VOLUMEN XV Nº 29 / 30 JUNIO / DICIEMBRE 1992

ECONOMIA

INDICE

ARTICULOS

ECONOMIA. Vol. XV Nº 29 / 30. Junio / Diciembre 1992

POBLACION Y MEDIO AMBIENTE: UNA PARABOLA SOBRE LA LEÑA Y OTRAS HISTORIAS

Marc Nerlove
Anke Meyer*

1. INTRODUCCION

Pocos temas, es prudente decirlo, provocan tanto interés como preocupación en la economía contemporánea como aquellos relacionados al medio ambiente y a toda clase de recursos naturales que no tienen precio. En el fondo, muchos problemas ambientales de largo plazo, ya sea que se deriven del uso de una moderna tecnología agrícola para aumentar la producción de alimentos o de una explotación demasiado rápida de la energía no renovable

---

* Profesor de la Universidad de Maryland, Departamento de Economía Agrícola e Investigadora Independiente, respectivamente. Este Documento fue preparado para ser presentado en la Décima Reunión de la Sociedad Econométrica Latinoamericana, 27-30 de Agosto 1991, Punta del Este, Uruguay. El que se presenta está basado en un trabajo conjunto anterior (1990, 1991) en el cual se contó con la eficiente asistencia de Viktoria Dalkó. El trabajo ha sido financiado por el International Food Policy Research Institute (IFPRI), Washington D.C. También nos encontramos en deuda con Christian Gourieroux, Heinz Koenig, y Efraim Sadka por sus valiosos comentarios a un número de versiones preliminares.
La presente versión es una traducción al español de una parte sustancial de los documentos publicados en *The American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 73 (Diciembre 1991). pp. 1334-1347, y Vol. 75 (Febrero 1993) pp. 59-71 y publicado aquí con autorización.

y de otros recursos naturales, surgen finalmente de la presión que ejercen la población humana y los deseos humanos de subsistencia, si es que no de buscar mayores niveles de comfort. Los economistas y otros profesionales se dan perfecta cuenta del rol que la presión de la población tiene entre las causas de la degradación ambiental en los países en desarrollo y, desde la publicación del, con toda justicia, famoso artículo de Hardin "La tragedia de lo común" (1968), de cómo la característica de tener un precio subvaluado o de no tener precio, los recursos ambientales y de otros recursos naturales, lleva a una sobre-explotación y por último a la degradación. En el otro extremo de esta discusión intelectual, el rol que la degradación ambiental y el agotamiento de los recursos naturales puedan tener en la generación de esa presión de la población que se encuentra detrás de tal degradación y agotamiento, especialmente en los países en desarrollo, es mucho menos apreciado y entendido.

Es nuestro propósito, en este trabajo, centrarnos en este último aspecto de la relación entre la población y el medio ambiente. Lo haremos en el contexto de un sistema planar dinámico bastante abstracto, de dos ecuaciones diferenciales no-lineales, una de las cuales refleja la manera en la que la presión de la población afecta el estado del medio ambiente de las futuras generaciones y su evolución sobre el tiempo; y, la otra, caracteriza el comportamiento de la fertilidad humana en términos de una optimización sujeta a restricciones ambientales. Mientras que hay mucho que decir sobre cómo la presión de la población puede afectar el medio ambiente en diferentes contextos ambientales e institucionales, adoptaremos la posición, aún controversial, de que este efecto es adverso, para enfatizar la manera en la cual la fertilidad humana y el crecimiento de la población pueden reaccionar ante la degradación ambiental. La principal conclusión de este análisis es que las posibilidades de un equilibrio estable entre la población humana y el medio ambiente son bastante limitadas. Inclusive si se da una relación relativamente favorable entre la presión de la población y la evolución de la degradación ambiental a lo largo del tiempo, un equilibrio estable sólo podrá lograrse si la fertilidad responde negativamente a la degradación ambiental y, en ese caso, sólo si la respuesta es lo suficientemente grande en magnitud absoluta en relación a la respuesta dinámica del medio ambiente a la presión de la población. Bajo condiciones ambientales excepcionalmente adversas, tasas crecientes de mortalidad pueden finalmente detener un mayor deterioro ambiental y/o llevar a la extinción de la humanidad.

Desafortunadamente, existen amplias razones para suponer que en una gran parte del Tercer Mundo la fertilidad probablemente reaccionará de manera positiva a una creciente degradación ambiental debido a que los padres perciben que los beneficios de tener más hijos serían mayores bajo circunstancias ambientales más adversas que bajo circunstancias más favorables. Por ejemplo, si la probabilidad de que un niño llegue a adulto, y por lo tanto se haga cargo de sus padres en su vejez, es menor en ambientes de calidad más baja, los padres serán inducidos a tener un mayor número de hijos, los cuales, hasta que las tasas de mortalidad infantil se eleven lo suficiente como para anular el mayor número de nacimientos, generalmente darán como resultado mayores tasas de crecimiento de la población, y no menores, bajo condiciones ambientalmente adversas. En la misma línea de razonamiento, se puede argumentar que si los niños participan de manera activa en la producción agrícola en el Tercer Mundo, su ventaja comparativa sobresale con respecto a aquella de las personas adultas en ambientes pobres debido a que el manejo de animales suplanta la producción agrícola, donde los niños tienen una menor ventaja en el duro trabajo del cultivo y la cosecha, comparado con el trabajo que tienen al manejar una manada de ganado.

Desarrollamos este tema en alguna extensión en una serie de metáforas basadas en un modelo de generaciones que se superponen, de dos períodos (overlapping generations, OLG), en el cual los padres valoran a sus hijos solamente por la contribución que éstos hacen al propio bienestar de los padres. Sin embargo, es posible argumentar que, a medida que el medio ambiente se deteriora, la relación entre el estado de la degradación ambiental y la tasa de crecimiento de la población debe eventualmente cambiar de positiva a negativa, es decir, un mayor deterioro en el estado del medio ambiente estará acompañado de una menor tasa de crecimiento de la población, abriendo así el camino a un equilibrio estable, aunque posiblemente no deseable, entre la población y el medio ambiente.

Mientras que uno puede cuestionar la deseabilidad de un equilibrio de ese tipo desde un punto de vista ético, elevado y humano, el altruismo o el amor es tal vez un lujo que sólo aquellos que se encuentran relativamente bien se pueden permitir. En cualquier caso, no creemos en la eficiencia de mencionar tales temas desde cualquier punto de vista que no sea aquel de la presente generación. La razón por la cual nos preocupamos por el deterioro del medio ambiente en tanto que éste afecta a las generaciones futuras es precisamente debido a que nos preocupamos por el bienestar de nuestros hijos y probablemente por el de los hijos de otros. Si no se introduce el altruismo o el amor de alguna manera, no se puede esperar precisar las pérdidas de bienestar que resultan de un excesivo crecimiento de la población que lleva a un deterioro del medio ambiente. Por lo demás, en un modelo OLG de dos períodos sin altruismo, no existe lugar para una discusión sobre las pérdidas de bienestar para la presente generación debido al carácter de bien sin precio que tienen los recursos ambientales y naturales dado que aquellos miembros de la presente generación ya no se encontrarán presentes para experimentar los efectos del deterioro ambiental y no se preocupan por el bienestar de sus hijos.

A continuación, en el contexto de una metáfora en la cual los beneficios percibidos de tener hijos se relacionan con el rol que ellos tienen en la producción agrícola, que denominamos "una parábola de leña", mostramos que el altruísmo paternal con respecto a los hijos sólo puede hacer que la situación empeore, si no es controlado socialmente, al llevar a un incremento de la tasa de nacimientos en cada estado ambiental en comparación con aquel que podría ocurrir en su ausencia. En otras palabras, el amor no es suficiente para conducir a la estabilidad e inclusive puede significar un peor resultado para los miembros de la presente generación a lo largo del tiempo que si éste estuviera ausente del análisis. No obstante, el amor en el sentido de preocupación paternal por el futuro bienestar de su descendencia, abre la puerta a la intervención social. Esto es debido a que siendo la calidad ambiental un recurso que no tiene precio no entra en el cálculo individual que realizan los padres sobre los costos y beneficios de tener más hijos.

El fracaso del *laissez-faire* en lograr una situación Pareto-óptima para los miembros de la presente generación representa una externalidad, para lo cual el remedio teórico usual es un sistema de impuestos y subsidios Pigouviano que obliga a los padres a internalizar los verdaderos costos y beneficios sociales de tener más hijos. En otras palabras, la naturaleza de bien sin precio de los recursos ambientales traza una línea entre el costo marginal social y el costo marginal privado de un hijo para los padres, el cual podría ser corregido por un impuesto per-cápita sobre los hijos acompañado por un pago de suma fija a los padres del total social de las ganancias.

El siguiente paso en nuestro análisis es, por lo tanto, ver cómo un impuesto sobre los hijos devuelto a los padres mediante un subsidio de suma fija cambiará la tasa de nacimientos de equilibrio para un nivel dado de calidad ambiental con o sin altruísmo. En general, es posible diseñar un esquema de impuesto/subsidio de este tipo para lograr cualquier tasa de nacimientos deseada incluyendo aquella que puede estabilizar el equilibrio entre la población y el medio ambiente.

Esto lleva de manera natural a la pregunta de cuál podría ser una tasa de nacimientos Pareto-óptima desde el punto de vista de la presente generación. Desafortunadamente, la determinación de una tasa de ese tipo depende crucialmente de las creencias de los padres con respecto al estado futuro del medio ambiente al igual que el grado en el cual ellos ponderen el bienestar de sus hijos en su cálculo privado de costo y beneficio. A excepción del caso en el que se está en un estado de equilibrio estacionario, no es razonable suponer que tales creencias reflejen la realidad con algún grado de exactitud. Esta observación, entonces, lleva naturalmente a una comparación de bienestar entre dos o más estados estacionarios que se dan en diferentes niveles de degradación ambiental. Es fácil argumentar que cada miembro de la actual generación se encontrará mejor en un punto de equilibrio con una mejor calidad de medio ambiente que en uno con menor calidad. Lo que no es tan claro es que los miembros de la generación actual se encontrarían mejor en un punto de equilibrio de ese tipo que en una situación de desequilibrio que además sea posiblemente inestable. El trabajo termina con esta observación de corte pesimista.

El desarrollo del resto del trabajo se presenta como sigue: En la sección 2, presentamos el modelo OLG de dos ecuaciones de la población y el medio ambiente y consideramos las preguntas sobre la existencia y la estabilidad local de las soluciones de equilibrio estacionario, con algunas observaciones sobre la evolución global del sistema. Los detalles matemáticos se presentan en un apéndice sobre la dinámica de los sistemas planares. En la sección 3, nuestra atención se centra en la relación entre el medio ambiente y la población cuando la fertilidad es determinada endógenamente para maximizar la utilidad de los padres de los hijos que sobrevivan. Argumentamos que un límite absoluto al número de hijos que puede tener una mujer en su vida reducirá, finalmente, la tasa de crecimiento de la población si las posibilidades de supervivencia declinan lo suficiente, inclusive si el número de nacimientos continúa creciendo. La forma en la cual los hijos generan una utilidad para sus padres es considerada en la sección 4, en la cual se llega a una conclusión similar inclusive cuando se asume que la probabilidad de supervivencia no es afectada por la calidad del medio ambiente. En este contexto, en la sección 5 se introducen impuestos y subsidios que pueden llevar a, y mantener, una determinada tasa de nacimientos. El altruísmo paternal es presentado en la sección 6 y se muestra que lleva a una tasa da nacimientos mayor que aquella que se daría si éste no existiera para cualquier estado de calidad del medio ambiente. A pesar de que el altruísmo generalmente lleva a fracasar en el intento de lograr un Pareto-óptimo, desde el punto de vista de la actual generación, resulta difícil especificar un punto de este tipo. La sección 7 concluye con algunas consideraciones sobre la posibilidad de inversión en capital físico y humano para mejorar el bienestar de las generaciones futuras y mejorar los efectos de la presión de la población sobre el medio ambiente.

2. LA DINAMICA DE LA POBLACION Y EL MEDIO AMBIENTE CUANDO LA FERTILIDAD ES ENDOGENA

Considérese un modelo OLG de dos generaciones que se superponen, en el cual las personas viven como niños en el primer período. Al final del primer período, con el objetivo de maximizar su utilidad de vida en el siguiente período ya como adultos, ellos se reproducen para lograr una utilidad que puede o no reflejar preocupación por el bienestar futuro de su descendencia. Asumimos que sus decisiones reflejan su percepción del estado del medio ambiente. Para evitar las complicaciones de la reproducción sexual y el matrimonio, asumimos que la reproducción se da mediante partenogénesis.

