VOLUMEN XIX Nº 37-38 JULIO-DICIEMBRE 1996

ECONOMIA

INDICE

ECONOMIA. Vol. XIX Nº 37-38 Julio-Diciembre 1996

PRECIOS COMPETITIVOS EN EL PROBLEMA DE CRECIMIENTO ECONOMICO

Wilfredo Leiva Maldonado

INTRODUCCION

Si un individuo consume una cantidad de un bien hoy, tendrá una cierta utilidad; sin embargo, si sólo supiera que la va a consumir mañana, la utilidad deberá tener un cierto descuento, y si el consumo sólo fuese pasado mañana, la utilidad sufriría dos veces este descuento; de esta manera su problema sería hallar una secuencia de consumos que maximice esta suma de utilidades descontadas.

Las trayectorias de consumo están restringidas por la tecnología existente, pues dado un capital inicial, una parte será destinada a consumo y la otra parte a inversión para producir mañana, y así sucesivamente. Si esta planificación es hecha para T períodos de tiempo, el problema es llamado de horizonte T, y si se hiciera sin ninguna restricción en los períodos de tiempo es llamado de horizonte infinito.

Existen varios estudios en el problema de horizonte infinito, la bibliografía recomendada es el libro de Lucas-Stokey (1989). Estas notas, que están basadas en un artículo de Schechtman (1973), tratan de problemas de horizonte finito y más específicamente, sobre precios competitivos definidos en estos horizontes. Estos tipos de problemas fueron también tratados por Brock-Mirman (1973) y Gale (1967), entre otros.

El objetivo de esta publicación es doble: primeramente, difundir la utilización de precios competitivos en este tipo de problemas y, en segundo lugar, preparar las bases para un segundo artículo en el que será estudiado el problema de crecimiento no descontado en su versión long-run-average.

Los resultados aquí obtenidos son para economías con un solo bien y con función de producción no determinística.

1. EL MODELO

Consideramos una economía con un único bien. La función de utilidad de un individuo representativo es: u: $R \to R$.

Dada la cantidad "x" disponible del único bien, el individuo usa parte para su consumo (c), y parte para invertirla en producción para el próximo período (y).

Si "y" unidades del bien son invertidas para la producción y ésta sufre un shock aleatorio "w" la producción correspondiente para el próximo período será f(y,w).

Supondremos que w es una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidades (Ω, A, P). Por ejemplo, podríamos pensar que el bien considerado es trigo, en donde una parte es consumida y la otra utilizada para la producción; esta última puede verse afectada por factores climatológicos que pueden ser adversos o favorables para tal producción.

Supongamos una primera hipótesis, clásica en la teoría económica, en relación a las funciones dadas:

Hipótesis 1: u(.) y f(.;w) son crecientes y cóncavas "$w \in \Omega$ y f(x;.) medible.

Si el individuo va a consumir "c" unidades del bien en el próximo período, el valor presente de la utilidad que este consumo le dará es $\delta u(c)$, en donde $\delta > 0$ será llamada factor de descuento.

Estudios econométricos muestran que, en muchos casos, este factor de descuento es menor que y próximo a 1 y la mayoría de resultados que se trabajan son para este caso; sin embargo, en este trabajo no haremos esa restricción, esto significa que el consumidor podría valorar el futuro tanto o más que el presente.

Definición 1.1.- El problema de horizonte t del consumidor es:

$$v_1(x) = \max_{c+y=x} u(c)$$

En este caso, el consumidor va a "vivir" sólo un período, y debe distribuir "x" unidades del bien en consumo "c" y en inversión "y" (ver la siguiente nota 2).

El *problema de horizonte t* del consumidor es:

$$vt(x) = \max_{c+y=x} u(c) + \delta E v_{t-1}(f(y;w))] \quad \forall t \geq 2. \qquad (1)$$

Ahora él hace su planificación en base a "t" períodos de vida y también quiere saber las cantidades óptimas que debe consumir hoy e invertir para la producción de mañana a partir de cuando sólo vivirá "t-1", períodos más. "E" es el valor esperado en relación al shock alteatorio "w".

Notas:

1) v_t será llamada *función de valor de horizonte t.*

2) Con hipótesis 1, $v_1(x) = u(x)$

3) $v_t(x)$ resulta ser la máxima utilidad si se tiene un capital x y t períodos de planeamiento.

4) Consumos (c) e inversiones (y) serán siempre considerados no negativos.

