*VOLUMEN VI/Nos. 11-12 JUNIO-DICIEMBRE 1983*



# ECONOMIA

*DEPARTAMENTO DE ECONOMIA*
*PONTIFICIA UNIVERSIDAD*
*CATOLICA DEL PERU*

# UNA REVISION CRITICA DE LA TEORIA DE PRODUCCION DISJUNTA DE SRAFFA

RAMON GARCIA-COBIAN J.*

## INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es el de proceder a una exhaustiva revisión de la teoría de producción disjunta de Sraffa. La justificación para una tal empresa la proporciona el comprobar que en [1], hay poca claridad en el lenguaje elegido, y poco rigor para demostrar las afirmaciones hechas.

El Método elegido para este trabajo consiste en reformular, en un lenguaje matemático convencional, la teoría de Sraffa, para, a continuación, revisar la verdad o falsedad de las afirmaciones de dicha teoría.

## 1. *Producción de Subsistencia*

Hay n industrias, cada una de las cuales produce, exclusivamente, una de n mercancías.

No se asume nada sobre la tecnología de las industrias. Se sabe, sin embargo, que cada industria se sitúa en un punto de su conjunto de producción. Así, la i-ésima industria ocupa el punto

$$(a_{1i}, \ldots, a_{ni} \mid 0, \ldots, 0, b_i, \ldots, 0),$$

---

(*) El autor es profesor principal en el Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Obtuvo su doctorado en Matemáticas en la Universidad Southampton, Inglaterra (1978). El texto actual resume las conclusiones de su tesis de Magister en Economía presentada en la Universidad Católica.
Parte de este trabajo fue realizado gracias al apoyo del Deutscher Akademischer Austaunschdienst (DAAD), que financió la estadía por dos meses en el Departamento de Economía de la Universidad de Bonn.

es decir que produce $b_i$ unidades de la i-ésima mercancía con insumos $a_{1i}, \ldots,$ $a_{ni}$.

El problema consiste en hallar valores unitarios $p_1, \ldots, p_n$ de las mercancías, que permitan restablecer, luego de un período productivo, la situación inicial, mediante el intercambio mercantil. Esto es

$$\sum_{j=1}^{n} p_j a_{ji} = p_i b_i \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Esta expresión, en forma matricial, es

$$pA = pB \tag{1}$$

donde $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $A =$ matriz $(a_{ji})$ y $B =$ matriz diagonal $(b_1, \ldots,$ $b_n)$.

Se asume que el sistema se halla en un estado de autoreemplazamiento, i. e.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

que, matricialmente es $A\sigma = B\sigma$ (2)

donde $\sigma$ es un vector n-dimensional todas cuyas componentes son iguales a uno.

Dice Sraffa que, en estas condiciones, si se toma una mercancía cualquiera como numerario, entonces están determinados los n-1 precios restantes por el sistema (1) - (2) ([1], p. 5). Que esto, en general, es falso, lo muestra el siguiente contraejemplo.

Sea $n = 3, b = (3, 5, 4), A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Entonces, $B - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, y si se elige al tercer bien como numerario,

se comprueba, fácilmente, que se llega a una contradicción: $2p_1 - 3p_2 = 1$ y $2p_1 - 3p_2 = -1$.

Por lo visto, es preciso, para garantizar la validez de la afirmación de Sraffa, agregar alguna otra condición.

*Teorema 1.1.*

Si A es indescomponible (*), entonces en el sistema (1) - (2) se puede elegir como numerario cualquier mercancía, quedando los valores de las restantes unívocamente determinados. (La demostración de este teorema puede verse en [3], p. 3, bajo el nombre de "Corrección al Aserto 3.1").

## 2. *Producción con Excedente.*

Cuando existe un excedente de producción, el sistema considerado por Sraffa es el (3) - (4) siguiente

$$pA = pB \tag{3}$$
$$b \geqslant A\sigma \text{ **} \tag{4}$$

Dice Sraffa que el sistema (3) - (4) es "auto-contradictorio". Esto, en rigor, carece de sentido, pues un sistema de ecuaciones no es ni verdadero ni falso. Posiblemente lo que Sraffa quiere decir es que el sistema carece de solución no-nula.