Sea Z_t una medida del estado de la degradación ambiental en el período t. Por lo tanto, mientras mayor sea Z_t menor será el nivel de la calidad ambiental. Sea N_t el número de hijos vivos al final del período t que instantáneamente se convierten en padres en ese momento. Asumimos que el estado actual del medio ambiente depende solamente del estado que tenía en el período anterior, en tanto que es ese el que interactúa con aquella parte de la población que en ese momento eran niños:

$$Z_t = g(Z_{t-1}, N_{t-1}) \tag{2.1}$$

donde $\partial g/\partial Z_{t-1}>0$ y $\partial g/\partial N_{t-1}>0$ [1]. El supuesto de que $\partial g/\partial N > 0$ no es controversial. Se ha sugerido (McNicholl, 1990; Jodha, 1990; Simon, 1977, pp. 82-107) que en ciertos tipos de medio ambiente, dada la adecuada organización social e institucional, una población creciente puede afectar de manera favorable la calidad del medio ambiente. Más aún, una relación favorable de este tipo puede ser característica en situaciones de niveles de población bajos y niveles relativamente altos de calidad ambiental pero no cuando la presión de la población es grande. Sin embargo, este no es ni nuestro punto de interés ni el centro de la discusión en esta sección. Un estado ambiental estacionario, si existe para algún nivel de población con N habitantes, está caracterizado por $Z_t = Z_{t-1} = \bar{Z}$ tal que:

$$\bar{Z} = g(\bar{Z}, N). \tag{2.2}$$

En un punto con estas características, si existe alguno, definimos las elasticidades:

$$\xi_Z = \frac{\partial g\bar{Z}}{\partial Z\bar{Z}} \quad \text{y} \tag{2.3a}$$

$$\xi_N = \frac{\partial g\bar{N}}{\partial N\bar{Z}} \tag{2.3b}$$

En las siguientes secciones de este documento, nuestra preocupación se referirá a la manera como las decisiones familiares con respecto a los na-

1. En una formulación anterior (Nerlove y Meyer, 1990) asumimos específicamente que g era de tal forma que:

$$Z_t/Z_{t-1} = g^*(N_{t-1}).$$

Tomando logaritmos, es fácil ver que eso implica:

$$\xi_Z = \frac{\partial_g}{\partial Z_{t-1}} \; \frac{Z_{t-1}}{Z_t} = 1.$$

Nuestro supuesto más específico fue motivado por el deseo de facilitar una determinación gráfica de las trayectorias globales. Desafortunadamente, $\xi = 1$ virtualmente garantiza inestabilidad local de cualquier punto estacionario.

cimientos, o la *fertilidad endógena,* en tanto que son formadas por las circunstancias o restricciones ambientales, se relacionan con la tasa de crecimiento de la población N_t/N_{t-1}. Por lo tanto, es natural tratar este punto sobre la base de una unidad familiar para que las decisiones individuales se traduzcan en resultados sociales de manera proporcional al número de personas que toman las decisiones. En este punto, permítasenos escribir de manera general:

$$N_t/N_{t-1} = h(Z_{t-1}), \tag{2.4}$$

donde se determina h' [2]. Una población estacionaria, si existe para un determinado nivel de calidad del medio ambiente $\bar{Z}$, es caracterizada por $N_t = N_{t-1} = \bar{N}$ de tal manera que:

$$1 = h(Z). \tag{2.5}$$

Dado que h podría no ser monotónica o que podría no existir un valor para Z para el cual h(Z)=1, la ecuación (2.5) puede tener múltiples soluciones, una solución, o ninguna solución. A continuación argumentamos que los modelos plausibles de toma de decisiones familiares y/o los efectos de elevar las tasas de mortalidad con un creciente deterioro ambiental hacen posible que si, para una calidad de medio ambiente relativamente buena, h' > 0, eventualmente a medida que el medio ambiente se deteriora, h' < 0. Por lo tanto, si h' cambia de signo solamente una vez, existen dos soluciones para (2.5) o no existe ninguna. Si existe una solución, definimos las elasticidades:

$$\eta_Z = h'\bar{Z}/\bar{N} \tag{2.6a}$$

$$\eta_N = h\bar{N}/\bar{N} = 1, \tag{2.6b}$$

2. En Nerlove y Meyer (1991), hicimos que las decisiones familiares al final de período t-1 dependan de la calidad del medio ambiente en el período t:

$$\frac{N_t}{N_{t-1}} = h^* (Z_t) \tag{2.4*}$$

Esto sólo complica el álgebra sin contribuir en algo esencial al análisis.

esto es, debido a la forma de la relación entre el actual nivel de la población, su valor pasado, y la calidad del medio ambiente, η_N es siempre 1 en un nivel estacionario de la población. Este hecho juega un papel crucial en el análisis posterior.

Para que se dé una solución estacionaria, en la cual tanto la calidad de la población como del medio ambiente no cambien, debe cumplirse que existan puntos (Z,N) para los cuales (2.2) y (2.5) se cumplen simultáneamente:

$$\bar{Z} = g(\bar{Z}, \bar{N}) \quad y \quad 1 = h(\bar{Z}). \tag{2.7}$$

Es claro que, inclusive en el caso en el que existan soluciones para (2.5), ninguna puede ser caracterizada por $\bar{N}$ de tal manera que (2.2) se cumpla. Sin embargo, lo opuesto no es verdadero; cualquier solución de (2.2) debe ser caracterizada por un N que no cambia, a excepción, posiblemente, del caso en el que la función g es patológica. En el Apéndice, mostramos cómo encontrar los puntos estacionarios de manera gráfica, si éstos existen, y también cómo determinar los puntos a lo largo de la trayectoria que comienza en cualquier otro punto. Aquí solamente resaltaremos que si $\xi_z = 1$, una propiedad que garantizará la inestabilidad local de cualquier punto estacionario que pueda existir, entonces es fácil imponer condiciones plausibles sobre g que garantizarán una solución simultánea $(\bar{Z}, \bar{N})$ para (2.7).

Las ecuaciones (2.1) y (2.4) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales no-lineales que determinan las trayectorias de las dos variables Z_t y N_t desde algún punto inicial (Z_0, N_0) y sujeto a determinadas condiciones límite, es el denominado *sistema-planar*. Los sistemas de ecuaciones diferenciales no-lineales pueden ser analizados cualitativamente en la vecindad de un punto estacionario $(\bar{Z}, \bar{N})$ mediante los métodos estándar. Ver por ejemplo, Iooss y Joseph (1990, Capítulo 4, pp. 42-58). El análisis del comportamiento global es considerablemente más difícil y puede ser excesivamente complejo (Guckenheimer y Holmes, 1986). El Apéndice contiene un análisis completo de la dinámica local de los sistemas planares con una aplicación al sistema (2.1) y (2.4) y algunas consideraciones sobre las propiedades globales, incluyendo el análisis diagramático al que nos referimos anteriormente. La discusión de la dinámica global también sirve para ilustrar cómo se puede determinar la existencia de puntos estacionarios.

El análisis general de la estabilidad local es proporcionado por un análisis que incorpora los supuestos especiales con respecto a las funciones g y h en (2.1) y (2.4). Estos se encuentran en el punto estacionario $(\bar{Z}, \bar{N})$, si alguno existe,

$\xi_Z > 0$
$\xi_N > 0$
η_Z puede ser positivo o negativo
$\eta_N = 1$

El análisis muestra que, si $\xi_z >= 1$, ningún punto estacionario podrá ser alguna vez un punto localmente estable. En consecuencia, al estudiar la *posibilidad* de una solución local estable, se puede omitir este caso y asumir que $\xi_z < 1$. El análisis entonces conduce a las siguientes conclusiones:

Proposición 1: Si en un punto estacionario $S = (\bar{Z}, \bar{N})$, $\eta_z > 0$, i.e., la tasa de cambio de la población responde de manera positiva al deterioro del medio ambiente, el punto S es inestable. Es un *punto de ensilladura inestable* cuando:

$$\xi_N \eta_Z < 2(1 + \xi_Z)$$

y es un *punto inicial inestable* cuando:

$$\xi_N \eta_Z > 2(1 + \xi_Z)$$

Discusión: Dado que ya se ha restringido la consideración al rango $0 < \xi_Z < 1$, el límite sobre $\xi_N \eta_Z$ es un número entre 2 y 4. Por lo tanto, el tipo de inestabilidad que se encuentre cuando $\xi_N > 0$ y $\eta_Z > 0$ depende de cuán sensible sea la calidad del medio ambiente a la presión de la población. Si es relativamente insensible, la tasa de crecimiento de la población puede ser más sensible al deterioro del medio ambiente y todavía dar como resultado un punto de ensilladura localmente inestable más que un punto inicial inestable.

Proposición 2: Si, en un punto estacionario S, $\eta_Z < 0$, entonces existe la posibilidad de que S sea estable.

Discusión: En la siguiente sección argumentaremos que si $\eta_Z > 0$ a niveles bajos de Z, esto es, ambientes relativamente buenos, es probable que η_Z caiga y que eventualmente se haga negativo, abriendo así la posibilidad de que exista otro punto estacionario con una población mayor y con un medio ambiente más pobre, el cual es un equilibrio estable para el sistema. La argumentación se basa en el hecho de que existe un determinado límite superior para el número de hijos que puede tener una mujer. En la siguiente sección se da un argumento similar con base en el supuesto de que la calidad del medio ambiente se convierte más bien en un factor de producción común, en el sentido de que el deterioro reduce, en lugar de aumentar, los beneficios que se perciben de tener más hijos, cuando la calidad del medio ambiente se torna lo suficientemente mala.

Proposición 3: Aún cuando $\eta_N<0$ en un punto estacionario S, si

$$\xi_Z-\xi_N>1$$

o, dicho de otra manera, dado que $0<\xi_Z<1$ y $\xi_N>0$, $\eta_N<0$, cuando

$$\xi_N(-\eta_N)>1-\xi_Z>0,$$

S es un punto de ***espiral inestable***. En cualquier otro caso S es un ***nodo de espiral estable*** o un ***nodo simple estable*** que depende de cuan pequeño sea $\xi_N(-\eta_Z)$ en relación a ξ_Z.

Discusión: Dado que ξ_Z está limitado entre 0 y 1, también lo es $1-\xi_Z$. Por lo tanto, la posibilidad de que S sea estable en cualquier forma se reduce a medida que ξ_Z se acerca a 1. Inclusive bajo las circunstancias más favorables, la estabilidad puede lograrse sólo cuando:

$$\xi_N(-\eta_Z)<1.$$

Por lo tanto si ξ_N es pequeño, η_Z puede ser mayor en valor absoluto y se puede lograr la estabilidad. Sin embargo, si ξ_N es grande, la tasa de crecimiento de la población debe ser más bien insensible al deterioro del medio ambiente. El balance es delicado: Para cualquier ξ_Z dado entre cero y uno, ya sea un ξ_N o una $(-\eta_z)$ demasiado grande, producen inestabilidad. En la última sección de este documento mostramos cómo la intervención social en la forma de un impuesto per cápita sobre los niños y un subsidio de suma fija a los padres pueden ser usados para forzar al sistema hacia el equilibrio alterando la función h, y por lo tanto η_z, y manteniéndola en ese punto. Pero además argumentamos que una intervención de ese tipo puede no representar una ganancia en el bienestar de los padres inclusive cuando ellos son altruístas con respecto a sus hijos.

3. FERTILIDAD ENDOGENA 1: SE ASEGURAN SOBREVIVIENTES PARA ASEGURAR SU PROPIA VEJEZ

En esta sección derivamos una relación entre la tasa de crecimiento de la población y la calidad del medio ambiente basada en un modelo en el cual los padres determinan su fertilidad para maximizar su utilidad, la misma que es una función cóncava del número de hijos que sobreviven. Se puede mostrar que el número óptimo de nacimientos, bajo circunstancias más bien generales, está relacionado de manera negativa con la probabilidad de supervivencia, la cual a su vez, asumimos que está relacionada con la calidad del medio ambiente a través de los efectos del deterioro del medio ambiente, la contaminación ambiental y la sobrepoblación sobre la mortalidad de infantes y niños. La introducción de costos de nacimiento *ex ante* que se encuentran correlacionados de manera positiva con la tasa de mortalidad de infantes y niños, al igual que con el número de nacimientos, puede reducir e inclusive cambiar el signo de la relación entre el deterioro ambiental y la tasa de nacimiento determinada endógenamente. Pero, en cualquier caso, la tasa de crecimiento de la población no depende solamente de la tasa de nacimiento óptima para una determinada tasa de supervivencia, que, a su vez, depende del nivel de la calidad del medio ambiente. También depende de la elasticidad de la tasa de nacimientos con respecto a la probabilidad de supervivencia. Mientras que la elasticidad es generalmente negativa, mostramos que éste debe aproximarse a cero a medida que el medio ambiente se deteriora debido a la existencia de una limitación absoluta al número de alumbramientos que pueda tener una mujer. Esto significa que si η_z de la sección anterior es inicialmente positivo debe, eventualmente, hacerse negativo. Las tasas de mortalidad de los adultos (donde la muerte sucede antes de o en los límites de la reproducción), que aumentan a medida que el medio ambiente se deteriora, tienen un efecto similar.

