VOLUMEN XI/No. 21 JUNIO 1988

ECONOMIA

INDICE

LA TEORIA DE PRODUCCION CONJUNTA DE SRAFFA: UN ANALISIS CRITICO

R. GARCIA-COBIAN*

1. *INTRODUCCION*

El propósito del presente trabajo es el de continuar lo ya iniciado en García-Cobián [1983] en donde se consideró la teoría de producción disjunta de Sraffa, analizándose ahora su teoría de producción conjunta.

La importancia de tal propósito para la teoría económica es obvia, pues no puede profundizarse ni extenderse una teoría si no es precisando sus afirmaciones y corrigiendo sus errores cuando se los detecte.

2. *PRODUCCION CONJUNTA*

Ver Sraffa [1960], Ch. VIII.

El escenario mercantil consiste en n mercancías que se fabrican en n industrias mediante trabajo simple e insumos que son las mismas n mercancías.

Se entiende por "producción conjunta" un sistema de procesos industriales en el que hay, por lo menos, uno que produce dos o más mercancías.

* Profesor del Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Dicta Cursos en la facultad de Ciencias e Ingeniería y en la de Ciencias Sociales.
El presente trabajo se ha realizado con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y con el apoyo científico del Instituto Peruano de Investigación científica.

Podría ocurrir que hubiese menos procesos que mercancías, por esta razón; de ser así, no podrían determinarse los precios unívocamente, pues habría menos ecuaciones que incógnitas. Con el fin de evitar esta clase de dificultades, asume Sraffa que el número de procesos es igual al de mercancías.

ASUNCION 1: El número de procesos industriales es igual al de mercancías producidas. En el contexto de la producción conjunta un proceso industrial tiene que especificarse indicando las cantidades utilizadas como insumos y las cantidades producidas. Así, el i-ésimo proceso será representado por un punto de $\bar{\mathbb{R}}_+^{2n+1}$ [1] a saber:

$$(a_{1i}, \ldots, a_{ni};\ b_{1i}, \ldots, b_{ni};\ l_i)$$

donde a_{ji} denota la cantidad de la mercancia j que en el proceso i se utiliza como insumo, y b_{ji}, la cantidad de la misma mercancía que se produce en dicho proceso. Además, l_i, denota la cantidad de trabajo requerida por el proceso i. Obviamente,

$$l_i \geqq 0 \ \wedge\ a_{ji} \geqq 0, \ \wedge\ b_{ji} \geqq 0,\ \forall j,i \text{ de } N_n$$ [2]

Si r designa la tasa de ganancia, que se supone la misma para todas las industrias, y $p_i \ldots, p_n$ denotan los precios de las mercancías y w el del trabajo, entonces la ecuación del valor monetario de la producción con la suma de los valores monetarios de los insumos, del trabajo y la ganancia, es para el k-ésimo proceso.

$$(1 + r) \sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{ik} + w\, l_k = \sum_{i=1}^{n} p_i\, b_{ik}$$

El conjunto de las n ecuaciones correspondientes a los n valores que puede tomar k, se puede representar más concisamente en notación matricial si se introduce la notación:

1] Se usará la notación según la cual $\mathbb{R}_+$ designa al conjunto de los números reales estrictamente positivos, en tanto que $\bar{\mathbb{R}}_+$ designa al de los "innegativos", es decir, al de los que no son negativos.

2] $\mathbb{N}_n$ denota al conjunto de los n primeros números naturales $\{1, \ldots, n\}$.

$p := (p_1, \ldots, p_n)$, $l. = (l_1, \ldots, l_n)$, $= A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{in} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} \ldots b_{in} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \ldots b_{nn} \end{bmatrix}$

El sistema de ecuaciones es, pues, el siguiente:

$(1 + r)\, p\, A + w\, l = p\, B.$ (2.1)

En lo sucesivo se representará un sistema Sraffiano por el triple (A, B, l).

3. *EL SISTEMA PATRON EN PRODUCCION CONJUNTA*

A continuación, se propone Sraffa construir un "sistema patrón" multiplicando, dice, cada ecuación por un número convenientemente elegido, de manera que en definitiva, en el nuevo sistema así obtenido resulte que las cantidades totales de cada mercancía utilizadas como insumos sean proporcionales a las cantidades de ellas producidas en total. De manera más precisa, lo que se quiere es hallar números $c_1, \ldots, c_n$ tales que si los nuevos procesos son:

$(c_i a_{1i}, \ldots, c_i a_{ni}; c_i b_{1i}, \ldots, c_i b_{ni}; c_i l_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$

entonces $$\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\, a_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} c_i\, b_{1i}} = \ldots = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\, a_{ni}}{\sum_{i=1}^{n} c_i\, b_{ni}}$$

Nuevamente, puede decirse esto de manera más concisa como sigue:

Definición:1: Un "*sistema patrón*" correspondiente al sistema (A, B, l) es cualquier otro que se obtenga a partir de él mediante algún $(c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n_+$ del siguiente modo: (AC, BC, lC), donde C es la matriz diagonal n x n definida por:

$$C_{ij} := c_i \, \delta_{ij} \quad \forall i \text{ de } \mathbb{N}_n{}^{(3)};$$

de modo que haya algún número positivo ρ tal que si c denota al vector columna de componentes $c_1, \ldots, c_n$, se dé que:

$$A\,c = \rho\, Bc \tag{3.1}$$

Dice Sraffa que algunos de los multiplicadores c_i pueden ser negativos:

> "As soon as we consider in detail the construction of an Standard system with joint products, it becomes obvious that some of the multipliers may have to be negative". (Sraffa [1960], p. 47).