En verdad, si hubiera $p \geqslant 0$, solución de (3) - (4), entonces,

$$(3) \Rightarrow pA\sigma = pB\sigma \Rightarrow \sum_i p_i b_i = \sum_i \sum_j p_j a_{ji} = \sum_j p_j \sum_i a_{ji} < \sum_j p_j b_j, \text{ de}$$

donde $\sum_i p_i b_i < \sum_j p_j b_j$, que es contradictorio.

Asume Sraffa que la distribución del excedente se hace en proporción al valor de los medios de producción en cada industria, y que la tasa de ganancia es la misma para cada industria.

Entonces, surge el nuevo sistema (4) - (5), donde (5) es

$$(1 + r)\, pA = pB \tag{5}$$

En efecto, la ecuación (5), equivale a:

(*) Es decir, que no hay ningún subconjunto de industrias que pueda prescindir del resto de la economía en la adquisición de sus insumos, i. e. no existe I tal que $k \notin I \Rightarrow a_{ki} = 0$.

** Se considera el siguiente orden parcial para matrices: $C \geqq D$ si ninguna componente de C es menor que la respectiva componente de D; $C \geqslant D$ si $C \geqq D$ y $C \neq D$; y $C > D$ si toda componente de C es mayor que la respectiva componente de D.

$$p_i b_i - \sum_k p_k a_{ki} = r \sum_k p_k a_{ki} \qquad i = 1, \ldots, n$$

que equivale a un reparto de $\sum_i p_i(b_i - \sum_j a_{ij})$, el valor del excedente, proporcionalmente a las cantidades

$$\sum_k p_k a_{k1}, \ldots, \sum_k p_k a_{kn},$$

los valores de los medios de producción.

Dice Sraffa que el sistema (4) - (5) contiene n ecuaciones independientes que determinan los n-1 precios (relativos) y la tasa de ganancia ([1], p. 7).

Que esto, en general, es falso, se desprende del siguiente contraejemplo.

$$b = (1, 1) \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Entonces (5) adopta la forma $p = (1 + r) pA$, que indica que $(1 + r)^{-1}$ es un valor propio de A, y que p es su correspondiente vector propio. Así, se obtienen, para r, los valores $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$.

Sus correspondientes vectores propios son de la forma

(a, 0) para $r_1$ , y (0, d) para $r_2$.

En ningún caso es posible elegir arbitrariamente un numerario, pues, por ejemplo, en el segundo caso la primera mercancía no podrá ser numerario, ya que su valor es nulo. Para que la afirmación de Sraffa sea correcta hay que corregirla, de la siguiente forma.

*Teorema 2.1.*

Si A es indescomponible, entonces en el sistema (4) - (5) se puede elegir como numerario cualquier mercancía, quedando los valores de las restantes y la tasa de ganancia unívocamente determinados.

La demostración de este teorema puede verse en el apéndice.

A continuación dice Sraffa que "previamente, todas las mercancías tenían la misma jerarquía, encontrándose cada una de ellas tanto entre los productos como entre los medios de producción".

Esto hace ver que, hasta este punto, Sraffa siempre tuvo en mente sólo un sistema indescomponible, aunque le faltó precisar esta noción y hacerla explícitamente una de sus asunciones. En todo caso, hacía falta mostrar la corrección de sus asertos sobre la base de la indescomponibilidad del sistema.

Luego introduce Sraffa las nociones de mercancías "suntuarias" y "superfluas". Las definiciones dadas son poco precisas, y es por ello que conviene mejorarlas en este sentido.

Una mercancía es "suntuaria" si no es usada como insumo en la producción de ninguna otra, i, e. la k-ésima lo es si $\forall j \quad a_{kj} = 0$

Un subconjunto de mercancías es "superfluo" si el sistema entero es descomponible, siendo autónomo el subsistema formado por las mercancías del complemento del subconjunto; es decir que este subsistema determina sus precios relativos y la tasa de ganancia, no siendo autónomo el sistema original, en el sentido de que sus precios relativos sólo pueden determinarse una vez que se conocen los del complemento así como la tasa de ganancia.

Vale la pena notar que un sistema descomponible puede carecer de mercancías superfluas, como lo ilustra el contraejemplo último.