Se mantiene el supuesto hecho en la sección anterior de un modelo OLG de dos períodos con partenogénesis. En el primer período de vida, los niños apoyan a sus padres, en el segundo, cada niño se convierte en un padre o madre y vive del fruto del trabajo de sus hijos. El análisis es una extensión de la denominada "hipótesis de la seguridad de la vejez" (Neher, 1971; Schultz, 1974; Willis, 1980). Nerlove, Razin y Sadka (1987a y b) muestran que el altruismo paternal puede alterar la conclusión habitual sobre la forma en la cual otros mecanismos, aparte de los niños para transferir recursos de la juventud a la vejez, pueden afectar la fertilidad.

Se ha argumentado que tasas de natalidad menores están asociadas empíricamente a menores tasas de mortalidad infantil, las cuales a su vez están asociadas con tasas de mortalidad generalmente decrecientes (Freedman, 1975; Preston, 1976, 1978; Schultz, 1981). Una relación de este tipo sirve como base para muchas teorías sobre la denominada transición demográfica. Sin embargo, se ha probado que es difícil de encontrar una demostración de esta relación a partir de un modelo económico simple de elección de fertilidad. El reciente trabajo teórico de Sah (1991), y en un menor grado el pionero trabajo numérico de Wolpin (1984), han proporcionado un significativo avance en el desarrollo de una caracterización analítica satisfactoria de la regularidad empírica observada en términos de la estructura de la función de utilidad del padre, así como de la existencia de costos *ex ante*. Para nuestros propósitos en este documento, simplemente asumiremos que el padre maximizador de utilidad, determina el número óptimo de alumbramientos que va a tener, como una función de la probabilidad de que el fruto de cada alumbramiento sobreviva y considerando los costos marginales *ex ante* de los nacimientos que puedan o no estar correlacionados negativamente con las probabilidades de supervivencia de cada niño.

En primer lugar asumiremos que los costos *ex ante* del nacimiento están ausentes y que, *ex post*, la utilidad de los padres es una función del número de hijos que han sobrevivido, n_t, el cual si asumimos que los niños que sobreviven al alumbramiento también sobreviven para reproducirse, es la tasa de crecimiento del número de padres:

$$n_{t-1} = N_t/N_{t-1}. \qquad (3.1)$$

Luego del análisis de este caso examinaremos la diferencia que puede implicar la muerte de los adultos antes de la reproducción y los efectos de costos *ex ante* de los nacimientos.

Sin embargo, en este modelo, no todos los que nacen sobreviven. Si la proporción de sobrevivientes es s entonces, en promedio,

$$n_t = s\, b_t. \qquad (3.2)$$

Sah (1991) muestra que, cuando la utilidad es una función cóncava de los nacimientos que sobreviven cuando no existen costos *ex ante* o limitaciones absolutas sobre el número de alumbramientos que puede tener una mujer, el valor óptimo maximizador de utilidad de b_t expresado como una función de s no es creciente. La prueba de Sah usa esencialmente la naturaleza discreta de la variable b en el nivel individual. Para nuestros propósitos, asumiremos que la función que relaciona el número óptimo de nacimientos con la probabilidad de supervivencia es:

$$b = \hat{b}(S) = \hat{b}\,[S(Z)] = H(Z), \tag{3.3}$$

donde $\hat{b} < 0$ y $s' > 0$, tal que $H' > 0$. s es una función decreciente del deterioro del medio ambiente. Por lo tanto, b es una función creciente del deterioro del medio ambiente. Los subíndices de período han sido eliminados para simplificar.

De (3.2) se sigue que:

$$h'(Z) = s'(Z)\, H(Z)\, [1 + \sigma(Z)], \tag{3.4}$$

$$\text{donde } n = s\,\hat{b}(s) = s(z)\, H(Z)$$

$$\text{y } \sigma(Z) = b'[s(Z)]\, s(Z) / b\,[s(Z)],$$

es la elasticidad de los nacimientos con respecto a la tasa de supervivencia. Dado que $s'<0$, $H>0$, $\sigma<0$.

$$h' \gtrless 0 \text{ según } \sigma \gtrless -1 \tag{3.5}$$

Por lo tanto, η_Z, la elasticidad de la tasa de crecimiento de la población con respecto al deterioro del medio ambiente, es positiva o negativa dependiendo de si la elasticidad de los nacimientos con respecto a la tasa de supervivencia, que es negativa, es mayor que o menor que uno en valor absoluto. Esto depende claramente de la forma de la función de utilidad de los padres, cuestión que investigaremos en un contexto particular en la siguiente sección.

¿Cuál es el efecto de muertes de adultos en un período anterior al de la reproducción en el signo de la derivada de n con respecto al deterioro del medio ambiente? Supóngase que la tasa de mortalidad adulta δ es una función creciente de Z. Entonces

$$dn/dZ = h'(1-\delta) - h\delta'. \tag{3.6}$$

Dado que $0<\delta<1$ y si $\delta'>0$, la tasa de crecimiento de la población se reducirá debido al deterioro del medio ambiente en una proporción menor a lo que se habría dado en ausencia de tales efectos "Malthusianos"; en particular, si η_z es inicialmente positiva eventualmente se hará negativa si las muertes de adultos aumentan.

Existe otra razón para suponer esto y se deriva de un factor que no ha sido introducido explícitamente en el modelo. Este es el hecho de que exista una limitación absoluta sobre el número de alumbramientos que una mujer puede tener en su período de vida. Una limitación absoluta de este tipo implica que a medida que el medio ambiente se deteriora y el número de nacimientos derivados se incrementa, la elasticidad de los nacimientos con respecto a la tasa de supervivencia debe aproximarse a cero desde abajo. Por lo tanto, si σ tiene inicialmente un valor menor a -1, eventualmente éste se hará mayor a -1. Esto está ilustrado en la Figura 1. El primer panel muestra la probabilidad de supervivencia decreciente con el deterioro del medio ambiente. El segundo muestra, mediante el resultado de Sah, la tasa de alumbramientos por cada mujer que se incrementa a medida que la probabilidad de supervivencia cae debido al deterioro del medio ambiente. El tercer panel muestra que si la tasa de incremento óptimo de los nacimientos es lo suficientemente rápida en el inicio para hacer $\sigma<-1$, esta tasa debe hacerse más lenta a medida que se acerca al número máximo de alumbramientos por mujer de tal manera que, eventualmente, σ debe llegar a ser menor que uno en valor absoluto.

¿Cuáles son los efectos de los costos *ex ante* de tener hijos? Debemos distinguir entre los movimientos a lo largo de la curva que relacionan tales costos al número de nacimientos y los desplazamientos de la curva debido a factores tales como el deterioro del medio ambiente que también afectan las posibilidades de supervivencia de un niño. Manteniendo la curva de costos *ex ante* fija se puede ver fácilmente que los efectos de una reducción en la supervivencia en el incremento del número óptimo de nacimientos se anulan parcialmente si el costo marginal de nacimientos adicionales es positivo. Por lo tanto, para cualquier función de utilidad determinada, el número óptimo de nacimientos será menor y se incrementará a una tasa menor a medida que las posibilidades de supervivencia caen. Si los *costos marginales ex ante* de un nacimiento adicional son constantes, sólo se reducirá el número óptimo de nacimientos; el efecto de una caída en la posibilidad de supervivencia no debería cambiar. Así se puede esperar que σ sea grande en valor absoluto (más negativo) para cualquier nivel de probabilidad de supervivencia determinado.

Supóngase ahora que toda la curva de costos *ex ante* se desplaza hacia arriba, los costos marginales no cambian, a medida que las probabilidades de supervivencia caen. Cualquiera que hubiera sido la respuesta óptima de las tasas de natalidad en ausencia de tales desplazamientos, ésta será *menor* cuando ellos ocurran, es decir, la elasticidad de los nacimientos con respecto a la probabilidad de supervivencia se reducirá en valor absoluto. Por lo tanto, los costos *ex ante* de los nacimientos, cuyo nivel se incrementa con el deterioro del medio ambiente, hacen que sea más probable que $\eta_z<0$ que $\eta_z>0$. Pero, por supuesto, el deterioro del medio ambiente también puede cambiar la pendiente de la curva de costos *ex ante* y por lo tanto alterar la elasticidad de η_z de otra manera.

Para llegar a conclusiones más definitivas, es necesario especificar más exactamente la función de utilidad de los padres y la naturaleza de los costos en los que se incurre al tener hijos. Suponemos que todos los niños que nacen sobreviven y que no existen costos *ex ante,* y por lo tanto...

4. FERTILIDAD ENDOGENA 2: UNA PARABOLA SOBRE LA LEÑA

Supóngase que todos los niños sobreviven al nacimiento y en el primer período de vida ayudan a sus padres recogiendo leña que se comparte de manera equitativa entre todos los miembros de la familia. Cualquier otra regla de distribución tendrá el mismo efecto. (No existen otros costos *ex post* o *ex ante* de tener un hijo adicional aparte del de compartir la producción familiar). Debido a que todos los niños sobreviven,
$b_t = n_t$.

El deterioro del medio ambiente está, como se asumió anteriormente, relacionado con el tamaño de la generación de los padres, i.e., al número de niños que trabajan en el período anterior. Mientras más grande sea esta cohorte, mayor será la tasa de deterioro del medio ambiente que se asuma. Por debajo de un determinado tamaño de la población, se asume que el medio ambiente está mejorado. Se asume que el estado del medio ambiente existente afecta la percepción de los padres del beneficio de tener un hijo adicional al afectar sus expectativas sobre la productividad marginal de que exista un miembro más de la familia recogiendo leña y su percepción del nivel de la función de producción de la familia. Estas expectativas son formadas en el momento en que cada pareja decide el número de hijos que va a tener. Mientras asumimos que tales decisiones reflejan una percepción correcta de la relación entre el tamaño de su cohorte y del estado futuro del medio ambiente, no asumimos que ellas tomen en cuenta el posible comportamiento de otros padres o madres o los efectos del número de niños a nacer en futuros estados del medio ambiente. Ciertamente, dado que se asume que los padres no se preocupan sobre el bienestar de los niños, este comportamiento es consistente, debido a que los efectos del tamaño de la cohorte de niños sólo se darán luego de que los padres hayan muerto. Cada pareja decide cuántos niños tener sobre la base de su percepción de la relación entre el ingreso familiar, el número de hijos que ella tiene, y el estado del medio ambiente. Esta relación toma en cuenta sus creencias sobre la productividad de sus hijos y de una correcta evaluación del estado del medio ambiente durante el período t-1.

Nótese que la "función de producción" en este modelo es un asunto puramente familiar, pero podría estar, y es probable que lo esté, relacionado a alguna función de producción para toda la economía y con una realidad objetivo. El argumento de un "equilibrio de Nash" debería ser suficiente para establecer la conexión entre una función de producción para una economía de este tipo y las percepciones de cada padre individualmente.

En este contexto, asumimos que el producto marginal percibido por tener un hijo adicional es positivo pero decreciente. Un creciente deterioro del medio ambiente reduce la cosecha de la familia, *ceteris paribus,* pero su efecto sobre el producto marginal percibido por tener un hijo más puede ser positivo o negativo. Sea x_t la cosecha esperada de la familia, entonces:

$$x_t = f(b_{t-1}, Z_{t-1}),\ f(0, Z_{t-1}) = 0 \tag{4.1}$$

y donde $f \geq 0$, $f_1 > 0$, $f_{11} < 0$, y $f_2 < 0$, para todo $b \geq 0$ y $Z > 0$.

Si se puede asumir que el estado de la degradación del medio ambiente, Z, se comporta como la inversa de un factor de producción ordinario, sería plausible argumentar que:

$$f_{12} < 0$$

de tal manera que se esperaría que *incrementos* en la calidad del medio ambiente incrementen la productividad marginal del otro factor, por ejemplo, los niños. De manera similar, se puede esperar que el efecto marginal de un mayor deterioro del medio ambiente *disminuya* a mayores niveles de empobrecimiento de la calidad de medio ambiente, i.e., a mayor calidad del medio ambiente, mayor será el efecto marginal del deterioro:

$$f_{22} < 0.$$

Por otro lado, se puede presentar un argumento para signos contrarios. Por ejemplo, a medida que los bosques se repliegan a las laderas de las montañas, los padres percibirán un mayor beneficio de tener un hijo adicional para buscar leña. De manera más realista, en un contexto agrícola pobre, calidades más bajas del medio ambiente pueden estar asociadas a un mayor componente de ganado en la producción total, mientras que una calidad más alta del medio ambiente puede estar asociada a un mayor componente agrícola. Se puede argumentar, entonces, que los niños tienen una ventaja comparativa con respecto a los adultos al cuidar del ganado, en contraste con el trabajo de plantar, cuidar y cosechar los cultivos. Por lo tanto, el deterioro del medio ambiente puede resaltar la productividad marginal de los niños, al menos aquella relativa a la productividad total de la familia. De manera similar, el deterioro del medio ambiente puede acelerar los efectos adversos que se perciben sobre el ingreso familiar. En ambientes muy pobres los efectos de un determinado cambio en la calidad del medio ambiente pueden ser mayores que cuando el medio ambiente se encuentra en buena forma.