Que en efecto pueda ser así se muestra mediante el siguiente ejemplo. Sea $n = 2$; la proporción en que ambos bienes se producen es, para el sistema original, $(b_{11} + b_{12}) / (b_{21} + b_{22})$; pero para el sistema obtenido del original mediante los multiplicadores c_i, es $(b_{11}\, c_1 + b_{12}\, c_2) / (b_{21}\, c_1 + b_{22}\, c_2)$, que en general es diferente de la proporción anterior. Para determinar el rango de variación de tal proporción, considérese la función definida por:

$$F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \frac{b_{11}\, s + b_{12}}{b_{21}\, s + b_{22}}$$, donde $s := c_1/c_2$, si ambos coeficientes son positivos.

3] δ_{ij} es el "delta de kronecker", cuyo valor es cero si $i \neq j$, pero es uno si $i = j$. Así,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0_3 & c & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

Es inmediato verificar que $\lim_{s \to 0} F(s) = b_{12}/b_{22}$, que $\lim_{s \to \infty} F(s) = b_{11}/b_{21}$ y que $F'(s) = (\det B)/(b_{21}\, s + b_{22})^2$. Esto muestra que F es monótona y que su rango de valores es el intervalo abierto de extremos b_{12}/b_{22} y b_{11}/b_{21}. Nótese de paso que así se justifica lo afirmado por Sraffa en el punto 53 de su capítulo VIII de Sraffa [1960], a saber:

> "Take for example the case of two products jointly produced by each of two different methods. The possibility of varying the extent to which one or the other method is employed ensures a certain range of variation in the proportions in which the two goods may be produced in the aggregate. But this range finds its limits in the proportions in which the two goods are produced respectively by each of the two methods, so that the limits are reached as soon as one or the other method is exclusively employed".

Bien podría ocurrir que la matriz de coeficientes de insumos, A, fuera tal que $\forall\ c \in \mathbb{R}_+$, $(a_{11}\, c_1 + a_{12}\, c_2)/(a_{21}\, c_1 + a_{22}\, c_2)$ fuese mayor que el máximo de $[\, b_{11}/b_{21}, b_{12}/b_{22}]$; en tal caso no sería posible, mediante coeficientes sólo positivos, construir un sistema patrón. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

entonces las proporciones de insumos y productos para las mercancías 1a. y 2a. serían, respectivamente, $(c_1 + \frac{1}{2}\, c_2)/(\frac{3}{4}\, c_1 + \frac{c_2}{10})$ y $(3c_1 + c_2)/(c_1 + 2\, c_2)$. Como los rangos de variación de estas razones, para valores positivos de c_1 y c_2 son, respectivamente, $]4,5[$ y $]\frac{1}{2}, 3[$, se ve que no hay ningún c $\mathbb{R}^2_+$ que permita obtener un sistema patrón. Luego sólo sería esto posible si se permitiera que alguno de los coeficientes tomara valor negativo (precisamente, con $c_2 = 1$ y $c_1 = -3.9 + 0.3\ \sqrt{129} < 0$ se podría).

Obsérvese que no es exacta la afirmación de Sraffa:

> "Now suppose that in all cases in which two joint products "a" and "b" are used as means of production, the proportion in which "a" is *employed* relatively to "b" is invariably higher than the highest of the proportions in which it is *produced*. In such circumstances we can say from the outset that some process must enter the Standard system with a negative multiplier: but whether such a multiplier will have to be applied to the low producer or to a high user of commodity "a" cannot be determined *a priori*-it can only be discovered by the solution of the system" (Sraffa [1960], p. 47).

En efecto, cuando sólo hay dos mercancías la negatividad del cociente c_1/c_2 es compatible tanto con el caso $c_1 > 0 > c_2$ como con $c_2 > 0 > c_1$; así, es posible decidir *a priori* cuál de los multiplicadores será el negativo y cuál el positivo.

Por otra parte, en caso que B sea inversible, el sistema patrón de coeficientes positivos podrá formarse si, y sólo si, la matriz $B^{-1}A$ tiene un valor propio positivo para el cual hay un vector propio correspondiente de componentes positivos, pues en tal caso el sistema (3.1) equivale a $(B^{-1}A)\,c = pc$. (3.2)

También debe notarse aquí que aunque Sraffa no diga nada al respecto, sin mayor pérdida de generalidad puede asumirse que B sea inversible, pues esto es lo genérico[4].

4. *BIENES BASICOS Y BIENES NO-BASICOS*

En relación a las mercancías no-básicas (cuya definición exacta para el caso de producción conjunta se dará más adelante), dice Sraffa que "el terreno fértil para los multiplicadores negativos está entre ellas".

---

4) Se dice que una propiedad es *"genérica"* en un espacio topológico cuando el subespacio de los elementos que la satisfacen es la intersección de una familia enumerable de subespacios abiertos y densos. En particular, en el espacio de las matrices reales de dimensión n por n, las que tienen determinante no nulo (y por ende son inversibles) constituyen un subespacio abierto y denso. El significado intuitivo de "genericidad" es el de corresponder a la "casi" totalidad de los casos. Para mayores detalles ver, por ejemplo, Golubitsky, M. y V. Guillemin, 1974, y R. García-Cobián, 1988.

Como ilustración, considera el caso de dos mercancías producidas conjuntamente pero en proporciones distintas, siendo que la segunda no se usa como medio de producción de ninguna; entonces ella no debe aparecer en el producto patrón, como se muestra a continuación.