2. POLITICAS OPTIMAS Y COMPETITIVAS

En esta primera parte demostraremos que toda política competitiva es óptima.

Definición 2.1.- Una política de horizonte T es una secuencia $\{c_t(x), y_t(x)\}_{t=1...T}$ de funciones, tal que:

$$c_t(x)+y_t(x) = x \quad \forall t = 1...T$$

Esto es, una secuencia de consumos e inversiones factibles

Definición 2.2.- La política de horizonte T, $\{c_t(x),y_t(x)\}_{t=1...T}$ es óptima si cada uno de sus elementos $(c_t(x),y_t(x))$ es solución de (1) $\forall t=1...T$ y $\forall x$.

Definición 2.3.- La política de horizonte T $\{c_t(x),y_t(x)\}_{t=1...T}$ es competitiva si existe una secuencia de funciones medibles, no negativas $p_t(x)_{t=1=...=T}$ (a las cuales llamaremos precios), tal que:

i) $c_t(x)$ resuelve el problema $\max._{\{c \geq 0\}} u(c) - p_t(x)c$,

ii) $y_t(x)$ resuelve el problema

$\max._{\{y\geq 0\}} \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y;w)]-p_t(x)y$,

iii) $p_0(x) \equiv 0$

Nota: La condición i) cuando $c_t(x)>0$, dice que $p_t(x)$ es la utilidad marginal en $c_t(x)$; la condición ii) que en $y_t(x)$ se maximiza el beneficio esperado de la firma, y la iii) es apenas una condición de frontera.

El próximo teorema relaciona parcialmente los conceptos de política competitiva y política óptima.

Teorema 2.4.- Si una política $\{c_t(x),y_t(x)\}_{t=1...T}$ es competitiva, entonces es óptima y además:

$$x \text{ resuelve } \max_{z\geq 0} v_t(z) - p_t(x)z$$

Dem. Será hecha por inducción sobre T.

1) Para T=1 : $v_1(x) = \max_{c+y=x} u(c)$. Sea (c,y) tal que c+y=x, entonces, de i):

$$u(c)-p_1(x)c \leq u(c_1(x)) - p_1(x)c_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(c_1(x))-u(c) \geq p_1(x)(c_1(x)-c) = p_1(x)(y-y_1(x)) \qquad (2)$$

De ii) tenemos:

$$\delta E[(p_0(f(y_1(x);w))f(y;w)]-p_1(x)y \leq \delta E[p_0(f(y_1(x);w))f(y_1(x);w)]-p_1(x)y_1(x)$$

como $p_0 = 0$

$$\Rightarrow p_1(x)(y-y_1(x)) \geq 0 \qquad (3)$$

Reemplazando en (2): $u(c_1(x)) \geq u(c)$, por lo tanto $(c_1,(x),y_1(x))$ es óptima.

Para probar que x maximiza $v_1(z) - p_1(x)\ z$ para $z \geq 0$, sea $(c_1(z),y_1(z))$ solución de $\max_{c+y=z} u(c)$.

Substituyendo en (2) y (3) (c,y) por $(c_1(z),y_1(z))$:

$$u(c_1(x))-u(c_1(z) \geq p_1(x)(c_1(x) -c_1(z))$$
$$p_1(x)(y_1(z)-y_1(x)) \geq 0$$

sumando: $u(c_1(x))-p_1(x)x \geq u(c_1(z))-p_1(x)z$, y esto para cualquier $z \geq 0$, por lo tanto:

$$v_1(x)-p_1(x)x \geq v_1(z)-p_1(x)<z \quad \forall z \geq 0.$$

2) Supongamos que es verdad para t-1, es decir, toda política competitiva de horizonte t-1 es óptima y x resuelve

$$\max_{z\geq 0} \ v_{t-1}(z)-p_{t-1}(x)z.$$

Se sabe que:

$$vt(x) = \max u(c) + \delta E[v_{t-1}(f(y;w))]$$

Sea (c,y) tal que $c+y = x$, $c \geq 0$, $y \geq 0$ de i):

$$u(c)-p_t(x)c \leq u(c_t(x))-p_t(x)c_t(x)$$

$$=> \quad u(c_t(x))-u(c) \geq p_t(x)(c_t(x)-c) = p_t(x)(y-y_t(x)) \qquad (2')$$

de ii):

$$\delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y;w)]-p_t(x)y \leq \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y_t(x);w)]-p_t(x)y_t(x)$$

$$=> \quad p_t(x)(y-y_t(x)) \geq \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y;w)]-\delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y_t(x);w)) \ (3')$$