Se asume que los padres eligen el número de su descendencia de tal manera que maximice su propia utilidad en el período del retiro. Se asume que la utilidad es una función monotónica creciente del propio consumo de leña de la madre y nada más. Por lo tanto, el padre maximiza

$$\frac{X_t}{b_{t-1} + 1} = \frac{f(b_{t-1}, Z_{t-1})}{b_{t-1} + 1}$$

con respecto a b_{t-1}, tomando Z_{t-1} como dado. Se dejan de lado los subíndices de período en lo que sigue a continuación.

La condición de primer orden para un máximo del ingreso per cápita en la familia es:

$$\frac{(b + 1)\, f_1\, (b, Z) - f\, (b, Z)}{(b + 1)^2} = 0, \tag{4.2}$$

$$b = \frac{f\, (b, Z)}{f_1\, (b, Z)} - 1 \tag{4.2}$$

$$f_1 = f/(b + 1)$$

Dado que b = 0 implica f(0, Z) = 0, b = 0 no puede ser una solución a (4.2) en tanto que f_1 es estrictamente positiva, inclusive en b = 0. Para b>0,

$$\frac{\partial f \,/\, f_1}{\partial b} = \frac{f_1^2 - ff_{11}}{f_1^2} = 1- \frac{ff_{11}}{f_1^2} > 1,$$

como consecuencia del producto marginal decreciente de los niños y f(b,Z)>0 para b>0. Si f/f_1 también es convexa, la curva f/f_1 debe cortar la línea b+1 en algún valor b y por lo tanto (4.2) determina un valor único de la tasa de natalidad que siempre es positiva, pero que puede ser mayor que, igual a, o menor que 1, de acuerdo a si:

$$f \,/\, f_1 \gtreqless 2$$

en b=1. (Ver figura 2). Y en consecuencia (4.2) define una función h que relaciona cada estado del medio ambiente Z_{t-1} a un valor positivo único de la tasa de natalidad al final del período t-1:

$$b_{t-1} = h(Z_{t-1}) > 0. \tag{4.3}$$

Sin embargo, puede suceder que inclusive en este caso no exista ninguna solución para la ecuación h(Z)=1.
Claramente, si:

$$h(Z)>1,$$

o

$$h(Z)<1,$$

para todo Z, no existe solución. h(Z)>1 para todo Z puede ocurrir si

$$f(1, Z) < 2f_1(1, Z) \tag{4.4}$$

para todo Z. Similarmente h(Z)<1, para todo Z, si para todo Z,

$$f(1, Z) > 2f_1(1, Z). \tag{4.5}$$

Para garantizar una solución a h(Z)=1 si h(Z) es continua, es suficiente que (4.4) se cumpla para algunos valores de Z y (4.5) para otros valores.

Antes de examinar otras propiedades de h, nótese que la condición de segundo orden para un máximo siempre es satisfecha debido a que $f_{11}<0$.

¿Cómo están relacionadas las propiedades de la función h () en (4.3) a aquellas de f (),cuál es la base para la toma de decisiones de los padres con respecto a la fertilidad?

En primer lugar, permítasenos determinar h'. De (4.2),

$$h' = \frac{db}{dZ} = \frac{d}{dZ}\left[\frac{f}{f_1}\right] = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{f}{f_1}\right]\frac{db}{dZ} + \frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{f}{f_1}\right]$$

de tal manera que:

$$h' = \frac{\frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{f}{f_1}\right]}{1 - \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{f}{f_1}\right]}$$

Es ahora

$$\frac{\partial\,[f/f_1]}{\partial Z} = \frac{f_1\, f_2 - ff_{12}}{f_1^2}.$$

y

$$\frac{\partial\ [f/f_1]}{\partial b} = \frac{f_1^2 - ff_{11}}{f_1^2} = 1 - \frac{ff_{11}}{f_1^2}$$

Por lo que,
Dado que f_{11} <0 y f>0, b>0, el signo de h' (4.6) es determinado por

$$h' = \frac{f_1 f_2 - ff_{12}}{ff_{11}} \qquad (4.6)$$

$$\text{signo } h' = - \text{ signo } \{\ f_1\ f_2 - ff_{12}\} \qquad (4.7)$$

y dado que f_1>0, y f_2 <0, y f>0, para b>0, se puede decir sin lugar a ambiguedades

$$h' > 0, \text{ si } f_{12} > 0, \qquad (4.8)$$

esto es, si el producto marginal percibido de un hijo adicional se *incrementa* a medida que el medio ambiente se deteriora, las tasas de natalidad se incrementarán a medida que el medio ambiente empeore. En este caso, una buena calidad del medio ambiente *no* es igual a un factor de producción ordinario. Sin embargo, es posible determinar una interacción más general del medio ambiente y del producto marginal de un niño dado que la calidad del medio ambiente puede, en algunos niveles, ser considerado como un factor de producción ordinario, pero en ningún caso deja de estar bajo el control del padre que toma la decisión.

De (4.6) encontramos, luego de alguna manipulación, que:

$$h' = \frac{f_1 f_2}{ff_{11}}\ [1 - \varphi/\psi] \qquad (4.9)$$

donde

$$\varphi = f_{12} \frac{Z}{f_1}$$

es la elasticidad del producto marginal de un niño con respecto al deterioro del medio ambiente y

$$\psi = f_2 \frac{Z}{f}$$

es la elasticidad de la producción de la familia con respecto al deterioro del medio ambiente. Asumimos $f_1>0$, $f_2<0$, $f>0$ y $f_{11}<0$ para todo $b>0$ y, por lo tanto, para todo z.

Por lo tanto:

$$h' \gtreqless 0 \text{ de acuerdo a } 1 \gtreqless \frac{\varphi}{\psi} \,. \tag{4.10}$$

Dado que $f_2<0$, $\psi<0$. Como vimos $f_{12}>0$ implica $h'>0$ y también $\varphi>0$, pero $f_{12}<0$ implica $\varphi<0$. Por lo tanto sólo cuando $f_{12}<0$, esto es, cuando el deterioro del medio ambiente reduce el beneficio marginal percibido de tener un hijo adicional, se abre la posibilidad de que un deterioro de este tipo reduzca la tasa de nacimientos. Pero, inclusive en ese caso, el efecto es ambiguo ya que, por (4.10),

$$h' \gtreqless 0 \text{ de acuerdo a } /\psi/ \gtreqless /\varphi/ \tag{4.11}$$

esto es, si la elasticidad del ingreso familiar es mayor en valor absoluto que la elasticidad del producto marginal de un niño, $h'>0$, mientras que, si lo opuesto es verdadero, $h'<0$. Más aún, estas elasticidades pueden cambiar a medida que el medio ambiente se deteriore, lo cual abre la posibilidad de que h' cambie de signo.

Supóngase que Z *no* es considerado un factor de producción ordinario cuando la calidad del medio ambiente es relativamente buena, esto es $f_{12}>0$, entonces el deterioro del medio ambiente resalta la productividad marginal de un niño de tal manera que en este nivel de Z, $h'>0$. Ahora, sin embargo, supóngase que a medida que el medio ambiente se deteriora éste se convierte cada vez más en un factor de producción ordinario y un mayor deterioro reduce la productividad marginal de un niño al igual que el producto total de la familia. Una posible explicación para el cambio en la naturaleza del medio ambiente como un factor de producción se encuentra fuera de los angostos confines del modelo: La observación casual sugiere que, bajo severas condiciones ambientales, los niños se convierten en un obstáculo para la oportunidad de supervivencia de sus padres. En cualquier caso, inclusive si h' permanece positiva, el elevar la tasa de mortalidad de los adultos llevará finalmente a una caída en la tasa de crecimiento de la población.

5. IMPUESTOS, SUBSIDIOS E INTERVENCION SOCIAL

En las dos secciones anteriores hemos argumentado que es posible que existan múltiples soluciones estacionarias, por lo menos dos, al sistema dinámico que relaciona a la población y la calidad del medio ambiente. Si existen dos soluciones, es probable que la primera de éstas esté caracterizada por una respuesta positiva de la fertilidad y de la tasa de crecimiento de la población al deterioro del medio ambiente y la segunda por una respuesta negativa. Sólo cuando existe una respuesta negativa existe alguna posibilidad de obtener una solución estacionaria bajo otros supuestos plausibles sobre los parámetros del sistema. En esta sección investigamos cómo la intervención social a través de un sistema de impuestos per cápita sobre los niños y uno de subsidios de suma fija a los padres puede lograr cualquier tasa de natalidad socialmente deseada. Si el medio ambiente puede eventualmente recuperarse de los efectos de un excesivo crecimiento de la población, un sistema de impuestos y subsidios de este tipo podría ser utilizado para lograr y mantener una tasa de natalidad específica. En particular, la intervención social podría inducir a los padres a determinar su nivel de fertilidad para, primero, alcanzar una solución estacionaria, por ejemplo, la que tenga el menor nivel de población y el mejor nivel de medio ambiente, y, entonces, mantener ese equilibrio a pesar de su inestabilidad local. Claramente aquellos que vivan en todas las generaciones que se encuentren en el mejor nivel de equilibrio en términos del medio ambiente estarán mejor que aquellos que vivan en el peor nivel de equilibrio en términos de medio ambiente. Pero eso no significa que cada padre esté mejor; ciertamente, si, en ausencia de impuestos y subsidios, ellos eligieran diferentes niveles de fertilidad, es claro que se encontrarían en una situación peor que si se les hubiera permitido ejercer sus preferencias sin ninguna traba. Empero, dejamos para la siguiente sección la discusión sobre la economía del bienestar de las interacciones medio ambiente/población, donde presentamos el altruismo paternal con respecto a sus hijos, o el amor.

Reformúlese el problema de optimización de los padres, de la sección anterior, de la siguiente manera: Si el padre tiene b hijos, la familia puede recoger $x = f(b,Z)$ unidades de leña. Sin embargo, la leña debe ser compartida entre todos los miembros de la familia, de tal manera que cada hijo le "cuesta" al padre $p_b = x/(b+1)$. El padre toma lo que queda, y. Y el problema del padre es:

$$\max_{b} \; y \text{ sujeto a } p_b b + y = x \tag{5.1}$$

Ahora, es fácil ver cuál es el efecto de un impuesto, π, por cada nacimiento unido a un subsidio de suma fija, σ, por cada padre, el cual no es necesario compartirlo con los hijos. La restricción presupuestaria en (5.1) es ahora:

$$(p_b + \pi)\, b + y = x + \sigma \tag{5.2}$$

donde p_b es $x/(b+1)$, como estaba especificado anteriormente. El padre toma π y σ como datos. Diferenciando la expresión

$$y = x - (p_b + \pi)\, b + \sigma$$

con respecto a b, da como resultado, la condición de primer-orden adecuada:

$$\frac{\partial x}{\partial b} - (P_b + \pi) - b\,\frac{\partial p_b}{\partial b} \tag{5.3}$$

$$= f_1 - f/(b+1) - \pi - b\,\{(b+1)f_1 - f\}/(b+1)^2$$

$$= f_1/(b+1) - \pi - f/(b+1)^2 = 0.$$

Todos los impuestos se devuelven a los padres a través de un subsidio σ, de tal manera que el subsidio por cada padre debe ser igual a $b\pi$. Se sigue que π y σ están determinados para cualquier $b=b^*$ dado como:

$$\pi^* = \frac{f_1 (b^*, Z) (b^* + 1) - f (b^*, Z)}{(b^* + 1)^2} \qquad (5.4)$$

$$\sigma^* = \pi^* b^*.$$

Por lo tanto, π^* y σ^* inducen a los padres a elegir tener b^* hijos por cada familia.

Es instructivo comparar esta solución con el resultado de las preferencias paternales, sin ninguna restricción, derivadas en la sección anterior. Allí se mostró que

$$b = f/f_1 - 1.$$

Y luego de alguna manipulación, encontramos:

$$b^* = f/(f_1 - [\pi^* + \sigma^*]) - 1 \qquad (5.5)$$

De tal manera que el par ordenado impuesto/subsidio (π^*, σ^*) funciona reduciendo el beneficio percibido, f_1, de tener un hijo adicional (incrementando, si permitimos que π^* y σ^* sean negativos, i.e., que sean un subsidio por cada niño y un impuesto de suma fija por cada padre).