Sea $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ tal que sea el segundo proceso aquél en el cual se produce relativamente más de la segunda mercancía, es decir, $b_{22}/b_{12} > b_{21}/b_{11}$. Además, A es de la forma $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hay un valor positivo, c_1 , y otro negativo, c_2, tales que $b_{21}c_1 - b_{22}c_2 = 0$. Luego, el sistema patrón es del $\left(A \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 \end{bmatrix}, \ell \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c_2 \end{bmatrix}\right)$,

pues en él las cantidades de insumos, dadas por $\begin{bmatrix} a_{11} & c_1 - & a_{12}c_2 \end{bmatrix}$ son
0
proporcionales a las cantidades de productos, dadas por $\begin{bmatrix} b_{11} & c_1 - & b_{12} & c_2 \end{bmatrix}$,
0

siendo la constante de proporcionalidad el número

$$\rho = \frac{b_{11}\ c_1 - b_{12}\ c_2}{a_{11}\ c_1 - a_{12}\ c_2}\ , \text{pues}\quad \rho o = o \text{ y } b_{11}\ c_1 - b_{12}\ c_2 =$$

$$c_2\ \left(b_{11}\frac{b_{22}}{b_{21}} - b_{12}\right) = c_2\ \frac{b_{12}\ b_{11}}{b_{21}}\left(\frac{b_{22}}{b_{12}} - \frac{b_{21}}{b_{11}}\right) \text{ que es positi-}$$

vo, pues por hipótesis, la cantidad del paréntesis es positiva, así como todas las otras b_{ij}

A manera de presentación del concepto exacto de bien no-básico, Sraffa da tres casos:

1) Aquellos productos que no se usan como medios de producción en ninguna industria: el i-ésimo producto lo es si $\forall$ k, $a_{ik} = 0$,

2) Aquellos que entran como medios de producción sólo en los procesos en que se los produce, siendo en todos éstos una misma proporción entre sus cantidades usadas como medios de producción y las cantidades producidas: el i-ésimo lo es si

$$(\forall k, a_{ik} \neq 0 \Leftrightarrow b_{ik} \neq 0) \quad \wedge \quad (\exists \gamma > 0 \quad \forall k, a_{ik} = \gamma b_{ik});$$

3) Aquellos que sólo son medios de producción de un grupo interconectado de no-básicos, es decir, productos que, como grupo, se comportan de modo similar al comportamiento individual de un producto del tipo (2): los productos $i_1, \ldots, i_h$ lo son si entre los n vectores hay, a

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 1} \\ a_{i_2 1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i_h 1} \\ b_{i_1 1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{i_h 1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{i_1 n} \\ a_{i_2 n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i_h n} \\ b_{i_1 n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{i_h n} \end{bmatrix}$$

lo más, h de ellos que sean linealmente independientes.

Estos tres tipos aparecen como casos particulares de la definición general que ha de seguir. Pero antes ofrece Sraffa el siguiente ejemplo:

Estos tres tipos aparecen como casos particulares de la definición general que ha de seguir. Pero antes ofrece Sraffa el siguiente ejemplo.

Sean $n = 4$ y supóngase que las mercancías segunda y tercera son producidas sólo en el primer proceso, siendo el caso que la segunda es del tipo (1) arriba descrito, mientras que la tercera es medio de producción en los cuatro procesos. Así los vectores descritos en (3) de arriba son

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_{31} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ a_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ a_{33} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 \\ a_{34} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso sólo hay dos vectores linealmente independientes, a saber, el primero y cualquiera de los otros, por ejemplo el segundo, pues si

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ a_{31} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ a_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ entonces } \alpha b_{21} = 0, \text{ de donde } \alpha = 0 \text{ ya que}$$

$b_{21} > 0$, pero de aquí se sigue que, como $\alpha a_{31} + \beta a_{32} = 0, \alpha = 0$ y $a_{32} > 0$, debe ser $\beta = 0$. El tercero y el cuarto son múltiples del segundo, y, por lo tanto, linealmente dependientes de los dos primeros. De este modo se ve que las mercancías segunda y tercera constituyen un grupo del tipo descrito en (3).

Ahora bien, puede comprobarse que ninguna de ellas entrará en el sistema patrón. En efecto, que la segunda no lo hace es obvio, pues siendo nula la cantidad total de ella empleada como medio de producción, también debería serlo su cantidad total producida, lo que no es cierto por hipótesis, puesto que $b_{21} > 0$; pero, si bien pareciera que la tercera sí podría entrar, pues son positivas las cantidades totales en que se la utiliza como medio de producción y en que se la produce, sin embargo resulta que no entra tampoco, ya que, como la única manera de eliminar del sistema patrón la segunda es con un $c_1 = 0$, esto hace que la tercera desaparezca en el lado de la producción para el sistema patrón ($c_1 b_{31} + c_2\ 0 + \ldots + c_n .0 = 0$), lo cual, a su vez, entraña el que también desaparezca en el lado de los medios de producción para el sistema patrón. Para esto último basta con elegir c_2, c_3 y c_4 de modo que $a_{32} + c_3\ a_{33} + c_4\ a_{34} = 0$.

Debe notarse que los tipos (1) y (2) antes descritos no son sino casos particulares del (3). En efecto, el tipo (1) corresponde a la situación particular del (3) en que los vectores correspondientes son

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b_{i1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ b_{in} \end{bmatrix}$$ y es claro que de éstos sólo puede haber uno linealmente independiente. Para el tipo (2), si la i-ésima mercancía es una de

ellas y sólo aparece en los procesos $k_1, \ldots, k_h$ entonces también hay sólo un vector linealmente independiente entre los siguientes:

$$\begin{bmatrix} a_{ik_1} \\ \\ \\ b_{ik_1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{ik_h} \\ \\ \\ b_{ik_h} \end{bmatrix}$$

puesto que, por hipótesis, las cantidades $a_{ik_1}, \ldots, a_{ik_h}$ son proporcionales a las $b_{ik_1}, \ldots, b_{ik_h}$.

Definición 2: Las mercancías $i_1, \ldots, i_k$ son *"no básicas"* si, a lo más, hay k columnas linealmente independientes en la matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 1} \cdots a_{i_1 n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{i_k 1} \qquad a_{i_k n} \\ b_{i_1 1} \qquad b_{i_1 n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{i_k 1} \qquad b_{i_k n} \end{bmatrix}$$

, es decir, si ésta tiene rango no mayor que k.