De la hipóteis inductiva tenemos: x maximiza $v_{t-1}(z)-p_{t-1}(x)z$,

$$=> \quad v_{t-1}(f(y_t(x);w))-p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y_t(x);w)$$
$$\geq v_{t-1}(f(y;w))-p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y;w)$$

tomando valor esperado y multiplicado por δ tenemos:

$$\delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y;w))]-\delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y_t(x);w)]$$
$$\geq \delta E[v_{t-1}(f(y;w))]-\delta E(v_{t-1}(f(y_t(x);w))) \tag{4}$$

con esto, (2') y (3'):

$$u(c_t(x))-u(c) \geq \delta E[v_{t-1}(f(y;w))] - \delta E[v_{t-1}(f(y_t(x);w))]$$

por lo tanto:

$$u(c_t(x))+\delta E[v_{t-1}(f(y;w))] \geq u(c)+\delta E[v_{t-1}(f(y_t(x);w))]$$

justificándose que $(c_t(x),y_t(x))$ es óptimo.

Finalmente, para probar que x maximiza $v_t(z)-p_t(z)$, sea $z\geq 0$. $(c_t(z),y_t(z))$ solución de:

$$v_t(x) = \max_{c+y=z} u(c) + \delta E[v_{t-1}(f(y;w))]$$

reemplazando esta solución en (2') y (3'):

$$u(c_t(x))-u(c_t(z)) \geq p_t(x)(c_t(x)-c_t(z))$$

$$\delta E\ [p_{t-1}(f(y_t(x);w)\ f(y_t(x);w)] - \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w)\ f(y_t(z);w)] \geq p_t(x)(y_t(x)-y_t(z))$$

además, reemplazando y por $y_t(z)$ en (4), tenemos:

$$\delta E\ [v_{t-1}(f(y_t(x);w)] - \delta E[v_{t-1}(f(y_t(x);w))]$$
$$\geq \delta E\ [p_{t-1}(f(y_t(x);w)] - \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f(y_t(z);w)]$$

sumando estas tres últimas relaciones obtendremos:

$$u(c_t(x))+\delta E[v_{t-1}(f(y_t(x);w))] - u(c)(z))-\delta E[v_{t-1}(f(y_t(z);w))] \geq p_t(x)(x-z)$$

$$\Rightarrow v_t(x)-p_t(x)x \geq v_t(z) - p_t(x)z,\ \forall z \geq 0 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

El teorema anterior nos dice que toda política que pueda ser sustentada por un sistema de precios es intertemporalmente óptima (es decir, según el criterio de la definición 1.1).

Ahora vamos a suponer algunas propiedades adicionales para u y f, que nos permitirán concluir algunas características para v_t con la finalidad de obtener el recíproco del teorema 2.4

Hipótesis 2: u y f son estrictamente crecientes, diferenciables, u es estrictamente cóncava y f es cóncava.

Teorema 2.5- La función v_t es estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

Demostración por inducción:

1) Para t=1, como u es estrictamente creciente, $v_1(x)=u(x)$, es estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

2) Supongamos que v_{t-1} es estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Es fácil ver que v_t será creciente.

Sean $x_1, x_2 \in [0, +\infty]$ y $(c_t(x_1),y_t(x_1)),(c_t(x_2),y_t(x_2))$ soluciones a (1) para x_1 y x_2 respectivamente. Para $\lambda \in]0,1[$, sea $x^\lambda=\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$$\Rightarrow v_t(x^\lambda) = \max_{c+y=x^\lambda} u(c) + \delta\phi_{t-1}(y)$$

donde $\phi_{t-1}(y) = E(v_{t-1}(f(y;w))$ que sería estrictamente cóncava por las hipótesis inductivas. Por lo tanto, como $(\lambda c_t(x_1)+(1-\lambda)c_t(x_2),\ \lambda y_t(x_2),\ \lambda y_t(x_1)+(1-\lambda) y_t(x_2))$ es factible para $v_t(x^\lambda)$, tenemos:

$$v_t(x^\lambda) \geq u(\lambda c_t(x_1)+(1-\lambda)c_t(x_2) + \delta\ \phi_{t-1}(\lambda y_t(x_1)+(1-\lambda)y_t(x_2))$$

$$> \lambda c(c_t(x_1))+(1-\lambda)u(c_t(x_2)+\delta\ (x\lambda\phi_{t-1}(y_t(x_1))+(1-\lambda)\ \phi_{t-1}(y_t(x_2)))$$

$$= \lambda v_t(x_1)+(1-\lambda)v_t(x_2)$$

Como v_t es estrictamente cóncava y creciente, entonces resultará ser estrictamente creciente, l.q.q.d.