Dada una secuencia de calidades del medio ambiente Z_{-1}, Z_0, Z_1,..., el planificador social puede elegir una secuencia (π^*_0,σ^*_0),...para encontrar una solución a (5.5) para la secuencia b^*_0,b^*_1,...En general, el planificador puede forzar al sistema hacia un punto estacionario determinado desde cualquier punto inicial que se encuentre lejos de este punto estacionario bajo condiciones generales, por ejemplo, si la secuencia (b^*_1) necesaria para lograr este resultado se encuentra delimitada lejos de cero, y la población nunca se hace cero.

6. ALTRUISMO PATERNAL: EL AMOR NO ES SUFICIENTE

A continuación abordaremos los difíciles temas del bienestar que surgen cuando existe un altruismo paternal en el sentido de que los padres aman y valoran a sus hijos y al bienestar de éstos en mayor medida de lo que estos hijos puedan valorar el de sus padres. Como se señaló anteriormente, si los padres no se preocupan por el bienestar de sus hijos y si todos mueren al final del segundo período en el modelo OLG, ellos no pueden preocuparse por las consecuencias de sus acciones sobre la calidad futura del medio ambiente dado que ya no están vivos para experimentar tales efectos cuando éstos ocurran. Sin embargo, si los padres también aman a sus hijos, la cuestión es diferente. En esta sección, argumentamos que un amor de ese tipo, en ausencia de cualquier otro bien que no sea leña o hijos de los cuales se puede obtener una utilidad, solamente puede incrementar la fertilidad de los padres a un nivel mucho mayor que aquel que éstos elegirían en ausencia de un altruismo de ese tipo. Empero, se hace claro que la elección paternal sin restricciones puede no llevar a un óptimo de Pareto en el cual ningún padre podría estar en una mejor posición si no empeora la posición de otros, debido a que el medio ambiente que contribuye al bienestar de los niños es un recurso que no tiene precio.

Asumimos que las preferencias son estacionarias a lo largo de las generaciones, esto es, que los padres y los hijos tienen idénticas funciones de utilidad y que los padres que conocen estas funciones, pueden hacer comparaciones de utilidad interpersonales o, por lo menos, creen que pueden hacerlo. Un sistema consistente de lo que pueden ser llamadas funciones de utilidad "normalmente benevolentes" (ver Bergstrom, 1990) son las preferencias aditivas separables

$$U_t = u(c_t) + aU_{t+1}, \quad 0 < a < 1 \tag{6.1}$$

donde U_t es la utilidad de la iésima generación. (Ver también Barro, 1974, y Razin y Ben-Zion, 1975). Es bien conocido que este sistema de funciones de utilidad interdependientes induce funciones de utilidad independientes para cada generación t que toma la forma de:

$$U_t = u(c_t) + \Sigma_{j>t}\, a^{j-t}\, u(c_j). \tag{6.2}$$

En el contexto actual, es plausible que un padre derive una utilidad de cada uno de sus hijos en proporción a su utilidad maximizada. Por lo tanto (6.1) puede ser escrita nuevamente como:

$$V_t = \max b_{t-1}\, \{u(c_t) + ab_{t-1}V_{t+1}\}. \tag{6.3}$$

Algunas condiciones, tales como la no-existencia de frontera de la secuencia $\{(ab_{j-2})^{j-t}, j= t+1,...\}$ deben imponerse para asegurar la existencia de V_t definido de esta manera. El consumo de un padre de la generación t es dado en la sección 5: $c_t = f(b_{t-1}, Z_{t-1})/(b_{t-1}+1)$, y la tasa de natalidad que maximiza la utilidad en ausencia de altruismo es ilustrada en la Figura 2. Suprimiendo los subíndices de período, y haciendo que u sea igual a su argumento, y reemplazando c_t en (6.3) por su valor, podemos obtener el problema específico de un padre *en el contexto que estamos manejando:*

$$V_t = \max_b \{f(b, z) / (b + 1) + abV_{t-1}\}. \tag{6.4}$$

Ahora bien, V_{t+1} es claramente una función de lo que los padres de esta generación creen que pueda ser el curso futuro del medio ambiente. En general, estas creencias serán erróneas. Cada vez que unos padres eligen tener un hijo, hacen que disminuya la calidad futura del medio ambiente y por lo tanto el bienestar de las generaciones futuras. No se puede esperar que los padres tomen esto en consideración cuando realizan su decisión individual, dado que su sola acción tiene un efecto insignificante sobre la calidad futura del medio ambiente. Si el planificador social pudiera calcular V_{t+1} para cada generación, usando el sistema (2.1) y (2.4) para calcular las trayectorias de N y Z, y la función de utilidad de los padres (6.4), él podría, en principio, calcular la secuencia de tasas de natalidad óptima de tal manera que maximice la utilidad de una pareja de padres en la generación actual. Un cálculo de este tipo consideraría el verdadero costo marginal de un nacimiento adicional en términos de sus efectos, a través del deterioro del medio ambiente, sobre el bienestar del siguiente, y a través de éstos, en las subsiguientes generaciones. La dificultad para el planificador social consiste en saber cuáles son las creencias de los padres en la generación actual. En efecto, para resolver el problema, el planificador necesita saber tanto el valor de V_{t+1} y aquel valor que debería tener, dado un correcto pronóstico de la trayectoria futura de la calidad del medio ambiente.

El problema de las creencias de los padres podría ser resuelto introduciendo un modelo de formulación de expectativas, por ejemplo, expectativas estáticas en las cuales los padres asumen que el estado actual del medio ambiente continuará para siempre. Sin embargo, esto parece muy poco plausible a excepción de cuando el sistema se encuentra en un punto estacionario. En los puntos estacionarios, ciertamente podemos calcular la diferencia en bienestar, y el planificador puede, como lo sugerimos en la sección anterior, elegir una secuencia de impuestos/subsidios para llegar y mantener el estado estacionario con la utilidad per cápita más alta para los miembros de cada generación. La única diferencia entre estos impuestos/subsidios y aquellos del análisis anterior es que, como lo demostraremos, las tasas de natalidad son siempre más altas, para cualquier nivel dado de calidad del medio ambiente, con altruismo paternal, que sin él. Por lo tanto, en un punto estacionario, los impuestos por cada niño deben ser mayores para mantener el sistema, en ese punto con amor, que sin él.

Para demostrar que el nivel óptimo de nacimientos debe ser mayor con altruismo que sin él, se tiene que comparar las condiciones de primer orden (4.2) con aquellas que se obtuvieron en el problema de maximización (6.4), manteniendo V_{t+1} fijo para la generación actual:

$$\frac{(\tilde{b} + 1)\, f_1\, (\tilde{b}, Z) - F\, (\tilde{b}, Z)}{(\tilde{b} + 1)^2} + aV_{t+1} = 0, \tag{6.5}$$

donde b es el valor maximizador para un Z dado y un V_{t+1} fijo.
Por lo tanto:

$$\tilde{b} = \frac{f(\tilde{b}, Z)}{f_1(\tilde{b}, Z)} = \left[1 + \frac{a\, (\tilde{b} + 1)^2 V_{t+1}}{f_1(\tilde{b}, Z)} \right]. \tag{6.6}$$

Por lo tanto, el efecto es bajar toda la curva

$$\frac{f\ (b, Z)}{f_1(b, Z)}$$

en la Figura 2, en una cantidad que depende de a y V_{t+1} y un factor creciente en b. De la Figura 3,
es aparente que:

$$\tilde{b} \geq \hat{b}, \tag{6.7}$$

donde $\hat{b}$ es la solución a:

$$\tilde{b} = \frac{f(b, Z)}{f_1(b, Z)} - 1.$$

Donde existe un altruismo paternal, la tasa de impuestos necesaria para lograr cualquier tasa de nacimientos dada b = ß es más alta por el efecto altruista por cada niño, aV_{t+1}. Para ver esto, obsérvese que con impuesto/subsidio (π, σ) y altruismo, el problema de cada padre es:

$$\max_b \{[f(b, Z) + \sigma] - [f(b, Z) / (b + 1) + \pi - aV_{t+1}]b\} \qquad (6.8)$$

para σ, π, V_{t+1} fijos. Las condiciones de primer orden se siguen de aquellas derivadas previamente en (5.3), al sustituir π $-aV_{t+1}$ por π. Por lo tanto, en contraste con π^* en (5.4), tenemos:

$$\tilde{\pi} = \frac{f_1\ (\beta, Z)\ (\beta + 1) - f\ (\beta, Z)}{(\beta + 1)^2} + aV_{t-1}\ . \qquad (6.9)$$

Es necesario tener un impuesto adicional para anular los efectos del amor. El amor no sólo no es suficiente para estabilizar la relación entre la población y el medio ambiente, sino que empeora la situación.

7. CONCLUSIONES

Hemos desarrollado la dinámica de la interacción entre la población/medio ambiente en el contexto de un modelo de dos ecuaciones en el cual el tamaño de la población está relacionado al valor pasado de la población y al valor de la calidad del medio ambiente, y el nivel de la calidad del medio ambiente está relacionado a su valor pasado y al valor pasado de la población. Para un modelo con fertilidad endógena, en el cual los padres eligen el número de alumbramientos que van a tener para maximizar su utilidad y en el cual la degradación del medio ambiente, Z, convergería para una población dada y responde desfavorablemente para una población creciente, el rango de elasticidades relevantes es:

$0<\xi_I<1$: Elasticidad de la calidad del medio ambiente con respecto a su valor pasado.

$0<\xi_N$: Elasticidad de la calidad del medio ambiente con respecto a la población. (7.1)

$\eta_N = 1$: Elasticidad del tamaño de la población con respecto a su valor pasado.

La respuesta del tamaño de la población a la calidad del medio ambiente puede ser positiva o negativa, η_z indeterminado. A través de una serie de metáforas, argumentamos que η_z puede muy bien ser inicialmente positiva pero podría, dado un suficiente deterioro del medio ambiente, finalmente hacerse negativa. La estabilidad local es imposible con $\eta_z>0$, pero existen posibilidades limitadas para una estabilidad cuando $\eta_z<0$.

A continuación se estudiaron los efectos de impuestos sobre los niños y los subsidios de suma fija a los padres. Se mostró que es generalmente posible lograr una determinada tasa de natalidad con un impuesto/subsidio apropiado. Sin altruismo paternal una política de este tipo reduce el bienestar para la generación actual. Cuando los padres son altruistas, las propiedades de los impuestos que elevan el nivel de bienestar, diseñados para lograr y mantener un equilibrio con un buen medio ambiente y una baja población, son problemáticas.

Esto nos lleva a un punto final: El modelo *sólo* relaciona a la población y al medio ambiente. No existe posibilidad de inversión en capital físico para mejorar o mantener la calidad del medio ambiente o de inversión en capital humano para mejorar la calidad de vida de los niños y elevar la utilidad que los padres derivan de tener hijos sin incrementar el número de éstos. El conjunto de trabajos recientes sobre el crecimiento y la fertilidad endógena está alrededor de estos dos tipos de formación de capital. No tenemos ninguna duda de que la introducción de formación de capital físico para anular los efectos ambientales adversos de la presión de la población y de formación de capital humano para elevar la calidad de cada niño individual daría como resultado conclusiones mucho más optimistas. Sin embargo, las matemáticas necesarias para introducir estas posibilidades, son mucho más complicadas que el sistema planar analizado en este artículo. Queda mucho por hacer, pero creemos que es seguro decir que el presente trabajo ofrece las bases o el comienzo para estudiar los difíciles temas de la economía del bienestar intergeneracional, temas que se deben afrontar en cualquier intento de entender y trabajar problemas de interacción población/medio ambiente.

REFERENCIAS

BARRO, R.J.
1974 "Are Government Bonds Net Wealth? *Journal of Political Economy*, 82: 1095-1117.

BERGSTROM, T.
1990 "Systems of Benevolent Utility Interdependence". No publicado.

FREEDMAN, R.
1975 *The Sociology of Human Fertility*. Nueva York: Irvington.

GRANDMONT, J.M.
1985 "On Endogenous Competitive Business Cycles". *Económétrica*, 53: 995-1045.

GUCKENHEIMER, J. y HOLMES, P.
1986 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Nueva York: Springer-Verlag.

HARDIN, G.
1968 "The Tragedy of the Commons". *Science*, 162: 1243-1248.

HECKMAN, J. Y. y WILLIS, R.J.
1976 "Estimation of a Stochastic Model of Reproduction: An Econometric Approach". En Terleckyi, N. (ed) *Household Production and Consumption*. Nueva York: Columbia University Press.

IOOSS, J., y JOSEPH, D.D.
1990 *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Nueva York: Springer-Verlag.

JODHA, N.S.
1990 "Rural Common Property Resources: Contributions and Crisis". Discurso del Día de la Fundación, Mayo 1990, Society for the Promotion of Wastelands Development.

MCNICHOLL, G.
1990 "Social Organization and Ecological Stability under Demographic Stress". The Population Council, Working Paper No. 11.

NEHER, P.A.
1971 "Peasants, Procreation, and Pensions". *American Economic Review,* 61: 380-389.