Similarmente la definición de mercancía "básica" es algo oscura. Un intento de precisarla conduce a lo siguiente. La mercancía k-ésima es "básica" si

$$\forall i \; (a_{ki} \neq 0 \;\vee\; (\exists \{j_1, \ldots, j_h\} \; a_{j_1 i} \neq 0 \;\hat{}\; a_{j_2 j_1} \neq 0 \;\hat{}\; \ldots \;\hat{}\; a_{kj_h} \neq 0))$$

Esto dice que la k-ésima es básica si, en caso de no ser insumo en una cierta industria, lo es en otras que se concatenen mediante insumos con aquélla.

Asume Sraffa que el sistema (4) - (5) contiene, al menos una mercancía básica:

Dice que "de aquí en adelante asumirá que el salario es pagado postfactum" como participación en el producto anual ([1], p. 10).

Cabe hacer notar que, contra las apariencias, no hay en esto una diferencia esencial entre Marx y Sraffa, ya que el salario es, para aquél, el de subsistencia sólo, mientras que para Sraffa, la componente de subsistencia del salario ya esta incluida en los insumos, considerando explícitamente sólo la compoenente salarial situada por encima del nivel de subsistencia.

Luego, asume Sraffa que el trabajo es homogéneo. Esta asunción merece un estudio posterior que averigüe si la teoría desarrollada por Sraffa puede ser extendida sin grandes modificaciones al caso de tener trabajo heterogéneo. En efecto, y contra lo que la intuición sugiere, podrían surgir dificultades, como ocurre con la teoría de producción disjunta de Marx, en donde la admisión de trabajo heterogéneo entra en conflicto con la existencia de una única tasa de explotación (ver [2], p. 192).

En todo caso, con las asunciones anteriores, el sistema adquiere la forma siguiente

$$b \geqslant A\sigma \tag{4}$$
$$(1 + r)\, pA + wL = pB \tag{6}$$
$$L\sigma = 1 \tag{7}$$
$$p(B - A)\sigma = 1 \tag{8}$$

donde w es el salario medido en términos del valor del ingreso nacional (condición normalizadora (8)), L es el vector de distribución laboral por industrias (ver condición normalizadora (7) ).

## 3. *Proporciones de Trabajo a Medios de Producción.*

Dice Sraffa que si en el sistema (4) - (6) - (7) - (8) se hace $w = 1$ entonces todo el ingreso nacional va a los salarios y r se elimina ([1], p. 12).

Efectivamente, de (6) se obtiene $rpA + wL = p(B - A)$, que postmultiplicada por $\sigma$ da $rpA\sigma + wL\sigma = p(B - A)\sigma$. Teniendo en cuenta (7) y (8), esto se convierte en $rpA\sigma + w = 1$. Ahora bien, si $w = 1$, como $pA\sigma \neq 0$, entonces $r = 0$, y todo el ingreso nacional va a los salarios: $w = p(B - A)\sigma = 1$.

Dice, luego, Sraffa que "en este nivel de salarios los valores relativos de las mercancías están en proporción a sus costos laborales".

Que esto sea falso, en general, lo muestra el siguiente contraejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Notar que hay un bien básico: el 1º.

Sea $L = (0.58, 0.21, 0.21)$, y sea $B = (11, 3, 4)$. Entonces

$$B - A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \text{con } \det(B - A) = 0$$

Por lo tanto, haciendo $w = 1$, se obtiene $p(B - A) = L$, que carece de soluciones, pues daría $p_2 - p_3 = 0.105$ y $p_2 - p_3 = -0.07$, lo cual es contradictorio. Así, pues no es cierto que p, que es inexistente, sea proporcional a ningún vector de costos laborales.

De lo anterior se desprende que hay que empezar exigiendo que B - A sea regular, es decir que su determinante no sea nulo.

Además, en la afirmación de Sraffa hay una contradicción implícita con su declaración hecha en el inicio del Prefacio ([1], p.v), en donde afirma que no asume retornos constantes a escala. En efecto, sin conocer nada acerca de la tecnología prevaleciente, es imposible establecer la cantidad total de trabajo requerida para lograr, como producto neto, una unidad de una cierta mercancía.