El Teorema 2.5 nos dice que la función de valor (que viene a ser una especie de utilidad intertemporal) hereda las mismas características de la función de utilidad instantánea "u".

Como consecuencia del teorema anterior, tendríamos que las funciones $c_t(x)$ y $y_t(x)$ están bien definidas.

Teorema 2.6.- v_t es diferenciable $\forall x > 0$

Demostración: Nuevamente por inducción, el caso t=1 es obvio. Supongamos v_{t-1} diferenciable, como ya probamos que v_t es estrictamente cóncava, basta probar que $\forall x>0$ v_t tiene un único subgradiente en x.

Sea p un subgradiente de v_t en $x > 0$, entonces:

$$v_t(x')-v_t(x) \leq p(x'-x) \quad \forall x'\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad v_t(x')-px' \leq v_t \leq v_t(x) - px.$$

Sean $c',y'\geq 0$ tales que $c'+y'=x'$, entonces, de la relación anterior obtenemos:

$$u(c') + \delta\phi_{t-1}(y')-p(c'+y') \leq u(c_t(x)) + \delta\phi_{t-1}(y_t(x)) - p(c_t(x)+y_t(x))$$

reordenando:

$$u(c')-pc' + \delta\phi_{t-1}(y')-py' \leq u(c_t(x)) - p\, c_t(x) + \delta\phi_{t-1}(y_t(x))-p(y_t(x))$$

como $c_t(x)+y_t(x) = x > 0 \Rightarrow c_t(x) > 0$ o $y_t(x) > 0$

Si $c_t(x)>0$, tomando $y' = y_t(x)$ en la ecuación anterior.

$$u(c') - pc' \leq u(c_t(x)) - pc_t(x) \quad \forall c'> 0,$$

lo cual significa que $u(c) - pc$ tiene un máximo en $c_t(x) >0$, entonces:

$$p = u'(c_t(x)).$$

Análogamente, si $y_t(x) >0$ obtendríamos:

$$\delta\phi_{t-1}(y') - py'\leq \delta\phi_{t-1}(y_t(x)) - py_t(x)$$

lo que significaría que $\delta\phi_{t-1}(y) - py$ tiene un máximo en $y_t(x)$, entonces:

$$p = \delta\phi_{t-1}(y_t(x)), \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Para enunciar el recíproco del teorema 2.4 nos faltaría definir precios competitivos y los candidatos naturales serían v'_t. Sin embargo tendríamos el problema de existencia de $v'_t(0)$. Si los stocks de capital fueran siempre positivos no necesitaríamos definirla, de lo contrario definiriamos $p_t(0)$ como la derivada a derecha de v'_t en cero (cuando esta exista).

Definición 2.7.- Un problema será llamado ***admisible*** si:

1) El nivel de stock de capital es siempre positivo para la política óptima, o,

2) v_t es diferenciable en $x = 0$, $\forall t$.

Teorema 2.8.- Si el problema es admisible, toda política optima es competitiva y, además, $(c_t(x),y_t(x))$ satisface las siguientes relaciones:

i) $p_t(x) \geq u'(c_t(x))$ con igualdad si $c_t(x) > 0$.

ii) $p_t(x) \geq \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f'(y_t(x);w)]$ *con igualdad si* $y_t(x) > 0$; *en donde* $p_t(x) = v'_t(x)$.

Demostración: En el teorema 2.6 obtuvimos que $\forall c' \geq 0$, $y' \geq 0$:

$$u(c')\text{-}pc'\delta\ \phi(y') - py' \leq u(c_t(x)) - p\ c_t(x) + \delta\ \phi(y_t(x)) - py_t(x)$$

sustituyendo p por $p_t(x)$ e y por $y_t(x)$.

$$u(c')-p_t(x)c' \leq u(c_t(x))-p_t(x)c_t(x)$$

cumpliéndose así (i) de la definición 2.3; además, la condición de primer orden implica:

$$p_t(x) \geq u'(c_t(x))$$

con igualdad si $c_t(x) > 0$, por lo tanto se cumple (i) del teorema.