Las mercancías que no pueden incluirse en subconjuntos de no-básicas son *"básicas"*. En caso de haber mercancías no-básicas en el sistema, se dice que éste es no-básico. En caso contrario se dice que sí es básico.

Asunción 2: Todo sistema tiene al menos, una mercancía básica. Con esta asunción es posible a Sraffa afirmar lo siguiente:

"61. It follows directly from this that we can, by linear transformations, entirely eliminate the non-basic commodities from the system, both on the side of the means of production and on that of the products. That is to say, we can find a set of multipliers (some positive and some negative) which applied to the original k equations make it possible to combine them into a smaller number of equations (equal in number to the basic products) in each of which any quantity of a non-basic is cancelled by an equal quantity of opposite sign, so that only basics are included in quantities different from zero". (Sraffa [1960], p. 52).

Que es esto es cierto se demuestra como sigue. Sean las mercancías no-básicas las $i_1, \ldots, i_h$, con $h < n$ debido a la asunción dos. Esto quiere decir, por la definición 2, que en la matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_h 1} & & a_{i_h n} \\ b_{i_1 1} & & b_{i_1 1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i_h 1} & & b_{i_h n} \end{bmatrix}$$

hay, a lo más, h columnas linealmente independientes. Redenominando procesos, si fuera preciso, puede suponerse, sin perder generalidad, que las columnas linealmente independientes están entre[5] las h últimas[6]. Así, cada una de las n-h primeras, es combinación lineal de aquellas h últimas:

5| Nótese que sólo puede afirmarse que ellas están entre las h últimas, pues bien podría ser que fueran menos que h. Sin embargo, aún en tal caso sigue siendo cierto que cada una de las n—h restantes, por ser combinación lineal de las linealmente independientes, lo es también de las h primeras, puesto que éstas contienen a aquéllas.

6| De modo más preciso: si las mercancías han de redenominarse con la i_1 como nueva 1^a, la i_2 como nueva 2^a, etc., entonces en la posición (h, k) de la nueva matriz ha de aparecer el término de posición (i_h, i_k) de la antigua matriz. Esto se logra mediante la matriz de permutación P cuya primera columna es la columna i_1 —ésima de la I_n, cuya segunda columna

$\forall j \in [1, \ldots, n\text{-}h] \;\; \exists \;\; g^j_{n-h+1}, \ldots, g^j_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} a_{i1\,j} \\ \vdots \\ a_{i_h\,j} \\ b_{i1\,j} \\ \vdots \\ b_{i_h\,j} \end{bmatrix} = \sum_{d=n-h+1}^{n} g^j_d \begin{bmatrix} a_{i1\,d} \\ \vdots \\ a_{i_h\,d} \\ b_{i1\,d} \\ \vdots \\ b_{i_h\,d} \end{bmatrix}$$

Luego, si en el sistema de ecuaciones (2.1) a cada una de las n-h primeras ecuaciones se le restan las h últimas multiplicadas respectivamente por los coeficientes g, se obtiene un subsistema de n-h ecuaciones en las que ya no aparecen las mercancías no-básicas ni como medios de producción ni como productos. En efecto, $\forall j \in \{1, \ldots, h\}$ la nueva ecuación es

donde, por (*), se tiene que los componentes i_1 –ésimo, . . ., i_h –ésimo de los vectores columnas que aparecen entre paréntesis inmediatamente después de p son nulos, con lo cual el subsistema básico (ssb) no involucra a las mercancías no-básicas; éstas solo aparecen en el subsistema no-básico (ssnb), que es el formado por la h últimas ecuaciones de (2.1).

---

es la i_2 —ésima de I_n, etc. Entonces, siendo P^t la transpuesta de P, resulta que la matriz correspondiente a la redenominación es la: P^tAP. Asi, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y

se quiere que la nueva primera mercancía sea la 2a. de antes, que la nueva 2a. sea la 1a. de antes, y que la nueva 3a. sea la 3a. de antes, entonces $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, con lo cual $P^t AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

De este modo, siendo m:= n-h, el número de mercancías básicas, y definiendo las matrices mxm, $\bar{A}$, $\bar{B}$ y la matriz 1xm,$\bar{\ell}$, como aquéllas cuyas columnas son las que se indican en (ssb) éste puede escribirse como:

$$(1+ r)\, p\, A + w\ell = p\, B \qquad (2.1)$$

donde p: $(p_1, \ldots, p_m)$

5. *EL SISTEMA PATRON*

El subsistema básico se utiliza para construir el sistema patrón, al encontrar unos multiplicadores $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m$ tales que, siendo $\bar{C}$ la matriz mxm de elemento típico $\bar{C}_{ij} := \bar{c}_i \ \delta_{ij}$, se tenga que el nuevo subsistema $(\bar{A}\,\bar{C}, \bar{B}\bar{C}, \bar{\ell}\bar{C})$ sea un subsistema patrón según la definición 1, es decir, haya un número R tal que

$$(1 + R)\, \bar{A}\, \bar{c} = \bar{B}\, \bar{c}.$$

Comparando esta expresión con la (3.1) se ve inmediatamente que R y p se relacionan entre sí mediante $R = \frac{1}{p} - 1$ (5.1)

