hallar invariantes por proyectividades:

> *Si, por tanto, una figura de un tipo particular gozase de ciertas propiedades métricas, no se podrá afirmar a priori, sin examen previo, ni que estas propiedades subsisten, ni que cesan de subsistir en las diversas proyecciones de la figura primitiva. Ahora bien, se siente la importancia que tendrá poder reconocer de antemano, si tal o tal relación examinada es o no es de naturaleza proyectiva; ya que resultara que, habiéndose probado esta relación para una figura particular, se podrá a continuación extenderla a todas las proyecciones posibles de esta figura.*

Para determinar qué significa invariante por proyectividades, consideremos, en primer lugar, la proyección paralela, buscando esta propiedad para proyecciones entre rectas. Si r, s son dos rectas paralelas, y A, $B \in r$, A, $B' \in s$. Dados los puntos A, B, C, si definimos

$$(ABC) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

entendiendo las distancias $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ como distancias orientadas (es decir, en términos vectoriales, $(ABC) = \lambda$ significa

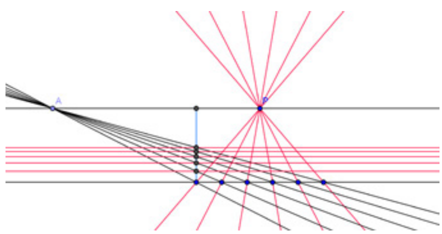

Figura 2: construcción de Alberti.

que $\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{AC}$), la razón anterior no varía aplicando una perspectividad entre rectas paralelas. Llamaremos, entonces, “razón simple” al número definido.

Sin embargo, tres puntos no bastan para definir un invariante por proyectividades.

Tomando ahora dos rectas r, s cualesquiera, y dados cuatro puntos A, B, C y D alineados, definimos su razón doble como:

$$[A,B,C,D] = \frac{(ABD)}{(BCD)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}.$$

La razón doble resulta ser un invariante por proyectividades arbitrarias. Con más precisión: si $\pi : r \to s$ es una proyectividad entre dos rectas, se verifica que

$$[A,B,C,D] = [\pi(A), \pi(B), \pi(C), \pi(D)]$$

para puntos cualesquiera A, B, C, D en r. Asimismo si r, s son rectas

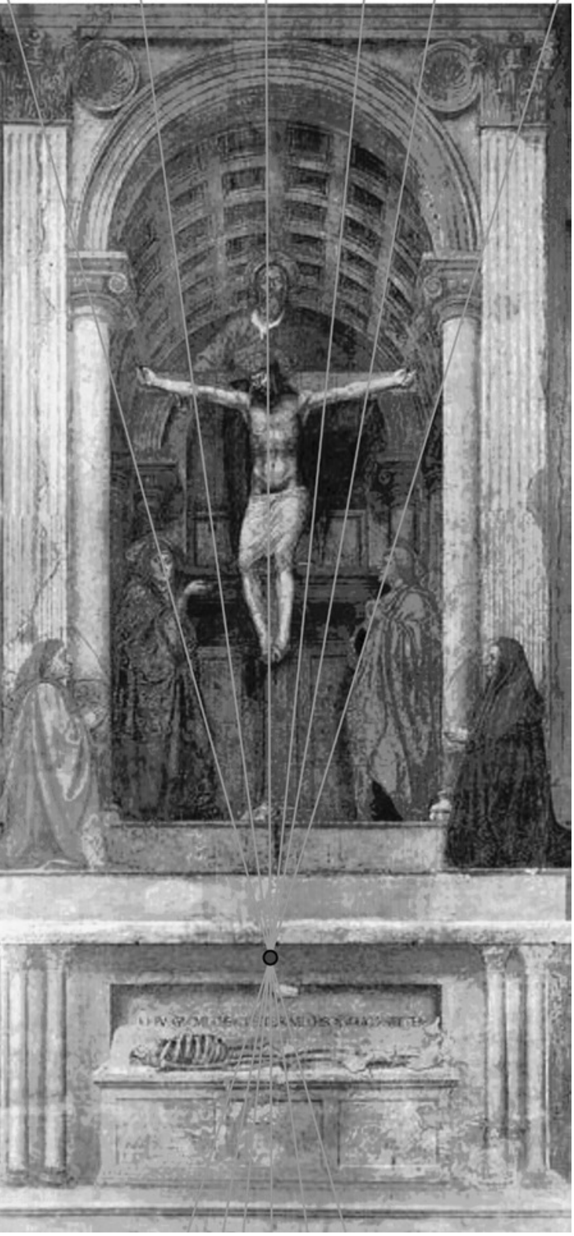

Figura 3: Demostración de perspectica en “La Trinidad”. Masaccio. Iglesia de Santa María Novella. Florencia (Italia). Elaboración: Jorge Mozo.

distintas, y $\pi : r \to s$, una proyectividad cualquiera, entonces π se puede escribir como composición de a lo más dos perspectividades $\pi_1 : r \to t$, $\pi_2 : t \to s$. La recta t no depende de los puntos que hayamos elegido para construirla y se denomina “eje de la proyectividad”.