Es posible que Sraffa haya utilizado, quizás inconscientemente, tal hipótesis, cuando sugiere calcular el costo laboral por medio de la noción de "subsistema". Sin embargo, también en este caso su formulación carece de precisión, puesto que sólo considera subdivisiones del sistema original en tantos subsistemas como mercancías haya en el producto neto. Efectivamente si se quiere calcular el costo laboral de una mercancía que no apareciera en el producto neto, la descomposición sugerida no sería de ninguna utilidad. Es por este motivo que propongo la siguiente definición:

Una *"descomposición Sraffiana"* del sistema (A, L, B) correspondiente a (4) - (6) - (7) - (8) es una colección de subsistemas $\{(A^i, L^i, B^i) \ / \ i = 1, \ldots, n\}$ tales que para todo i se tenga $(1 + r)pA^i + wL^i = pB^i$ y $\sum_i (A^i, L^i, B^i) = (A, L, B)$ y $(B^i - A^i)\sigma = ((B - A)\sigma)_i e^i$, además, para cada subsistema hay un vector $c^i \geqslant 0$ tal que $A^i = AC^i$ y $L^i = LC^i$ y $B^i = BC^i$, donde $C^i$ = matriz $(c^i)$, siendo necesario que $\sum c^i = \sigma$. Así, la k-ésima ecuación del i-ésimo subsistema es

$$(1 + r) \sum_j p_j a_{jk} c^i_k + w\ell_k c^i_k = p_k b_k c^i_k$$

que es sólo la k-ésima ecuación del sistema original multiplicada por $c^i_k$. Puede verse un ejemplo en[3], p. 23.

Surge así, una pregunta natural. ¿qué garantiza la posibilidad de la descomposición descrita?. La respuesta es el siguiente teorema, cuya demostración aparece en el apéndice.

*Teorema 3.1.*

Dado el sistema (A, L, B) de (4) - (6) - (7) - (8), si B - A, es regular y tiene inversa no-negativa, entonces existe, y es única, la descomposición Sraffiana.

Es interesante observar que con sólo las hipótesis del sistema de Sraffa no se garantiza la descomposición en cuestión, como lo ilustra el siguiente contraejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $b = (2, 3, 2)$. Ahora $(B - A)^{-1}$ no existe, y no hay descomposición.

Luego, para restablecer la afirmación de Sraffa respecto a la proporcionalidad entre valores y costos laborales, cuando $w = 1$, hay que añadir alguna condición. Esto es lo que logro con la noción de "sistema productivo": Si existe $x > 0$ $(B - A)x > 0$.

*Teorema 3.2*

Asumiendo retornos a escala constantes y siendo productivo el sistema (A, L, b) de (4) - (6) - (7) - (8), entonces, si $w = 1$ los valores coinciden con los costos laborales.

(Ver la demostración en el apéndice).

Dice, luego Sraffa que "en ningún otro nivel salarial siguen los valores una regla simple" ([1], p. 12)

Posiblemente, quiere decir Sraffa que si $w \neq 1$ entonces, por lo menos, ya no se da la proporcionalidad entre los valores y costos laborales. Pero esto es también falso, como se desprende del siguiente contraejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = (4, 5)$, $L = (0.406, 0.594)$. Sea $w = 0.408$ y $r = 0.5$.

Entonces, se obtiene $p = (0.2218, 0.2594) = L(B\text{-}A)^{-1}$, el vector de costos laborales. La corección a la última afirmación de Sraffa es el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [3], p. 27.

*Teorema 3.3*

Si L no es un vector propio de $(B - A)^{-1}A$, asociado a la raíz de Perrón-Frobenius de esta matriz, entonces los valores de las mercancías son proporcionales a los costos laborales de estas sólo si $w = 1$.

A continuación, hace Sraffa una serie de afirmaciones, acerca de la forma en que varían los valores, que aparecen explicadas y demostradas en [3], pp. 28-33.

Define Sraffa la tasa máxima de ganancias", como "aquel valor r que se obtiene cuando el total del ingreso nacional va a las ganancias.