Debe notarse que la condición para la existencia de sistemas patrón es que haya un $\bar{c} \in \mathbb{R}^m$ y un $R \in \mathbb{R}$ tales que $(1 + R)\, \bar{A}\, \bar{c} = \bar{B}\, \bar{c}$, y que, como ya se ha explicado en la nota(4), sin mayor pérdida de generalidad puede asumirse que B, y por tanto $\bar{B}$, es inversible; por ende la condición susodicha se reduce a que la matriz $\bar{B}\,\bar{A}$ tenga a R como valor propio real. Pero, puesto que la dimensión de $\bar{A}$ es mxm, puede haber m diferentes valores propios reales de $\bar{B}\quad \bar{A}$, y quizás para ninguno de ellos haya un vector propio todos cuyos componentes sean innegativos. Cabe, pues, interrogarse acerca de cuál de tales valores propios sea el más relevante económicamente. Sraffa sostiene que debe ser el menor valor positivo, y lo demuestra como sigue.

i) Como es fácil de comprobar, al establecerse como unidad de valor la mercancía patrón, tanto para expresar los precios como para el salario, resulta válida la relación lineal ya conocida entre éste y la tasa de ganancia:

$$R(1 - w) = r. \qquad (5.2)$$

ii) Ahora bien, si se elige un valor propio R'', habiendo otro menor, R', y si se adopta como unidad de valor la mercancía patrón correspondiente a R'', entonces la relación lineal (5.2) se expresa por $R''(1 - w) = r''$.

iii) Pero, al pasar $\overline{w}$ de 0 a 1, ocurre que para cierto valor intermedio $\tilde{\overline{w}} \in]0,R''[$, debe ser $R''(1 - \overline{w}) = R''$, pues $R' \in]0,R''[$. De esto se desprendería una contradicción, pues reexpresando todo en términos de la mercancía patrón correspondiente a R', resultaría que $R'(1 - \tilde{\overline{w}}) = R'$, denotando $\overline{w}$ el mismo salario que $\tilde{\overline{w}}$ pero, ahora, en términos de la mercancía patrón correspondiente a R'; de donde se obtendría $\overline{w} = 0$, mientras que $\overline{w} > 0$, lo cual es contradictorio pues $\overline{w} = 0$ si, y sólo si, $\tilde{\overline{w}} = 0$.

6. RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS DE BIENES BASICOS Y DESCOMPONIBILIDAD

Ahora parece oportuno introducir la asunción de independencia lineal de los n procesos originales, basándose en la siguiente cita de Sraffa:

> "Incidentally, considering that the proportions in which the two commodities are produced by any one method will in general be different from those in which they are required for use, the existence of two methods of producing them in different proportions will be necessary for obtaining the required proportion of the two products through an appropriate combination of the two methods" (Sraffa [1960], p. 43, n. 2).

Asunción 3. El rango de la matriz 2n x n, $\left[\frac{A}{B}\right]$, es igual al número de sus columnas, es decir, a n.

Nótese de paso, que para cualquier valor de la tasa de ganancia, r, los precios relativos se determinan unívocamente por:

$$p = w \, \ell \, (B - (1 + r) A)^{-1}$$

si $B-(1+ r) A$ es una matriz no-singular, esto es, si su determinante es diferente de cero.

Un tema importante es la relación que hay entre los conceptos de bienes básicos y sistemas indescomponibles. Cuando se considera el caso de la producción disjunta, ellos resultan ser equivalentes, pero en el marco de la producción conjunta esto ya no es así, como ha de mostrarse a continuación.

Definición 3. El sistema (A, B, ℓ) es "**descomponible**" si mediante alguna redenominación de procesos es posible transformar las matrices representativas A y B en otras "cuasitriangulares"; más precisamente si

$$\exists n' < n,\ \exists j_1, \ldots, j_{n'},\ \forall i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_1, \ldots, j_{n'}\},\ a_{ij_1} = \ldots = a_{ij_{n'}} = 0 = b_{ij_1} = \ldots = b_{ij_{n'}},$$

Esto quiere decir que los procesos distintos de los $j_1, \ldots, j_{n'}$ ni usan como medios de producción ni producen las mercancías $j_1, \ldots, j_{n'}$. Redenominando procesos y mercancías puede lograrse que las $j_1, \ldots, j_{n'}$ sean las últimas, con lo cual las matrices A y B adoptarían la siguiente forma cuasitriangular.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n''} & a_{1n''+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n''1} \cdots a_{n''n''} & \\ & \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 \quad\quad 0 & a_{nn''+1} \quad a_{nn} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1n''} & b_{1n''+1} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{n''1} \cdots b_{n''n''} & \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & b_{nn''+1} \quad b_{nn} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{donde } n'' := n - n'$$

En este caso el sistema se descompone en dos subsistemas, de los cuales el primero es tecnológicamente autónomo pero el segundo, en cambio, depende tecnológicamente del primero. Ellos son, respectivamente, los dos siguientes: (A_{11}, B_{11}, ℓ^1) y

$$\left(\begin{bmatrix} A_{12} \\ \hline A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{12} \\ \hline B_{22} \end{bmatrix}, \ell^2\right), \text{ donde } \ell^1 = [\ell_1 \ldots \ell_{n''}] \text{ y } \ell^2 := [\ell_{n''+1} \ldots \ell_n].$$

Sus ecuaciones correspondientes son:

$$(1 + r)\, p^1 A_{11} + w\,\ell^1 = p^1 B_{11} \qquad (6.1)$$

para el primero, y

$$(1+r)\,(p^1 A_{12} + p^2 A_{22}) + w\,\ell^2 = p^1 B_{12} + p^2 B_{22} \qquad (6.2)$$

para el segundo, donde $p^1 := [p_1 \ldots p_{n''}]$ y $p^2 := [p_{n''+1} \ldots p_n]$

Así, pues, dado el valor de una de las variables de distribución, r ó w, el subsistema autónomo, en principio, puede determinar el valor de otra variable de distribución y los precios relativos de las mercancías de dicho subsistema; mientras que el subsistema, el dependiente, sólo podrá determinar los precios relativos de sus mercancías cuando se conozcan los de las otras y ambas variables de distribución.

De este modo se aprecia que cuando el sistema es descomponible se pueden distinguir en él dos subsistemas, uno básico y otro no-básico.