La razón doble resulta ser el único invariante de una proyectividad, es decir, lo único que se conserva (salvo, evidentemente, cualquier invariante que se construya a partir de ella) por proyecciones arbitrarias entre rectas. Con más precisión: si $\pi : r \to s$ es una biyección entre rectas que conserva la razón doble, entonces necesariamente π es una proyectividad.

2.1. APLICACIÓN GRÁFICA

Pretendemos dibujar una vía de ferrocarril en perspectiva, en la cual, las traviesas se suponen equiespaciadas tal como se ilustra en la Figura 5.

Se dibuja tres traviesas, dejando como interrogante el dónde dibujar las demás. Existe una única proyectividad π que lleva A_i en A_i', $i = 1,2,3$. Así, para $i > 3$, colocaremos A_i' como $\pi(A_i)$, donde los puntos A_i los hemos tomado equiespaciados en otra recta auxiliar. El diagrama de la Figura 6 representa una manera cómoda de hacer esta construcción.

La perspectividad desde P es la proyección buscada y nos permite definir los puntos sobre los cuales construir los travesaños.

3. ALGUNAS CONSTRUCCIONES PROYECTIVAS CLÁSICAS

Algunos resultados proyectivos clásicos constituyen la base de varias de las más conocidas construcciones gráficas matemáticas. El primero de ellos corresponde al teorema de Pappus. Este afirma que: si r, s son dos rectas y A, B, C, D, E, F seis puntos situados alternativamente en ambas rectas (un hexágono), entonces los puntos $P = AB \cap ED$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap AF$ están alineados.

Observamos que la recta t sobre la que yacen P, Q, R no es más que el eje de la proyectividad que lleva A en D, E en B y C en F.

En segundo lugar, tenemos el teorema de Desargues, mediante el cual se afirma que si $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ son dos triángulos proyectivos (es decir, tales que las rectas AA', BB', CC' son concurrentes), entonces los puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$, $R = BC \cap B'C'$ están alineados.

Observamos en el dibujo que el resultado es claro si suponemos los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ situados en planos distintos, y O un punto exterior a ambos planos desde el cual proyectamos un triángulo sobre otro. En este caso, P, Q, R están sobre la recta de corte de ambos planos.

La tercera construcción es la cuaterna armónica. Situemos tres puntos A, B y C sobre una recta y construyamos un cuadrilátero como en la Figura 4. Llamamos D al punto de corte de la recta con la diagonal restante del cuadrilátero.

Mediante el uso del teorema de Desargues, puede verse que este punto D es independiente del cuadrilátero dibujado,

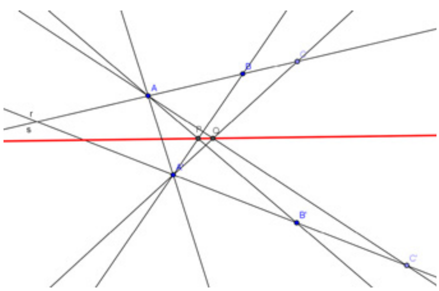

Figura 4: proyectividad que lleva tres puntos dados en tres puntos dados

y se denomina el cuarto armónico de A, B y C. Tiene, además, la propiedad de que $[A,B,C,D] = -1$. Se dice que cuatro puntos cualesquiera que verifiquen esta última condición forman una cuaterna armónica. Esta construcción muestra que el cuarto armónico puede realizarse con el único uso de una regla. El geometra clásico tenía gran interés en determinar qué objetos geométricos podían construirse con regla y compás. Son construibles con el único concurso de la regla aquellos objetos que no varían al proyectarse, puesto que las proyecciones conservan rectas, pero no paralelismos ni ángulos. El lugar natural para estudiar este tipo de construcciones es el plano proyectivo.

3.1. ALGUNAS OBSERVACIONES Y PROPIEDADES

El teorema de Pappus no es más que un caso particular del resultado conocido como "teorema del hexágono místico de Pascal sobre una cónica": los lados opuestos de un hexágono inscrito sobre una curva cónica se cortan en puntos alineados. El estudio de las cónicas es uno de los temas más apasionantes que pueden abordarse mediante el uso de la geometría proyectiva.

b. El teorema de Desargues nos permite, entre otras cosas, dar solución a problemas como: dadas dos rectas que se cortan en un punto inaccesible, y un punto P exterior a ambas, trazar por P una recta que sea concurrente con las dos anteriores.