NERLOVE, M. y MEYER, A.
1991 "Population and the Environment: Some Dynamics". Trabajo presentado en una Conferencia sobre Dinámica No-Lineal y Econometría. Universidad de California, Los Angeles, Abril 1991.

NERLOVE, M. y MEYER, A. (con Dalko, V.)
1990 "Endogenous Fertility and the Environment: A Parable of Firewood". Trabajo presentado a una Conferencia UN University/WIDER sobre Desarrollo Económico y el Medio Ambiente, Helsinki, Setiembre 1990.

NERLOVE, M., RAZIN, A., y SADKA, E.
1987a *Population Policy and Individual Choice: A Theoretical Investigation.* Research Report 60, International Food Policy Research Institute, Washington D.C.

NERLOVE, M., RAZIN, A., y SADKA,
1987b *Household and Economy: Welfare Economics of Endogenous Fertility.* Nueva York: Academic Press.

PRESTON, S.H. (ed)
1978 *The Effects of Infant and Child Mortality on Fertility.* Nueva York: Academic Press.

PRESTON, S. H.
1976 *Mortality Patterns in National Populations.* Nueva York: Academic Press.

RAZIN, A., y BEN-ZION, U.
1975 "An Intergenerational Model of Population Growth". *American Economic Review*, 65:923-933.

SAH, R.K.
1991 "The Effects of Child Mortality Changes on Fertility Choice and Parental Welfare". *Journal of Political Economy*, 99:582-606.

SCHULTZ, T.P.
1981 *Economics of Population*. Reading, MA: AddisonWesley.

SCHULTZ, T.W.
1974 *Economics of the Family: Marriage, Children and Human Capital*. Chicago: University of Chicago Press for the National Bureau of Economic Research.

SIMON, J.L.
1977 *The Economics of Population Growth*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

WILLIS, R.J.
1980 "The Old-Age Security Hypothesis and Population Growth". En Burch, T.K. (ed) *Demographic Behavior: Interdisciplinary Perspectives on Decision Making*. Boulder, CO: Westview Press.

WOLPIN, K. I.
1984 "An Estimable Dynamic Stochastic Model of Fertility and Child Mortality". *Journal of Political Economy*. 92: 852-874.

APENDICE

Análisis de Estabilidad de Sistemas Planares

1. ESTABILIDAD LOCAL EN GENERAL

Para analizar el sistema no-lineal

$$
\begin{aligned}
Z_t &= g\,(Z_{t-1}, N_{t-1}) \\
N_t &= h\,(Z_{t-1}, N_{t-1})
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

en la vecindad de un punto estacionario $(\bar{Z}, \bar{N})$, si existe uno, linearizamos el sistema alrededor del punto. Si el Jacobiano en $(\bar{Z}, \bar{N})$:

$$
J = \begin{bmatrix} g_Z & g_N \\ h_Z & h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_Z & \xi_N \bar{Z}/\bar{N} \\ \eta_Z \bar{N}/\bar{Z} & \eta_N \end{bmatrix} \tag{A.2}
$$

tiene el determinante:

$$
\det J = \xi_z \eta_N - \xi_N \eta_z \neq 1 , \tag{A.3}
$$

la linealización da una caracterización válida (topológicamente equivalente) de las propiedades de estabilidad local del sistema en la vecindad de $(\bar{Z}, \bar{N})$ la misma que es denominada, en este caso, *punto fijo hiperbólico.*

Nótese que cuando $\xi_z = 1 = \eta_n$, det $J = 1 - \xi_N \eta_z$ de tal manera que si $g_N = 0$ o $h_z = h' = 0$, el punto $(\bar{Z}, \bar{N})$ no es hiperbólico. Más aún, cuando Z_t reemplaza a Z_{t-1} en la función g en este caso, obtenemos:

$$
\det 3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_N \bar{Z}/\bar{N} \\ \eta_Z \bar{N}/\bar{Z} & 1 + \eta_Z \xi_N \end{bmatrix} = 1
$$

de tal manera que $\xi_z = 1 = \eta_N$. $Z_t/Z_{t-1} = g(N_{t-1})$ y $N_t/N_{t-1} = h(Z_t)$ no puede tener ningún punto fijo hiperbólico. Cualquier punto estacionario que exista no puede ser analizado localmente mediante métodos de linealización estándar.

El polinomio característico de J en (A.2) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr}J + \det J \qquad (A.4)$$
$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

donde λ_1 y λ_2 son las dos raíces, conjugadas reales o complejas, de $p(\lambda)=0$, y donde:

$$\mathrm{tr}\, J = \xi_z + \eta_N \qquad (A.5a)$$
$$\det J = \xi_z\eta_N - \xi_N\eta_z. \qquad (A.5b)$$

Las raíces

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,\{\mathrm{tr}J + [(\mathrm{tr}J)^2 - 4\det J]^{1/2}\}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\,\{\mathrm{tr}J + [(\mathrm{tr}J)^2 - 4\det J]^{1/2}\}$$

son *reales* si:

$$(\mathrm{tr}\, J)^2 \geq 4 \det J$$

y *complejas* si:

$$(\mathrm{tr}\, J)^2 < 4 \det J.$$

La curva C: $\det J = 1/4\, (\mathrm{tr}\, J)^2$ es graficada en el (trJ, detJ) plano en la Figura A.1. Por encima de esta curva, las raíces de $p(\lambda) = 0$ son complejas; por debajo, son reales. Al interior de la región limitada desde abajo por C, el punto estacionario es estable localmente si el módulo de las raíces, $/\lambda/^2 = \lambda_1 \lambda_2$ es menor que 1. Si es mayor, el punto estacionario es inestable. Claramente,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det J, \qquad (A.6)$$

de tal manera, cuando $/\lambda/^2=1$ exactamente, el punto no es hiperbólico; las propiedades de estabilidad local no pueden ser deducidas por la técnica de linealización. Las dos regiones son designadas I y II respectivamente.

Cuando las raíces son reales, las posibilidades son mayores. El punto estacionario es localmente estable, si ambas raíces se encuentran en el intervalo (-1,1), y es inestable, si al menos una de las raíces se encuentra fuera del intervalo. Para encontrar las regiones de estabilidad y de inestabilidad en el (trJ, detJ) plano, construimos las líneas:

$p(1) = (1 - \det J) + \mathrm{tr}\, J = 0$

y

$p(-1)=(1-\det J)-\mathrm{tr}\, J = 0.$

La línea p (1)=0 es tangente a la curva C en (2,1) y la línea p (-1)=0 en (-2,1). Por encima de p (1)=0 y p(-1)=0 pero por debajo de C ambas raíces están en el intervalo (-1,1), de tal manera que el punto es localmente estable. Esta región es designada III. Fuera del triángulo formado por las regiones II y III, el punto estacionario es inestable. El que se trate de un punto de ensilladura (en cuyo caso existe una senda de ensilladura local a lo largo de la cual la trayectoria de un punto desplazado volverá al valor estacionario) o de un caso explosivo sin ninguna senda de ensilladura, depende de si una o dos de las raíces se encuentran fuera del intervalo (-1,1). Estas regiones son designadas IV, V, VI, VII y VIII.

2. ESTABILIDAD LOCAL EN PARTICULAR

Para el sistema (A.1) la existencia o no de estabilidad en un punto estacionario, si este existe, depende claramente de las elasticidades ξ_z, ξ_N, η_z y η_N en este punto. Pero no todos los valores de estas son relevantes para el análisis de la dinámica de la interacción población/medio ambiente.

En primer lugar, es natural elegir una forma para la relación entre la calidad del medio ambiente y la población, h, tal que $\eta_N = 1$. Luego, sin embargo, una elección similar para relación entre población y medio ambiente, g, tal como $\xi_z = 1$, fuerza a que tr J=2, de tal manera que no existe posibilidad de estabilidad local, sin importar el valor que tengan η_z y ξ_N. Ciertamente, cualquier $\xi_z>1$ cuando $\eta_N = 1$, producirá una situación en la cual cualquier solución estacionaria es localmente inestable.

Anteriormente asumimos que $\xi_z >0$. Por lo tanto es suficiente considerar el rango de valores $0 < \xi_z < 1$ si uno va a evitar el supuesto automático de inestabilidad. Mientras que esto es esencialmente una cuestión empírica, el rango de valores de $\det J = \lambda_1 \lambda_2$ teóricamente interesantes es restringido a la región entre las líneas verticales a través de (1,0) y (2,0). Se presenta un acercamiento a esta sección de la figura A.1 en la figura A.2. Esta franja vertical incluye porciones de las regiones I, II, III, IV y V respectivamente, un punto inicial de espiral inestable con raíces complejas, un nodo de espiral estable con raíces complejas, un nodo estable simple con raíces reales, un punto de ensilladura inestable con raíces reales, y un punto inicial inestable con raíces reales.

En el texto, sugerimos que era posible que η_z pudiera ser tanto positiva como negativa y adelantamos algunos argumentos teóricos que sugerían que para medio ambientes relativamente buenos podía ser positiva pero para aquellos muy pobres era probable que fuera negativa. Es dudoso que ξ_N sea positiva y así se asume en el texto. Por lo tanto, considérese los puntos que se encuentran a lo largo de la línea det J = tr J - $(1+\xi_N\eta_z)$. Para $\xi_N>0$, la línea se hace p (1)=0 cuando $\eta_z = 0$. Para $\eta_z>0$, los puntos relevantes se encuentran a la derecha de la línea en la región de raíces reales inestables: un punto de ensilladura inestable si $\xi_N\eta_z$ no es demasiado grande y un punto inicial inestable si $\xi_N\eta_z$ es mucho mayor que tr $J=-1=\xi_z$. Por otro lado, cuando $\eta_z<0$ existe por lo menos alguna posibilidad de que exista un punto estacionario localmente estable.

La posibilidad de que exista estabilidad, y de que el punto estacionario sea un nodo simple o un nodo de espiral, o de que no exista estabilidad depende de la relación entre $-\xi_N\eta_z$, positiva y ξ_z, también positiva. Las posibilidades se muestran en la Figura A.3. Es fácil ver que el incrementar ξ_N, esto es haciendo que la calidad del medio ambiente sea más sensible a la presión de la población, requiere que $-\eta_z$ sea menor si se va a lograr una estabilidad, mientras que reducir ξ_N significa que la población puede ser más sensible al deterioro del medio ambiente.

Esto completa el análisis de estabilidad local de una solución estacionaria para (A.1).

3. DINAMICA GLOBAL

Cuando hay más de una trayectoria estacionaria, la dinámica global de un sistema planar es excesivamente difícil de caracterizar en cualquier término general. El comportamiento del sistema puede ser bastante complejo. También existen condiciones de frontera que deben ser consideradas: $N_t = 0$, para todo t, es obviamente una solución estacionaria estable para (A.1) si la ecuación en diferencias no-lineal univariada $Z_t = g\ (Z_{t-1},0)$ tiene una solución estacionaria. En este caso no existe población humana a reproducir. Presumiblemente existe algún horrendo nivel de deterioro del medio ambiente incapaz de permitir la existencia humana. En esta etapa la humanidad se extingue y el desarrollo del medio ambiente se da de acuerdo a $Z_t = g\ (Z_{t-1,}0)$. La variable Z_t también se encuentra limitada lejos de cero. Guckenheimer y Holmes (1986) describen una gran variedad de posibilidades dependiendo del número de puntos estacionarios y de las propiedades de estabilidad local de cada uno de ellos. Además del paso eventual a una trayectoria estacionaria estable, si ésta existe, también es posible que se den varios tipos de comportamiento cíclico y explosivo.

Mientras que no es posible establecer condiciones sobre las funciones h y g para garantizar un tipo particular de comportamiento global, es posible proporcionar un método gráfico general para mostrar la trayectoria global para elecciones particulares de estas funciones. Este método es ilustrado en la Figura A.4.

En primer lugar, dividimos el plano en cuatro cuadrantes de la manera siguiente:

I. Noroeste: Z,N
II. Noroeste: N, $g(Z_{t-1}, N_{t-1})=Z_t$
III. Sudoeste: Espacio de trabajo
IV. Sudoeste: Z, h(Z).

Los cuadrantes II, III, y IV también contienen líneas de 45 grados que han sido usadas para proyectar varios puntos de un cuadrante a otro. En IV y en III, también se han construido las líneas unitarias paralelas a los ejes de Z y h, respectivamente. La primera es utilizada para determinar aquellos valores de Z que pueden llevar a valores estacionarios de la población; el último es usado para construir una línea con pendiente $h(Z_o)$.

En el cuadrante IV grafíquese $h(Z_{t-1})$. Donde esta curva intersecta la línea unitaria determina los puntos $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$ en los cuales la población es estacionaria. La curva ha sido graficada de tal manera que h'>0 para el menor valor de Z y h'<0 para el mayor valor de acuerdo a los argumentos teóricos que se presentaron en el texto.