El asunto que complica el estudio es que aún los sistemas indescomponibles pueden admitir subsistemas no-básicos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo (de sistema indescomponible pero no-básico)

Sea el sistema (A, B, ℓ) dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2/3 \\ 4/5 & 2/5 \end{bmatrix} \quad \text{y } \ell = [1/2 \;\; 1/2].$$

Obviamente, el sistema es indescomponible. El rango de $\left[\frac{A}{B}\right]$ es 2, según se ha asumido en general. Las ecuaciones del sistema son:

$$(1 + r)\left(\tfrac{1}{2}\, p_1 + \tfrac{2}{3}\, p_2\right) + \tfrac{1}{2}\, w = 3p_1 + \tfrac{4}{5}\, p_2$$

$$(1 + r)\left(p_1 + \tfrac{1}{3}\, p_2\right) + \tfrac{1}{2}\, w = \tfrac{2}{3}\, p_1 + \tfrac{2}{5}\, p_2.$$

Si se resta a la primera ecuación el doble de la segunda, se obtiene:

$$(1 + r)\left(-\tfrac{3}{2}\, p_1\right) - \tfrac{1}{2}\, w = \tfrac{5}{3}\, p_1$$

que es una ecuación que no incluye a la segunda mercancía. De este modo se obtiene un subsistema (el formado sólo por la primera mercancía y el primer proceso) que, aunque no es tecnológicamente independiente, sí determina el precio de la primera mercancía sin requerir el conocimiento del de la segunda. En cambio, el subsistema formado por el segundo proceso y la segunda mercancía sí depende del otro tanto tecnológicamente como en lo que refiere a determinación de precios. Puede, pues, hablarse de primer subsistema como del básico, y del segundo como del no-básico. Además, ello estaría de acuerdo con la definición número 2, con $k = 1$, $i_1 = 2$, ya que la matriz correspondiente es la $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2/3 & 1/3 \\ 4/5 & 2/5 \end{matrix}$ que tiene rango igual a 1.

En el caso general, es posible caracterizar operativamente a los sistemas no-basicos de la siguiente forma:

Teorema 6.1 (caracterización de sistemas no-básicos)

El sistema (A, B, ℓ) es no-básico si, y sólo si, para cierto número natural $k < n$, hay una matriz de dimensión $k \times (n-k)$, H y matrices de permutación P y Q tales que, llamando M a la matriz.

$$\begin{bmatrix} I_{n-k} & \vdots & O \\ \hdashline -H & \vdots & I_k \end{bmatrix} \begin{array}{l} n-k\text{, resulte que} \\ \\ k \end{array}$$

Q APM y Q BPM tengan nulos todos sus elementos de fila mayor que n–k y de columna no mayor que nk, es decir, sean cuasitriangulares.

Por definición de sistema no-básico, si el (A, B, ℓ) lo es, hay un $k < n$ y hay mercancías, $i_1, \ldots, i_k$ tales que la matriz que resulta de retener en la $[\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}]$ sólo las filas, $i_1, \ldots, i_k$' de A y B respectivamente tiene rango no mayor que k, es decir, en ella hay, a lo más, k columnas linealmente independientes. Es claro que si ellas son las columnas $j_1, \ldots, j_k$, con $k' \leqq k$, entonces mediante una matriz de permutación (redenominación de procesos) se puede conseguir que dichas columnas aparezcan en los k' últimos lugares; dicha matriz de permutación, P, se obtiene intercambiando en la matriz identidad n x n, I_n, la j–ésima columna con la (n–k'+1)–ésima; la j_2–ésima con la (n–k'+2)–ésima, etc. Luego, en AP y en BP ya aparecen en las últimas k' columnas aquellas que originalmente eran las $j_1, \ldots, j_{k'}$. Es ovio que en la matriz que resulte de retener las filas $i_1, \ldots, i_k$ de las matrices AP y BP en la $[\begin{smallmatrix} AP \\ BP \end{smallmatrix}]$, las n–k primeras columnas son combinaciones lineales de las k últimas (pues si las k'últimas generan el subespacio de columnas, con mayor razón lo hacen las k últimas). Así, para cada columna $j \in [1, \ldots, n-k]$, $h_{1j}, \ldots, h_{kj}$ tales que la j–ésima columna de la matriz formada con las filas $i_1, \ldots, i_k$ de AP y BP en la $[\begin{smallmatrix} AP \\ BP \end{smallmatrix}]$ es una combinación lineal, de coeficientes $h_{ij}, \ldots, h_{kj}$' de las últimas k columnas de esta matriz. Llámese H a la matriz

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1\,n-k}; \\ \cdot & & \cdot; \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ h_{k1} & & h_{k\,n-k} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, mediante otra matriz de permutación de filas Q, es posible situar las filas $i_1, \ldots, i_k$ de A y B en las últimas filas. Esta matriz Q se obtiene de la identidad I_n al extraerle sus filas $i_1, \ldots, i_k$ y colocárselas en este orden en su parte inferior. Así, llamando $\hat{A}$ y $\hat{B}$ respectivamente a QAP y QPB, se tiene que la matriz que se forma de la $\left[\begin{smallmatrix} \hat{A} \\ \hdashline \hat{B} \end{smallmatrix}\right]$ al retener las k últimas filas de A y B es de rango no mayor que k.

Ahora es fácil ver que, con M como se indica en el enunciado, ha de tenerse que con la partición de $\hat{A}$: $\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} n-k \\ k \end{array}$ y una

partición similar de $\hat{B}$,

$$[{}^{A}_{B}]\; M = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \\ \hat{B}_{11} & B_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-k} & O \\ -H & I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}H & \hat{A}_{12} \\ O & \hat{A}_{22} \\ \hat{B}_{11} - \hat{B}_{12}H & \hat{B}_{12} \\ O & \hat{B}_{22} \end{bmatrix}$$

puesto que, por la definición de H, $\begin{bmatrix} \hat{A}_{21} \\ \hat{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} \\ \hat{B}_{22} \end{bmatrix} H$

Nota: En general, supóngase que siempre que sea posible realizar las transformaciones del teorema anterior ellas se habrán ya hecho.