Los triángulos ΔABC, $\Delta A'B'C'$ son perspectivos; de donde, aplicando el teorema de Desargues, la recta por P y Q es concurrente con el punto de intersección de r y s.

c. Un caso particular de cuaterna armónica se produce cuando C es el punto medio de A y B. En este caso, el cuarto armónico es el punto del infinito r_∞:

$$[A,B,C,r_\infty] = \frac{\overline{AC}}{\overline{Ar_\infty}} \cdot \frac{\overline{Br_\infty}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -1$$

Esta observación permite extraer la siguiente consecuencia: no es posible, mediante el uso único de una regla, hallar el punto medio de dos puntos dados, o

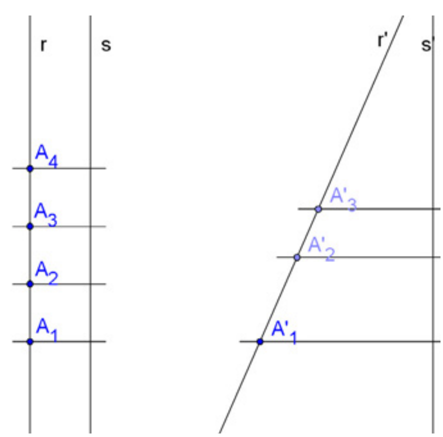

Figura 5: va en auténtica dimensión a la izquierda, y en perspectiva a la derecha.

bien, trazar una recta paralela a una recta dada. Pero si se conoce uno de estos objetos, puede trazarse el otro usándola. Es decir, si tenemos A, B puntos sobre una recta r y conocemos una recta r' paralela a r, es posible, usando sólo una regla, hallar el punto medio de A y B.

d. Sea C una curva cónica y P un punto exterior a ella por el que puedan trazarse rectas t_1 y t_2 tangentes a C, con puntos de contacto respectivos P_1 y P_2. La recta s definida por P_1 y P_2 se llama *recta polar* de P respecto de C. Las polares de todos los puntos de una misma recta son concurrentes en un punto llamado "polo" de dicha recta. Este punto puede, entonces, construirse con regla y compás.

Si ahora r es una recta cualquiera por P, que corta a C en Q_1 y Q_2, y a s en, los puntos Q_1, Q_2, P, R forman una

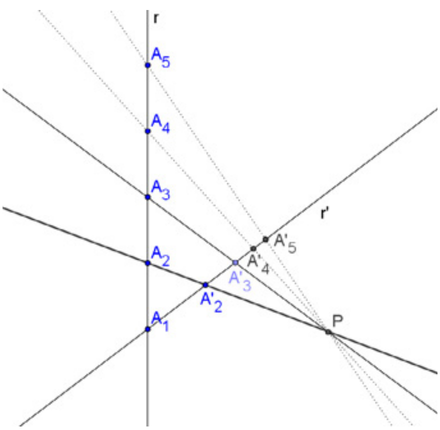

Figura 6: situamos la recta *r*, de tal forma que A_1=A_1, para simplificar el dibujo.

cuaterna armónica, lo cual nos permite realizar algunas construcciones. Así por ejemplo, en el caso de que tomemos la recta del infinito, el polo de dicha recta resulta ser el centro de la cónica. Puede, por tanto, construirse el centro de una elipse o de una hipérbola usando regla y compás.

4. OTRAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS DE CARÁCTER PROYECTIVO

La geometría proyectiva, como vemos, puede utilizarse para justificar numerosas construcciones geométricas clásicas con regla y compás. Sin entrar en detalles, llamamos "construcciones de primer grado" a las que pueden realizarse con el único empleo de la regla y "de segundo grado" a las que precisan de la regla y el compás. La justificación de esta denominación proviene de la geometría algebraica: las rectas se definen por ecuaciones de primer grado y las circunferencias por ecuaciones de segundo grado. Para concluir, pondremos algún ejemplo de dichos casos relacionados con la teoría de las cónicas. Éstas son las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano, de donde se infiere que son proyecciones de una circunferencia (curva obtenida cortando un cono con un plano perpendicular al eje) desde el vértice del cono.