Para encontrar los valores estacionarios de N compatibles con $\bar{Z}_1$ y $\bar{Z}_2$, respectivamente, tenemos que determinar los puntos fijos de las funciones $Z=g(Z,N)$ como funciones de N. Así, grafíquense las curvas $g(\bar{Z}_1,N)$ y $g(\bar{Z}_2, N)$. Cuando estas curvas dan los valores de $\bar{Z}_1$ y $\bar{Z}_2$, *si lo hacen,* determinan los valores de $\bar{N}_1$ y $\bar{N}_2$, que son los valores de la población estacionarios y compatibles. Nótese que cuando g es tal que $Z_t/Z_{t-1}=g^*(N_{t-1})$, la construcción es mucho más simple. Cualquier curva $g^*(N_{t-1})$ que cruza la línea unitaria paralela al eje de N produce el valor único de $\bar{N}$ compatible con cualquier nivel estacionario de calidad del medio ambiente. Así, en este caso, los puntos estacionarios $S_1 = (\bar{Z}_1, \bar{N}_1)$ y $S_2 =(\bar{Z}_2, \bar{N}_2)$ se encuentran a lo largo de una sola línea paralela al eje de Z en el cuadrante I. Sin embargo, en general, los puntos estacionarios se encontrarán uno por encima y a la derecha del otro en el cuadrante I, con niveles bajos de población estacionaria asociados con bajos niveles estacionarios de deterioro del medio ambiente.

Habiendo encontrado dos puntos estacionarios S_1 y S_2, ahora podemos determinar cómo, partiendo de un punto (Z_o, N_o), ambas coordenadas diferentes, el próximo punto (Z_1, N_1) en la secuencia es determinado:

Primero, de Z_o encontramos $h(Z_o)$ y construimos una línea en el cuadrante III con pendiente $h(Z_o)$ en el plano (g,h) encontrando el punto donde $h(Z_o)$ intersecta la línea unitaria paralela al eje h. Entonces proyectamos N_o alrededor de la línea de 45 grados en el cuadrante II hacia el eje g. Donde una línea vertical que pasa por N_o encuentra la línea con pendiente $h(Z_o)$, determina el producto $N_oh(z_o)=N_1$ que puede ser, entonces, proyectado nuevamente al eje N usando las líneas de 45 grados en los cuadrantes III y II. Finalmente, trace la curva $g(Z_o,N)$ en el cuadrante II. Dado que $g_Z>0$, esta curva se encontrará entre las curvas correspondientes a las soluciones estacionarias S_1 y S_2, dado que se asume que $\bar{Z}_1 < Z_o < \bar{Z}_2$. El valor de $g(Z_o,N)$ en N_o determina, entonces, Z_1, que proyectamos a continuación nuevamente hacia el cuadrante I usando las líneas de 45 grados en los cuadrantes III y II. De esta manera, dada la proyección de la superficie $Z_t=g(Z_{t-1},N_{t-1})$ en el plano (N,g), cuadrante II, y la función $N_t/N_{t-1}=h(Z)$, graficada en el cuadrante IV, podemos determinar las soluciones estacionarias a las ecuaciones en (A.1), si éstas existen. Y podemos determinar las trayectorias globales de Z y N empezando por cualquier valor inicial (Z_o,N_o) repitiendo la aplicación de la técnica aquí descrita.