Hay dificultades con esta definición, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 24 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = (32, 8, 8)$. Hay una mercancía básica, la 1ra.; hay excedente en cada industria; y sin embargo para $w = 0$ se obtienen dos "tasas máximas de ganancia".
La primera: $R_1 = 1/3$ con $p^1 = (1/12)\sigma$, y la segunda: $R_2 = 1$ con $p^2 = 1/8$ $(0, 1, 1)$. Por este motivo sugiero la siguiente definición: la *"tasa máxima de ganancias"* es el mínimo de los valores de r que satisfagan al sistema $(1 + r)$ $pA = pB$.

*Teorema 3.4*

En el sistema (4) - (6) - (7) - (8), si $w = 0$ entonces hay, al menos, un valor de R tal que $(1 + R)pA = pB$.
Ver la demostración en [3] p. 35.

## 4. *La mercancía Patrón*

Lo dicho por Sraffa en los puntos 23, 24, 25 y 26 de [1], pp. 18-20, conduce a las siguientes definiciones, que tratan de precisar un poco más los conceptos.

Una *"mercancía patrón"* del sistema (4) - (6) - (7) - (8) es cualquier complejo mercantil tal que cierto subsistema del sistema original lo tenga como producto bruto, y que el complejo de insumos agregados le sea proporcional i. e. cualquier $b^*$ de $R^n$ tal que $b^* \geqslant 0$ y existe $c > 0$ tal que, definiendo $C: = \text{mat diag } c$, $(A^*, L^*, B^*): = (A, L, B)\ C$, se tenga que $B^*\sigma = b^*$ y existe $\rho > 0$ $A^*\sigma = \rho b^*$.

El subsistema $(A^*, L^*, B^*)$ es llamado un "subsistema patrón".

Se llama *"producto neto patrón"* a una mercancía patrón correspondiente a un subsistema patrón cuyo trabajo sea igual al trabajo total del sistema original; es decir que $L^*\sigma = 1$.

Si $(A^*, L^*, B^*)$ es un subsistema patrón y si $\rho$ es tal que $A^*\sigma = \rho b^*$, entonces al cociente, $(1 - \rho) / \rho$ se le llama la *"razón patrón"*.

Con estas precisiones, en [3], (pp. 37-41), se demuestran varias propiedades de la mercancía patrón, como las siguientes.

i) En el sistema patrón, la tasa de exceso de la cantidad producida a la cantidad insumida en la producción, es la misma para todas las mercancías.

⌈Para la k-ésima mercancía, la producción es $b_k c_k$ y la cantidad de insumos de ella es $A_k c$, donde $A_k$ denota a la k-ésima fila de A. La tasa en cuestión es

$$(b_k c_k - A_k c) / (A_k c) = (b_k c_k - \rho b_k c_k) / (\rho b_k c_k) = (1 - \rho) / \rho \lrcorner$$

ii) En el sistema patrón la razón del producto neto a los medios de producción permanecería la misma cualesquiera que fuesen las variaciones que ocurrieran en la división del producto neto entre salarios y ganancias y cualesquiera que fuesen los cambios consecuentes en los precios.
⌈Sea $p \geqslant 0$, arbitrario; el valor del producto neto es $p(B^* - A^*)\sigma$; el de los medios de producción es $pA^*\sigma$ y la relación en cuestión es

$$\frac{p(B^* - A^*)\sigma}{pA^*\sigma} = \frac{\sum_k p_k(b_k c_k - \sum_i a_{k_i} c_i)}{\sum_k p_k \sum_i a_{k_i} c_i}$$

$$= \frac{\sum_k p_k(b_k c_k - \rho b_k c_k)}{\sum_k p_k \rho b_k c_k} = \frac{1 - \rho}{\rho}$$

que no depende ni de w, ni de p, ni de r.⌟

iii) En el sistema patrón, si R es la tasa máxima de ganancia y w el salario, entonces $r = R(1 - w)$
⌈Es fácil ver que $R = \frac{1 - \rho}{\rho}$. El producto neto es $RA^*\sigma$. Si w es el salario, entonces a éstos les corresponde del producto neto $wRA^*\sigma$. Luego, a las ganancias va $(1 - w) RA^*\sigma$.
Como r debe referirse al complejo de medios de producción, se tiene que $R(1-w)A^*\sigma = rA^*\sigma$, de donde se obtiene la relación $r = R(1 - w)$. ⌟

iv) Esta relación lineal rige también en el sistema original, siempre que el numerario sea el producto neto patrón.
⌈Ahora que se ha cambiado el numerario, el sistema es

$$\begin{aligned} b &\geqslant A\sigma && (4) \\ (1 + r) pA + wL &= pB && (6) \\ p(B - A)c &= 1 && (9) \\ Lc &= 1 && (10) \\ Ac &= \rho Bc && (11) \end{aligned}$$