Análogamente si remplazamos $p = p_t(x)$ y $c' = c_t(x)$ obtenemos:

$\delta E[v_{t-1}(f(y';w))]-p_t(x)y' \leq \delta E[v_{t-1}(f(y_t(x);w))]-p_t(x)y_t(x)$ lo cual significa que $y_t(x)$ maximiza $\delta E[v_{t-1}(f(y;w))] - p_t(x)y$, por lo tanto, de las condiciones de primer orden:

$$p_t(x) \geq \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f'(y_t(x)w))]$$

cumpliéndose así (ii) del teorema.

Finalmente, multiplicando la última desigualdad por $(y-y_t(x))$ y usando la concavidad de f, se obtiene la condición (ii) de la definición 2.3, l.q.q.d.

Notas:

1) Como consecuencia de los teoremas 2.4 y 2.8, denotaremos $p_t(x) = v'_t(x)$.

2) Como v_t es cóncava, p_t es contínua y creciente $\forall t$

3. PROPIEDADES DE LAS POLITICAS Y PRECIOS COMPETITIVOS

Daremos a continuación algunas propiedades de precios y políticas competitivas.

Teorema 3.1.- c_t e $y_t(x)$ son funciones crecientes, y estrictamente crecientes si son mayores que cero.

Dem.: Sean $x > x' \geq 0$, demostraremos que $y_t(x) \geq y_t(x')$. Denotemos, como antes $f_{t-1}(y) = \delta E[v_{t-1}(f(y;w))]$. Sabemos que f_{t-1} es estrictamente cóncava (pues v_{t-1} lo es, y f es cóncava y estrictamente creciente).

Caso I: $y_t(x)>0$ $y_t(x')>0$ De la condición (ii) del teorema 2.8:

$$p_t(x) = \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f'(y_t(x);w)]$$

$$p_t(x') = \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x');w))f'(y_t(x');w)]$$

como p_t es estrictamente creciente:

$$E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f'(y_t(x);w)] < E[p_{t-1}(f(y_t(x');w))f'(y_t(x');w)]$$

Como $p_{t-1} = v'_{t-1}$ lo último equivale a:

$$\phi'(y_t(x)) < \phi'(y_t(x') \Rightarrow y_t(x) > y_t(x')$$

Caso II: $y_t(x)>0$ $y_t(x')= 0$, nada a demostrar

Caso III: $y(x)=0$, $y_t(x')> 0$, veamos que esto no es posible. Nuevamente de la condición (ii) del teorema 2.8:

$$p_t(x) \geq \delta E[p_{t-1}(f(0;w))f'(0;w)]$$

$$p_t(x) = \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x');w))f'(y_t(x');w)]$$

como $p_t(x)<p_t(x') \Rightarrow \phi'(0) < \phi'(y_t(x')) \Rightarrow 0 > y_t(x')$ (=><=)

La prueba para c_t es análoga, usando i) del teorema 2.8. l.q.q.d.

El teorema anterior dice que si aumentara el capital inicial disponible, el consumo (y la inversión) en este período, cuando tenemos un horizonte de planificación "t", aumentará.

Teorema 3.2.- c_t, $y_t(x)$ son funciones contínuas.

Demostración: Sabemos que c_t, y_t son crecientes, sea $x_0 \geq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0^-} c_t(x) = c_t(x_0^-) \leq c_t(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} c_t(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} y_t(x) = y_t(x_0^-) \leq y_t(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} y_t(x)$$

como $c_t(x) + y_t(x) = x, \ \forall x.$

$$c_t(x_0^-) + y_t(x_0^-) = x_0$$

$$c_t(x_0^+) + y_t(x_0^+) = x_0$$

$\Rightarrow [c_t(x_0^+) - c_t(x_0^-)] + [y_t(x_0^-) + y_t(x_0^-)$. l.q.q.d.

de las desigualdades dadas anteriormente concluimos que:

$c_t(x_0^+) = c_t(x_0^-) . y_t(x_0^-) = y_t(x_0^-)$, l.q.q.d.

Finalmente un teorema en relación a los precios competitivos que será usado en el estudio del problema no descontado.

Teorema 3.3.- $\forall t \geq 2$ $p_t(x) \geq p_{t-1}(x)$.