Puede notarse también, que cuando el sistema original es básico la construcción que se acaba de describir no alterará a las matrices A y B.

Así, pues, para un sistema no-básico, (A, B, ℓ), con $\ell := \ell P$, luego de haberse efectuado las transformaciones $\hat{A} := QAP$ y $\hat{B} := QBP$ antes descritas, se tiene que el sistema ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\ell}$), que esencialmente es el original, da origen, mediante multipliciación por la matriz M, a un subsistema virtual ($\hat{A}_{11} - \hat{A}^{12}H, \hat{B}_{11} - \hat{B}_{12} H, \hat{\ell}^1 - \hat{\ell}^2 H$) que determina sus precios relativos $\hat{p}^1$ independientemente de los precios del resto de mercancías, $\hat{p}^2$, como puede comprobarse posmultiplicando por M la ecuación

$$(1 + r)\, \hat{p}\, \hat{A} + w \hat{\ell} = \hat{p}\, \hat{B}, \qquad (6.3)$$

que da $(1 + r)\, \hat{p}^1 (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}H) + w\, (\hat{\ell}^1 - \hat{\ell}^2 H) = \hat{p}^1\, (\hat{B}^{11} - \hat{B}_{12} H) \qquad (6.4)$

y $$(1+r)(\hat{p}^1 \hat{A}_{12} + \hat{p}^2 A_{22}) + w\, \hat{\ell}^2 = \hat{p}^1 \hat{B}_{12} + \hat{p}^2 \hat{B}_{22} \tag{6.5}$$

Obsérvese que si en (6.4) se hace H = O, entonces se obtiene la situación ya considerada en que hay descomponibilidad y en la que el subsistema ($\hat{A}_{11}$, $\hat{B}_{11}$, $\bar{\ell}^1$), además de ya no ser sólo virtual sino real, es también tecnológicamente autónomo. En cambio, con H ≠ O, el subsistema virtual no es tecnológicamente autónomo, ya que aunque no requiere de los precios de las k últimas mercancías para determinar los de la n–k primeras, sin embargo, sí requiere para esto de la información tecnológica del resto a través de $\hat{A}_{12}$, $\hat{B}_{12}$ y $\hat{\ell}^2$. En definitiva, que a diferencia de lo que ocurre en producción disjunta, en que descomponibilidad equivale a ser no-básico; en producción conjunta la descomponibilidad no es sino una forma de ser no-básico, siendo posible esto último aún cuando haya indescomponibilidad.

7. *POSIBLE INEXISTENCIA DEL SISTEMA PATRON*

Teorema 7.1. Si el sistema (A, B, ℓ) es básico y $AB^{-1} \geqslant O$,[7], entonces existe el sistema patrón y los coeficientes con que se lo construye son únicos con la aproximación de un factor escalar, es decir, fijando uno cualquiera de ellos, los otros son únicos.

i) Si en la ecuación (3.1) se premultiplican ambos miembros por B^{-1}, se obtiene $(B^{-1} A)\, c = p\, c$.

Premultiplicando ambos miembros de esta ecuación por A resulta que

$$AB^{-1} (A\, c) = p\,(Ac),$$

con lo que puede verse que todo valor propio de $B^{-1} A$ es también valor propio de AB^{-1}, y como estas dos matrices tienen n valores propios de cada una, ellas han de tener exactamente los mismos valores propios.

7] Se usa la siguiente convención para vectores y matrices: i) $A \geqq B$ significa que A–B carece de componentes negativos (pudiendo todos ser nulos); ii) $A \geq B$, que $A \geq$ pero $A \neq B$ y iii) $A > B$, que todo componente de A–B es mayor que cero. Se dice que A es "positiva", "semipositiva" o "innegativa" según que $A \geqq 0$, $A \geq 0$ ó $A > O$, respectivamente.

ii) Ahora bien, la matriz AB^{-1} es indescomponible. En efecto, como (A, B, ℓ) es básico por hipótesis, si AB^{-1} fuera descomponible, habría una matriz de permutación Q tal que $Q^t AB^{-1}Q$ sería cuasitriangular y contendría una submatriz nula en la esquina sur-oeste, de dimensiones k x (n–k), para cierto natural k $<$ n, de modo que k = rango de la submatriz de $\left[\dfrac{Q^t AB^{-1}Q}{I_n}\right]$ formada por sus k últimas filas[8]. Desígnese a dicha submatriz por $\left[\dfrac{(Q^t\ AB^{-1}\ Q)_2}{(I_n)_2}\right]$. Ahora bien, puesto que toda matriz de permutación es no-singular y que B también es tal, se tiene que el rango de la susodicha submatriz es el mismo que el de

$$\left[\frac{(Q^t AB^{-1}Q)_2\ Q^tB}{(I_n)_2Q^tB}\right] = \left[\frac{(Q^t AB^{-1}QQ^tB)_2}{(Q^tB)_2}\right] = \left[\frac{(Q^tA)_2}{(Q^tB)_2}\right]$$ ya

que la transpuesta de cualquier matriz de permutación es su inversa. Finalmente, dado que Q es no-singular, el rango de esta última matriz es igual al de la submatriz $\left[\dfrac{(A)_2}{(B)_2}\right]$. En consecuencia, el rango de esta submatriz es k $<$n, lo que significaría que el sistema (A, B, ℓ) sería no-básico, contra lo supuesto, y por ende, AB^{-1} es indescomponible.