Sea (w, r, p) cualquier solución; de (6):

$$r(pAc) + w(Lc) = p(B - A)c;$$

de (9) y (10): $r(pAc) + w = 1$; de (11):

$$pAc = \rho pBc = \rho\,(pBc - pAc) > \rho\,(1 + pAc),$$

de donde $pAc = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{R}$. Entonces, $\frac{r}{R} + w = 1$, con lo que se obtiene

la relación lineal.⌋

En lo que se refiere al sistema patrón, hay que notar que puede ocurrir que, bajo las hipótesis adoptadas por Sraffa, haya más de uno, o que, peor aún, no exista ninguno. Esto se debe a que en la ecuación (11), que equivale a $\rho c = (B^{-1}A)c$, se tiene que c ha de ser un vector propio; y se sabe bien que una matriz puede poseer más de un valor propio positivo, que un valor propio positivo puede tener dos o más vectores propios linealmente independientes a él asociado, o, peor aún, puede carecer de valores propios reales.

Felizmente, esta última posibilidad queda descartada gracias al teorema de Perron-Frobenius, que garantiza, para toda matriz cuadrada no-negativa, la existencia de un valor propio real no-negativo. Así, si $A \geqslant 0$, entonces siempre hay al menos un sistema patrón. En [3], p. 43 se da un ejemplo de un sistema que satisfaciendo las hipótesis de Sraffa, admite dos sistemas patrón.

Para terminar con su capítulo IV, asume Sraffa que sólo hay industrias básicas; lo que implica que A es indescomponible. Con esta asunción, desaparecen las dificultades antes mencionadas, pero hay que observar que es ésta una hipótesis excesivamente fuerte, puesto que en situaciones reales, no hay por que ignorar a las industrias suntuarias.

## 5. *Unicidad del Sistema Patrón.*

El propósito exclusivo del capítulo V de [1] es el demostrar la existencia y unicidad del sistema patrón cuando se añade la asunción de indescomponibilidad. Para tal fin sugiere Sraffa un algoritmo cuya definición es poco clara, y cuya convergencia al sistema patrón es algo que debe demostrarse rigurosamente, cosa no hecha por él. Sin embargo, y afortunadamente, es posible hallar un atajo para llegar a establecer la existencia y unicidad del sistema patrón, mediante el teorema de Perron-Frobenius.

*Teorema 5.1.*

Para el sistema (A, L, B) de Sraffa, si A es indescomponible entonces le corresponde un, y sólo un, sistema patrón, con un vector de multiplicadores estrictamente positivo.

⌜Como $b > 0$, y A es indescomponible si, y sólo si, $B^{-1}A$ lo es, entonces, aplicando el teorema de Perron-Frobenius a $B^{-1}A$, se sigue que la raíz de Perron-Frobenius de esta matriz es positiva, y su espacio propio es monodimensional; siendo, además cualquier vector propio a ella asociado estrictamente positivo. Uno de éstos, c, tal que $Lc = 1$, sirve como vector de agregación para pasar del sistema actual al sistema patrón.

Que no haya sino una manera de lograr esto, se desprende nuevamente, de una aplicación inmediata del teorema Perron-Frobenius, según el cual si existe $x \geqslant 0$ tal que sea un vector propio de $B^{-1}A$ asociado a un valor propio no-negativo, entonces este valor propio no es otro que la raíz de Perron-Frobenius de $B^{-1}A$. En consecuencia, no hay más que un vector de multiplicadores normalizados por $Lc = 1$, que lleve del sistema actual al patrón.⌟

## 6. *Reducción a Cantidades Datadas de Trabajo.*

En el capítulo VI de [1] define Sraffa una operación, que denomina como el título de éste párrafo, consistente en reemplazar los diversos medios de producción utilizados por cantidades datadas de trabajo. Tal operación consiste en reemplazar los medios de producción utilizados en la industria i por sus propios medios de producción; es decir, si en la i-ésima industria la k-ésima mercancía es un insumo, se la reemplaza por los medios de producción y trabajo requeridos para que la k-ésima industria produzca $a_{ki}$ unidades de la k-ésima mercancía. Debe continuarse, de este modo, afectando a cada cantidad, así hallada, de un factor de la forma $(1 + r)^t$ donde t denota el número de períodos retrocedidos.