Demostración por inducción:

I) Para t = 2, de las condiciones de primer orden para políticas competitivas:

$p_2(x) \geq u'c_2(x))$. $p_1(x) = u'(x)$
como $c_2(x) \leq x \Rightarrow p2(x) \geq . p_{t-1}(x)$.

Demostración por inducción:

II) Supongamos que $p_{t-1}(x) \geq p_{t-2}(x)$, consideremos los siguientes subcasos:

(i) $0 \leq y_t(x) \leq x$, $0 < y_{t-1}(x) \leq x$, entonces, nuevamente, de las condiciones de primer orden para políticas competitivas:

$$p_t(x) \geq \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f'(y_t(x);w)]$$
$$p_{t-1}(x) = \delta E[p_{t-2}(f(y_{t-1}(x');w))f'(y_{t-1}(x');w)]$$

Supongamos que $p_t(x) < p_{t-1}(x)$,

$$\Rightarrow u'(c_t(x)) \leq p_t(x) < p_{t-1}(x),$$

si $c_{t-1}(x)>0 \Rightarrow u'(c_t(x))<p_{t-1}(x)=u'(c_{t-1}(x)) \Rightarrow c_t(x)>c_{t-1}(x)$ si $c_{t-1}(x) = 0 \Rightarrow c_t(x) > c_{t-1}(x)$.

Por lo tanto $y_t(x) < y_{t-1}(x)$ (*)

De la hipótesis inductiva:

$$p_t(x) \geq \delta E[p_{t-1}(f(y_t(x);w))f'(y_t(x);w)]$$
$$\geq \delta\ E[p_{t-2}(f(y_t(x);w))f'(y_{t-1}(x);w)]$$

combinando está última desigualdad con (*) y usando la concavidad de f y monotonicidad de p_{t-2} y f.

$$p_t(x) \geq \delta E[p_{t-2}(f(y_{t-1}(x);w))f'(y_{t-1}(x);w)] = p_{t-1}(x)$$

lo cual es una contradicción.

(ii) $0 \leq y_t(x) \leq x$, $y_{t-1}(x)=0$. De las condiciones de primer orden para políticas competitivas:

$p_t(x) \geq u'(c_t(x))$; $p_{t-1}(x) = u'(x)$
como $c_t(x) \leq x \Rightarrow p_t(x) \geq p_{t-1}(x)$, l.q.q.d.

Colorario 3.4.- $c_t(x)) \leq c_{t-1}(x)$ y $y_t(x) \geq y_{t-1}(x)$, $\forall t \geq 1$

Demostración: Consecuencia inmediata del teorema anterior.

CONCLUSIONES

El resultado principal que mostramos en este trabajo es que en una economía descentralizada, en donde los individuos maximizan sus utilidades de manera independiente, existe un sistema de precios que puede sustentarla de manera óptima, siendo iguales a las utilidades marginales, maximimando los beneficios y limpiando el mercado.

Otro resultado importante es que la "utilidad intertemporal" (función de valor de horizonte "t"), sirve para definir este sistema de precios competitivos y ésta hereda las mismas características de la utilidad instantánea.

En la última sección del trabajo también mostramos que el consumo y las inversiones se comportan de manera intuitiva en relación al tiempo de vida del individuo; esto es, si él tiene un stock inicial y supiera que va a vivir un periodo más, deberá consumir un poco menos ($c_t(x) \leq c_{t-1}(x)$) y consecuentemente invertir mas ($y_t(x) \geq y_{t-1}(x)$). Estas relaciones permiten generalizar la existencia de políticas óptimas aun en el horizonte infinito ($t \rightarrow \infty$), sin importar el factor de descuento, cosa que no sería posible con el tratamiento clásico del problema de horizonte infinito.

REFERENCIAS

BROCK W. and MIRMAN L.

1973 *Optimal Economic Growth and Uncertainty: The No Discounting Case,* Int. Econ. Rev. 14, 576-573.

GALE D.

1967 *On Optimal Development in a Multi-sector Economic,* Rev. Econ. Studies 34, 1-18.

SCHECHTMAN, J.
1973 *Some Applications of Competitive Prices to Dynamic Programming Problems Under Uncertainty*, Operations Research Center, University of California, Berkeley.

STOKEY N. and LUCAS R.
1989 *Recursive Methods in Economic Dinamics*, Harvard University.