Aplicando el teorema del hexagrama místico de Pascal sobre una cónica a una solución gráfica, tenemos que: conocidos cinco puntos de una cónica[1] y una recta

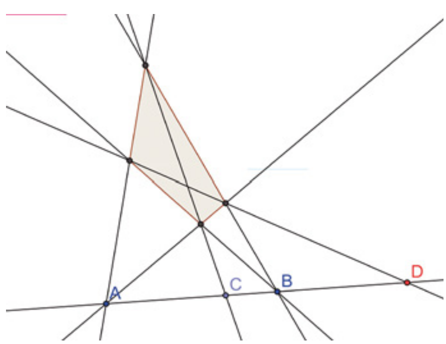

Figura 7: construcción de la cuaterna armónica.

r que pasa por uno de ellos, hallar el otro punto de corte de r con la cónica.

Para ello, seguimos el esquema de la Figura 8, considerando el hexágono $ABCDEZ$, donde Z es el punto buscado. Es éste un problema de primer grado.

Si el problema hubiese sido calcular los dos puntos de corte con la cónica de una recta r cualquiera (que no pase por nin-

1. Por cinco puntos, cuatro de ellos no alineados, pasa una única cónica.

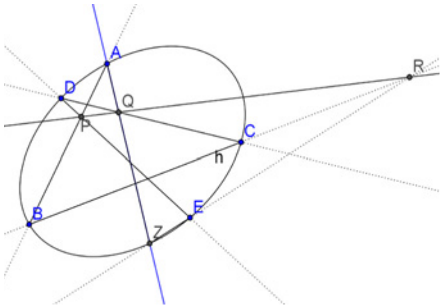

Figura 8: construcción de puntos de una cónica, usando el teorema de Pascal.

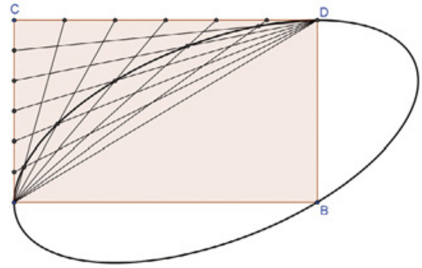

Figura 9: construcción de puntos de una elipse.

guno de los cinco puntos conocidos), se hubiera tratado de uno de segundo grado. La solución puede resultar lo suficientemente conocida para cualquier estudiante de dibujo lineal cuando la cónica en cuestión es una circunferencia. El caso general puede construirse a través de éste utilizando técnicas proyectivas: cualquier cónica puede obtenerse por medio de proyecciones a partir de una circunferencia.

La teoría de las cónicas proyectivas es fuente inagotable de problemas geométricos. El texto [S] es una referencia excepcional para introducirse en ellos, de los cuales tenemos los siguientes ejemplos:

- Conocidas cuatro rectas tangentes a una parábola, hallar el eje de ésta.
- Conocidas las dos asíntotas de una hipérbola y un punto adicional de ésta, hallar gráficamente nuevos puntos de la hipérbola.
- Construir los ejes de una elipse o de una hipérbola de la que conocemos cinco puntos.

Los dos primeros problemas son de primer grado y el último, de segundo. Construcciones gráficas habituales pueden justificarse mediante el uso de estas técnicas. Como ejemplo, la Figura 9 representa una construcción gráfica de puntos de una elipse que puede justificarse con técnicas proyectivas: se trata de hallar las intersecciones de dos haces de rectas, uno de los cuales puede obtenerse a partir del otro por medio de una cadena de proyecciones.

5. CONCLUSIÓN

Los ejemplos mostrados son una muestra, necesariamente incompleta, del poder de la geometría proyectiva, de su interesante relación con el mundo del Arte, así como de su utilidad para dotar de una justificación matemática a las construcciones habitualmente desarrolladas en geometría descriptiva. Esperamos que los ejemplos expuestos despierten la curiosidad del lector por profundizar en esta disciplina, o de forma más general, en la interrelación de las matemáticas con las disciplinas de carácter artístico.

REFERENCIAS

[A] Alberti, L. B. *De pictura*. (Hacia 1435. Impreso por primera vez en 1540).

[An] Andersen, K. (2007). *The geometry of an art. The history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge*. Springer.

[Ar] Aroca, J.M. (1997). *Introducción a la geometría proyectiva y geometría algebraica*. Pro Mathematica XI, Nº 21-22, 131-216.

[C] Coxeter, H.S.M.(1971). *Fundamentos de geometría*. Limusa.

[E] Enriques, F. *Lecciones de geometría proyectiva*. Ediciones de los Estudiantes Españoles.

[P] Poncelet, J.V. (1822). *Traité des propriétés projectives des figures; ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géometriques sur le terrain*. Paris, Bachelier Librairie.

[PA] Puig Adam, P. (1981). *Curso de geometría métrica*. Tomo II-Complementos. Edición del autor.

[S] Santaló, L.A. (1966). *Geometría proyectiva*. Eudeba.