Evidentemente, esto entra nuevamente en contradicción con la tercera oración del Prefacio de [1], según la cual Sraffa sostiene que no asume retornos constantes a escala. En efecto, una cosa es saber que para producir $b_k$ unidades de la k-ésima mercancía la correspondiente industria usa $a_{ik}$ unidades de la i-ésima mercancía, y otra cosa muy distinta es afirmar que para producir $a_{kj}$ unidades de la k-ésima mercancía hacen falta $a_{jk}/b_k$ unidades de la j-ésima. Tal cosa sólo tendría sentido dentro de una tecnología con rendimientos constantes a escala.

Si éste fuera el caso, entonces la reducción referida por Sraffa se realiza como sigue.

Sea $w > 0$ el salario expresado en términos del producto neto patrón. Entonces $pB(I - (1 + r)B^{-1}A) = wL$. Para $r \leq R$, y no negativo, existe y es no-negativa la inversa de $I-(1 + r)B^{-1}A$ como puede verse por una aplicación del teorema de Perron-Frobenius, ya que $B^{-1}A \geqslant 0$ e indescomponible.

Así, $pB = wL\,(I-(1+r)B^{-1}A)^{-1}$. Pero esta inversa puede expresarse como la suma de una serie convergente ya que la raíz de Perron-Frobenius de $B^{-1}A$ es positiva y menor que 1, pues si ella fuera 1, entonces existe $v > 0$ $B^{-1}Av = v$, de donde $(B - A)\,v = 0$, que contradice el que $B - A$ sea regular. Luego,

$$pB = w \sum_{k=0}^{\infty} (1 + r)^k L(B^{-1}A)^k.$$

Asumiendo retornos constantes a escala, los términos $L\,(B^{-1}A)^k$ representan las cantidades de trabajo que datan de k años.

Actualizadas por la tasa compuesta $(1 + r)^k$, ellas son las cantidades datadas de trabajo de Sraffa.

Finalmente, cuando $w = 0$, entonces se tiene $r = R$ y $p\,(B - (1 + R)A) = 0$, que equivale a $p(I - (1 + R)B^{-1}A) = 0$ ya que B es inversible. Esto dice que p es el vector de valores correspondientes a $w = 0$, es decir el vector propio asociado a la raíz de Perron-Frobenius, $\frac{1}{1+R}$, de $B^{-1}A$.

## 7. *Conclusiones.*

1º Todos los resultados que Sraffa enuncia en el contexto de la producción de subsistencia requieren de la hipótesis de indescomponibilidad del sistema. Esta hipótesis, que muy tardíamente es adoptada por Sraffa, lejos de violentar el contexto Sraffiano, mas bien lo completa ya que él mismo la introduce al final. Sin embargo, creo que sería de mucho interés para la teoría de producción disjunta de Sraffa estudiar ésta sin tal hipótesis, puesto que la situación general no la satisface. Algo similar ocurre en el contexto de la producción con excedente, del 2º capítulo de [1].

2º Algunas definiciones, como la de "tasa máxima de ganancia" de una mercancía "superflua" y de "subsistemas" requieren de mayores precisiones, que es parte de lo que me propuse conseguir con este trabajo. Este es, también, el caso con el concepto de "utilización indirecta" de insumos en las industrias.

3º Otras definiciones, como la de reducción a cantidades datadas de trabajo, introducen inadvertidamente, al parecer, la hipótesis de retornos constantes a escala. Igual ocurre cuando Sraffa establece que sólo para el caso en que el salario reciba todo el valor del excedente se da la proporcionalidad entre los valores y los costos laborales. Evidentemente, para que esto tenga sentido es preciso que se dé la tecnología de retornos constantes a escala.