iii) De lo anterior y de la hipótesis que AB^{-1} es indescomponible y semipositiva; luego, por el teorema de Perron-Frobenius[11], se sigue de ello que ρ^*, raíz de Perron-Frobenius de AB^{-1}, es una raíz simple[9] de su ecuación característica: $O = \det(AB^{-1} - \alpha I_n)$. Pero, por lo establecido en (ii), ocurre también que p^* es una raíz simple de la ecuación característica de $B^{-1}A$: $O=\det(B^{-1}A - \alpha I_n)$. En consecuencia, el subespacio propio asociado con p^* tiene dimensión 1, de donde el

8) **Debe tenerse presente que la matriz A es descomponible en el sentido de la producción disjunta si, y sólo si, lo es el sistema formado por (A, I) en el de la producción conjunta.**

9) **Es decir, de multiplicidad 1.**

11) **García-Cobián, R. [1983], apéndice.**

vector de n coeficientes reales $c \in \mathbb{R}^n$ que satisface $(B^{-1}A)\,c = p^*c$ (ó equivalentemente $Ac = pBc$), es único con la aproximación de un factor escalar.

Observaciones

1) Es de notarse el que, si bien tanto en este caso de producción conjunta como en el de producción disjunta el sistema patrón existe y es único con la aproximación de un factor escalar, puede ocurrir ahora que algunos coeficientes sean negativos, pues de la semipositividad de AB^{-1} no se sigue la de $B^{-1}A$.

2) Si a diferencia de la hipótesis del teorema 7.1, ocurriera que AB^{-1} no fuera semipositiva, entonces podría suceder que existiera sistema patrón asociado al sistema (A, B, ℓ), como ilustra el siguiente contraejemplo:[10]

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.1 \\ 1.1 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.090 & 1.144 \\ 1.144 & 0.990 \end{bmatrix}$$

que da un sistema que aunque productivo (pues $(B-A)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$), su ecuación característica carece de raíz real, por lo que se ve que no tiene un sistema patrón asociado.

3) Cuando el sistema (A, B, ℓ) es no-básico y al construir su subsistema básico, como se ha indicado en el sexto punto del presente trabajo, resultará que $\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}H$ y $\hat{B}_{11} - \hat{B}_{12}H$ fuesen ambas semipositivas, entonces se estaría en el caso del teorema 7.1.

Si, en cambio, alguna de estas dos matrices no fuera semipositiva, no podría garantizarse ni la existencia ni la unicidad del correspondiente sistema patrón.

---

10) Propuesta en Manara [1968].

8. *POSIBILIDAD DE INVALIDEZ DE LA RELACION LINEAL ENTRE EL SALARIO Y LA TASA DE GANANCIA*

Si hubiera un sistema patrón asociado al sistema original, y si los precios y el salario se expresaran en términos de la mercancía patrón correspondiente, entonces, designando a éstos por $\tilde{p}$ y $\tilde{w}$, resultaría ser

$$(1 + r)\tilde{p}A + \tilde{w}\ell = \tilde{p}B$$

de donde $r\tilde{p}A + \tilde{w}\ell = \tilde{p}(B-A)$.

Si se elige el numerario (es decir, un múltiplo real de la mercancía patrón) de modo que $1 = \tilde{p}(B-A)c$, entonces se obtendría
$1 = \tilde{p}(B-A)c = r\tilde{p}Ac + \tilde{w}\ell c$. Pero como en el sistema patrón se tiene que $(1 + R)Ac = Bc$, se deduce que $RAc = (B-A)c$, por lo cual reemplazando arriba se obtiene que

$$1 = \frac{r}{R}\tilde{p}(B-A)c + \tilde{w}\ell c.$$

Ahora bien, como $1 = \tilde{p}(B-A)c$, si se lograra "normalizar" el vector c de modo que $\ell c = 1$, entonces quedaría la famosa relación lineal $1 = \frac{r}{R} + \tilde{w}$.

El problema en esto es que aunque haya sistema patrón, el vector c no tiene que ser innegativo, es decir, podría tener componentes negativos, con lo cual podría ser imposible que $\ell c = 1$, si ℓ y c fueran perpendiculares, en cuyo caso $\ell c = 0$ y no sería cosa de "normalizar" el c para que dicho producto dé 1. Así, en tales casos, o peor aún cuando no haya sistema patrón, no podría darse la famosa relación lineal decreciente entre el salario y la tasa de ganancia.

9. *CONCLUSIONES*

Entre otras, merecen resaltarse las siguientes:

(i) A diferencia del propósito de Sraffa, es perfectamente posible que en casos económicamente admisibles, no haya sistema ni mercancía patrón, con lo cual la relación entre el salario y la tasa de ganancia, por no ser lineal, requiriría un análisis matemáticamente mucho más complejo.

(ii) La noción de descomponibilidad sólo es un caso posible de la noción de sistema no-básico, y la caracterización de ésta, para el caso general, que propone Sraffa es susceptible de precisarse debidamente como se muestra en el 6° punto.

(iii) Se alcanzan condiciones suficientes para la existencia y "unicidad" del sistema patrón, como se muestra en el Teorema 7.1 y en las observaciones que le siguen.

10. *REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS*

- García-Cobián, R. "Una revisión crítica de la teoría de producción disjunta de Sraffa", *Economía,* VI, 11-12 (1983), Departamento de Economía, Pontificia Universidad Católica del Perú.

  "El concepto de 'genericidad' en teoría económica", a publicarse (1988).

- Golubitsky, M. y V. Guillemin
  Stable mappings and their singularities, Springer Verlag, New York, 1974.

- Manara, C.F. "Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a Mezzo di merci", *l'Industria,* N° 1 (1968).

- Sraffa, P. Production of commodities by means of commodities, Cambridge U.P., 1960.