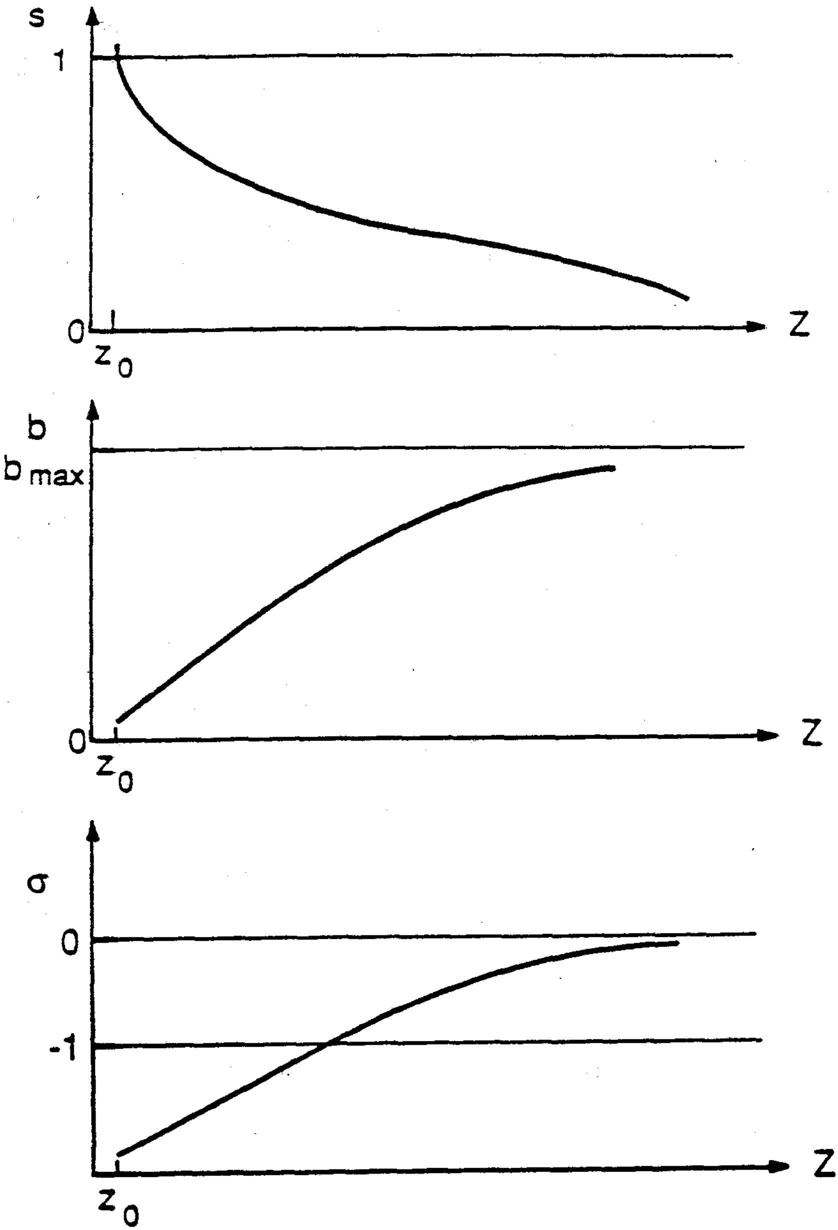


FIGURA 1

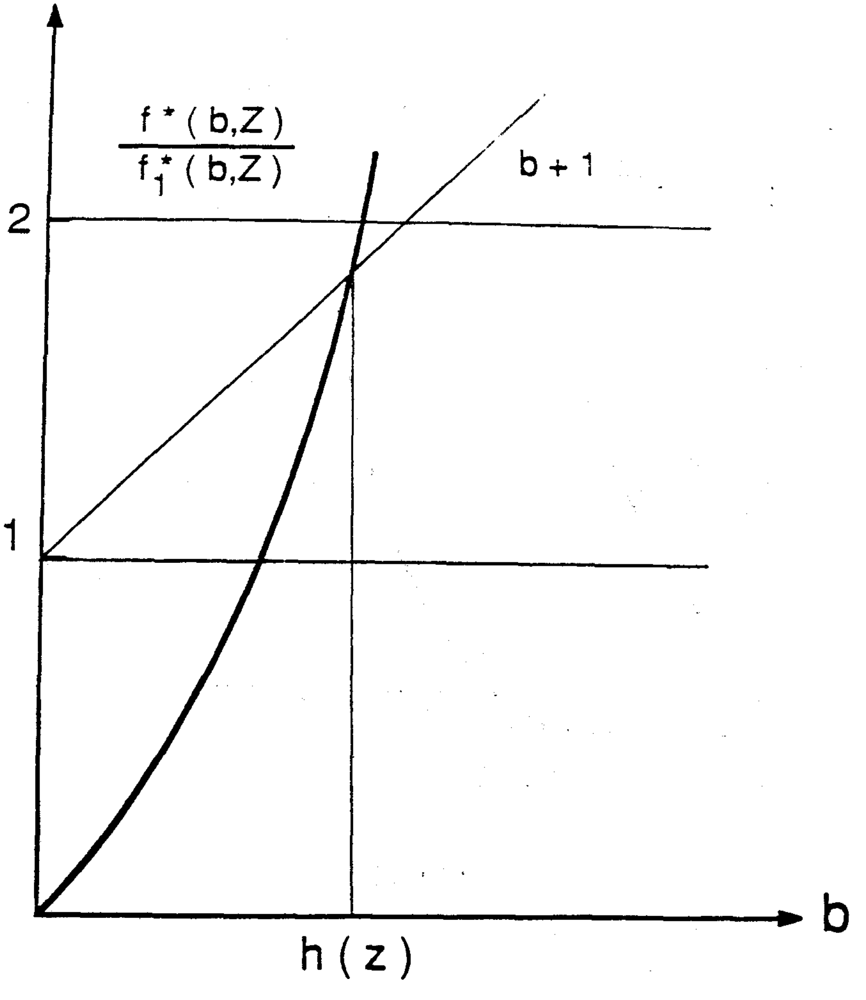


FIGURA 2

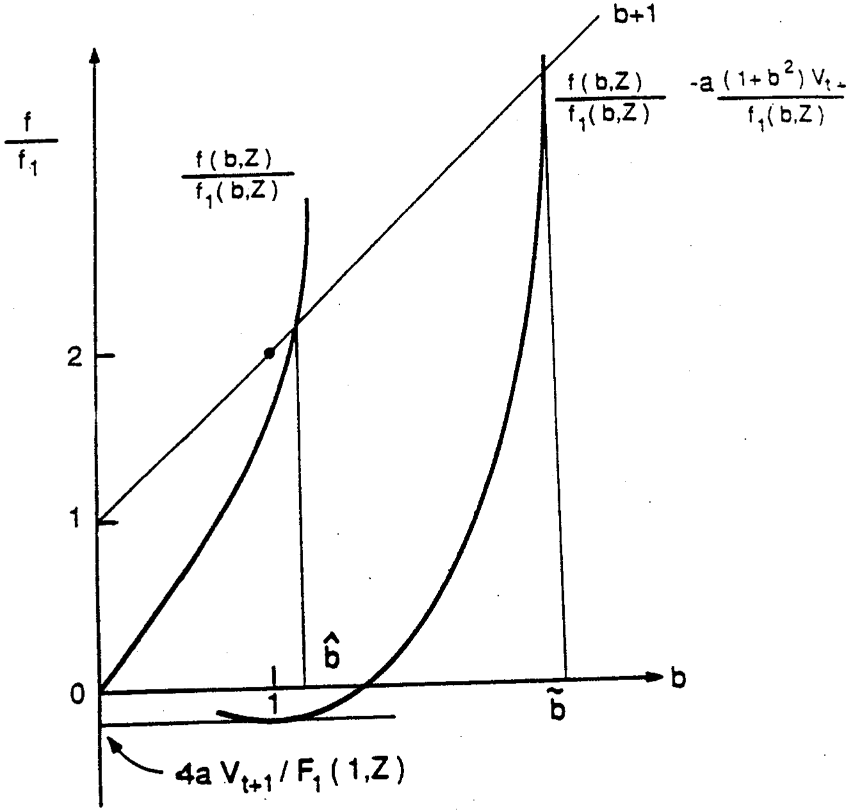
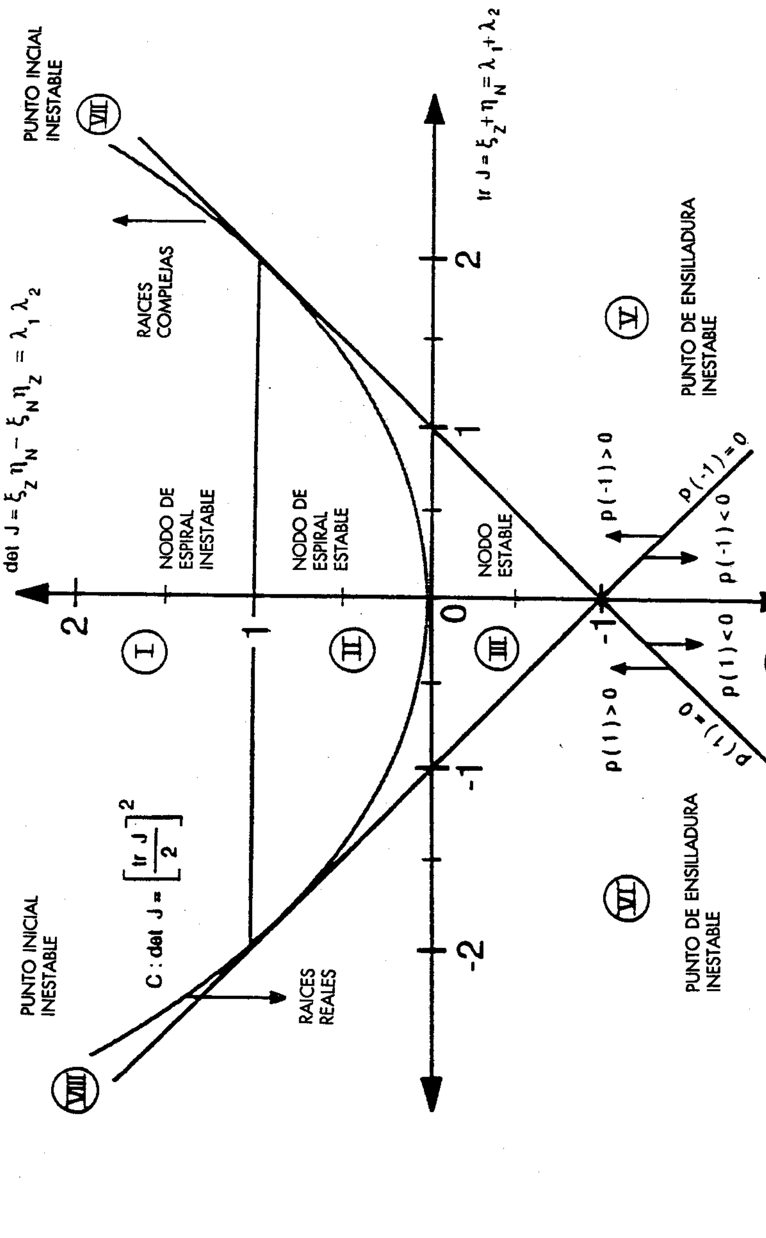
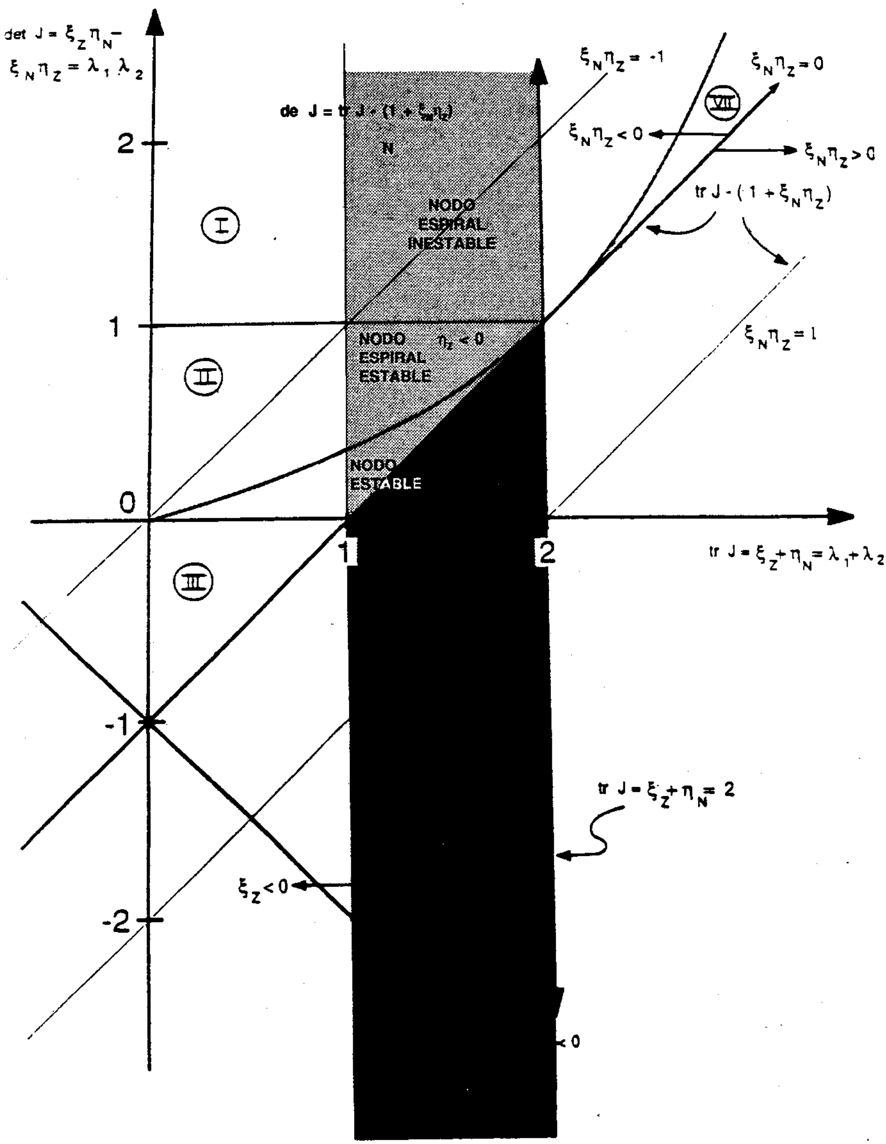


FIGURA 3



PUNTO INCIAL INESTABLE
VII
det J = ξZ ηN − ξN ηZ = λ1 λ2
RAICES COMPLEJAS
NODO DE ESPIRAL INESTABLE
NODO DE ESPIRAL ESTABLE
NODO ESTABLE
I
II
III
IV
V
VI
VIII
2
1
0
-1
-2
tr J = ξZ + ηN = λ1 + λ2
PUNTO DE ENSILLADURA INESTABLE
p(-1) > 0
p(-1) = 0
p(-1) < 0
p(1) > 0
p(1) = 0
p(1) < 0
PUNTO INICIAL INESTABLE
C : det J = [tr J / 2]2
PUNTO INICIAL INESTABLE
RAICES REALES
PUNTO DE ENSILLADURA INESTABLE

FIGURA A.1



det J = $\xi_Z \eta_N -$ $\xi_N \eta_Z = \lambda_1 \lambda_2$
$\xi_N \eta_Z = -1$
$\xi_N \eta_Z = 0$
$\xi_N \eta_Z < 0$
$\xi_N \eta_Z > 0$
tr J - (1 + $\xi_N \eta_Z$)
$\xi_N \eta_Z = 1$
NODO ESPIRAL INESTABLE
NODO ESPIRAL ESTABLE
$\eta_Z < 0$
NODO ESTABLE
tr J = $\xi_Z + \eta_N = \lambda_1 + \lambda_2$
tr J = $\xi_Z + \eta_N = 2$
$\xi_Z < 0$
I
II
III
VII
2
1
0
-1
-2

FIGURA A.2

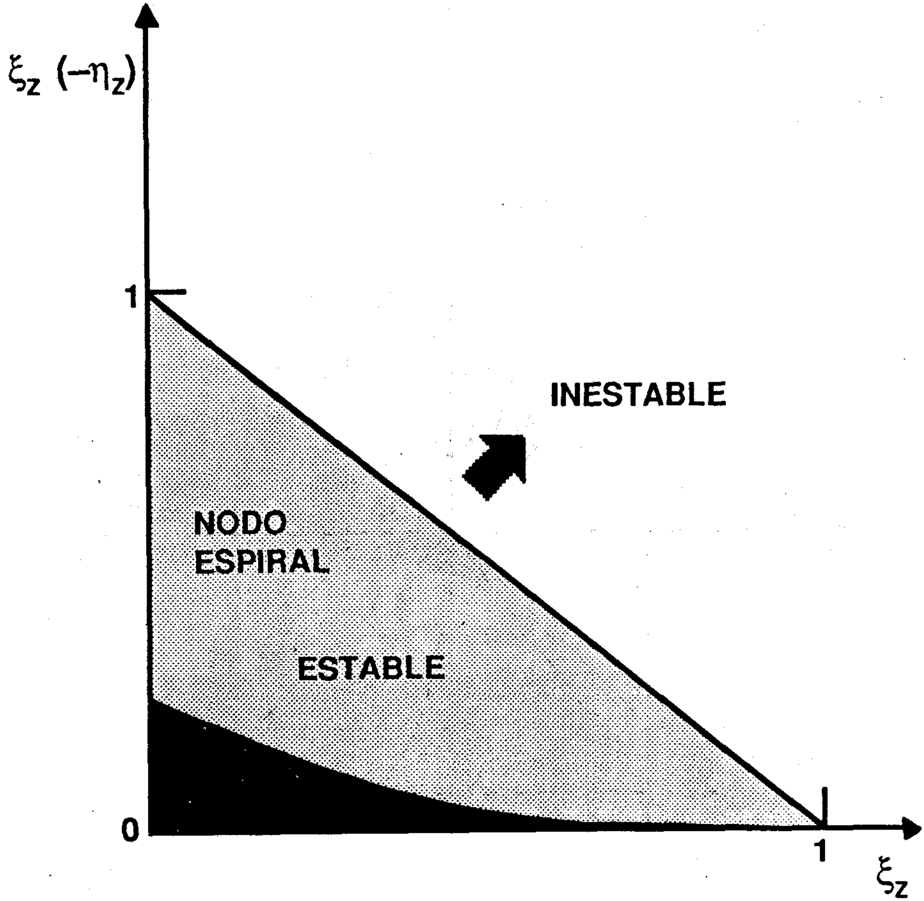
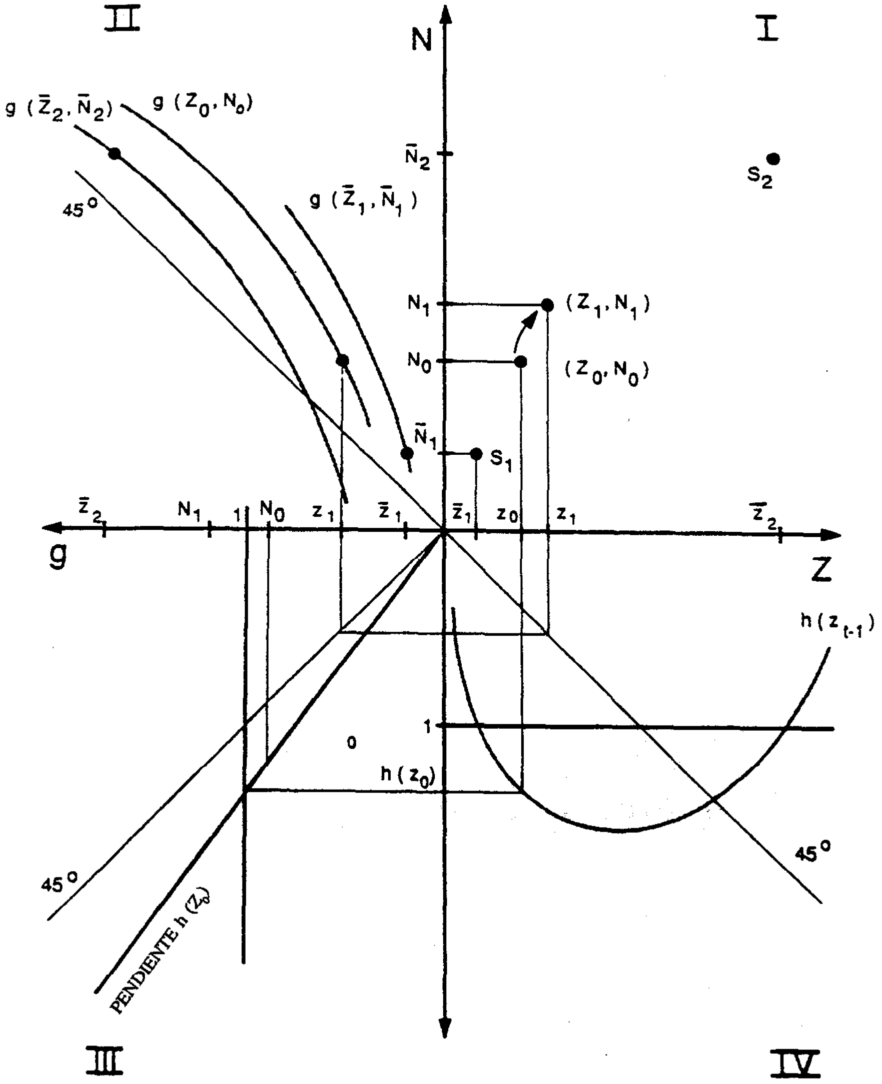


FIGURA A.3



II
I
III
IV
N
g
Z
$g(\bar{Z}_2, \bar{N}_2)$
$g(Z_0, N_0)$
$g(\bar{Z}_1, \bar{N}_1)$
45°
$\bar{N}_2$
S_2
N_1
(Z_1, N_1)
N_0
(Z_0, N_0)
$\bar{N}_1$
S_1
$\bar{z}_2$
N_1
1
N_0
z_1
$\bar{z}_1$
$\bar{z}_1$
z_0
z_1
$\bar{z}_2$
$h(z_{t-1})$
1
0
$h(z_0)$
45°
45°
PENDIENTE $h(Z_0)$

FIGURA A.4