Considero que asumir tal cosa es muy natural en el marco de la teoría de Sraffa, ya que lo mismo hicieron los economistas clásicos, en cuya tradición se inspira.

4º Un resultado importante es el provisto por el teorema 3.3 de este trabajo, en lo que se descubre que aún para $w = 1$ es posible que no se dé la proporcionalidad entre valores y costos laborales; y que aunque $w < 1$, es posible que sí se dé tal proporcionalidad. Esto definitivamente muestra la falsedad de lo dicho por Sraffa, en [1]. p. 12.

5º En referencia a la noción de subsistemas y la descomposición en éstos, se comprueba que no basta con lo asumido por Sraffa, y que hay que corregir sus afirmaciones como lo hace el teorema 3.1.

La existencia y unicidad del sistema patrón, para probar lo cual destina sin éxito, Sraffa todo el capítulo V del [1], se logra de modo concluyente gracias a una inmediata aplicación del teorema de Perron-Frobenius, en el teorema 5.1.

## APENDICE

*Demostración del Teorema 2.1*

A indescomponible $\Rightarrow AB^{-1}$ indescomponible.

La raíz de Perron-Frobenius de $AB^{-1}$ es positiva, como se desprende de que $b > 0$ y que $AB^{-1} \geqslant 0$, y de una aplicación directa del teorema 24 de Woods, J. E. "Mathematical Economics", Longman, London, 1978, página 23. Entonces $(1 + r) > 0$, de donde $r > -1$, y el vector característico p es estrictamente positivo. Por el teorema de Perron-Frobenius, es igual a 1 la multiplicidad de la raíz de Perron-Frobenius de $AB^{-1}$; por lo cual los valores relativos están determinados de manera única, ya que el espacio propio asociado tiene dimensión 1. Finalmente, como todos los valores son positivos, cualquier mercancía puede hacer de numerario.

*Demostración del Teorema 3.1.*

$$(B^i - A^i)\sigma = ((B - A)\sigma)_i\ e^i \Rightarrow (B - A)C^i\sigma = ((B - A)\sigma)_i e^i,$$

pues $(A^i, L^i, B^i) = (A, L, B)C^i$. Como $C^i\sigma = c^i$, se tiene

$$C^i = (B - A)^{-1} \left( (B - A)\sigma\right)_i c^i \geqslant 0,$$

con lo cual se ve que los $c^i$ son determinados de modo único que su suma dé $\sigma$ puede verse por:

$$\sum_i c^i = (B - A)^{-1} \sum_i \left( (B - A)\sigma\right)_i e^i = (B - A)^{-1} (B - A)\sigma = \sigma$$

*Demostración del teorema 3.2.*

La cantidad de trabajo directa e indirectamente requerida en la industria i, es: $L^i\sigma = LC^i\sigma = Lc^i = L(B - A)^{-1} \left( (B - A)\sigma\right)_i e^i$ . Entonces, por unidad neta producida, es $L(B - A)^{-1}e^i$. Si $w = 1$, entonces $pA + L = pB$, de donde, $p = L(B - A)^{-1}$. Por lo tanto, como $p_i = pe^i$, entonces $p_i = L(B - A)^{-1}e^i$ que es el costo laboral.

*Teorema de Perron-Frobenius*

Versión fuerte.

Una matriz cuadrada no-negativa e indescomponible, A, tiene siempre un valor propio positivo r que es una raíz simple de la ecuación característica. Los módulos de todos los otros valores propios no exceden de r. Al valor propio maximal r le corresponde un vector característico estrictamente positivo.

Versión débil

Una matriz cuadrada no-negativa tiene siempre un valor positivo no-negativo. Un vector propio no-negativo está asociado al mayor de todos los valores propios no-negativos $\lambda$.

$\rho I - A$ es no-negativamente inversible si, y sólo si, $\rho < \lambda$

## REFERENCIAS

1. Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by means of Commodities.* Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

2. Morishima, M. (1973). *Marx's Economics.* Cambridge University Press. Cambridge, Inglaterra.

3. García-Cobían, R. (1984). *Una revisión crítica de la teoría de producción disjunta de Sraffa.* Tesis no publicada de Magíster en Economía. Programa Académico de Perfeccionamiento. Pontificia Universidad Católica del Perú.