*VOLUMEN VIII/No. 15 JUNIO 1985*

**ECONOMIA**

# INDICE

# UNA VERSION DIDACTICA DEL TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE ARROW

RAMON GARCIA-COBIAN*

## 1. *INTRODUCCION*

En Economía y en Ciencia Política se ha dedicado un gran esfuerzo a la investigación de un viejo problema: el diseño de buenos procedimientos de elección social. En Ciencia Política, se enfoca este problema desde un punto de vista de teoría de democracia, y se postula que no debiera escogerse una opción cuando la otra fuese tenida por superior por la mayoría de electores. Sin embargo, tal enfoque se ve en serias dificultades ante la clásica paradoja del voto: sean tres electores de los cuales el primero clasifica las opciones A, B y C, en orden decreciente según sus preferencias, como ABC; el segundo, similarmente, como BCA; y el tercero, como CAB. Entonces, B pierde ante A por 1 a 2, C pierde ante B, y A ante C por el mismo puntaje. Por lo tanto, no hay elección posible según el criterio descrito.

Por otro lado, en Economía se enfoca el problema desde el punto de vista de la eficiencia paretiana, según la cual debe escogerse una opción cuando todos los electores la consideran preferible a las demás. De este modo, basta que uno de los electores encuentre a A mejor que B para que, aunque todo el resto piense lo contrario, la sociedad no deba elegir a B.

De estas dos dificultades surgen dos cuestiones importantes: ¿Qué criterios se debían tener al diseñar un "buen procedimiento" de obtención de elección social a partir de preferencias individuales? Dados tales criterios, ¿existe algún procedimiento que los satisfaga simultáneamente?

En 1950, Kenneth J. Arrow propuso un conjunto de tales criterios, que parecían ser bastante razonables, y demostró que no existía ningún procedimiento satisfactorio a todos ellos simultáneamente. A partir de entonces, se inició un gran esfuerzo teórico tendente, ya fuese a desvirtuar dicho resul-

* El autor es Profesor Principal en el Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

tado, o ya fuese a extender sus alcances. En la historia de la producción intelectual y científica, se registran hechos similares en lo que a la fertilidad del trabajo de Arrow se refiere. Tal es el caso de, por ejemplo, el artículo de Einstein de 1905 sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles, el artículo de Gödel de 1931 sobre la indecidibilidad de los "Principia Mathematica" de Whitehead y Russel, y del artículo de Crick y Watson sobre la estructura del ácido desoxirribonucleico, de 1953. Estos artículos iniciaron o transformaron campos enteros de la ciencia (Física relativista, Lógica, Biología molecular). Algo similar es lo que ocurrió con el artículo de Arrow: "A Difficulty in the Concept of Social Welfare", aparecido en 1950 en el *Journal of Political Economy.* Este artículo ha sido la fuente de casi toda la teoría contemporánea sobre elección colectiva, y ha influido profundamente sobre la economía del bienestar, la filosofía moral y política, y sobre los enfoques teóricos de la microeconomía.

En parte, el interés estimulado por el trabajo de Arrow provino de la introducción en economía teórica de un tema completamente nuevo: el de la imposibilidad demostrable. Esto ya había hecho su aparición en otras ramas del saber como las matemáticas desde muy antiguo. Durante más de veinte siglos, se había estado trabajando en problemas como eran la construcción con regla y compás de un cubo doble de otro dado, la trisección de un ángulo arbitrario, y la cuadratura del círculo. Finalmente, todo esto culminó con la aparición de la teoría de Galois, que demostró la imposibilidad de resolver dichos problemas clásicos. Similarmente, en Lógica el artículo de Gödel sirvió para demostrar la imposibilidad eventual de obtener demostraciones en un sistema formal. También puede hallarse una idea similar en la Estadística y la Econometría en los estudios que establecen condiciones para la subindentificación de parámetros. El mismo tema se encuentra en el artículo de Arrow y en la literatura posterior sobre las funciones de bienestar social: se demuestra la imposibilidad de satisfacer simultáneamente un conjunto de propiedades que parecen deseables para un procedimiento de elección colectiva.

Frente al conjunto de formulaciones de las restricciones éticas en el procedimiento de la elección colectiva, y frente a la demostración de la incompatibilidad lógica existente entre ellas, se reaccionó, esencialmente, de tres maneras diferentes. Por un lado, se negó la validez de la demostración dada por Arrow, y, de hecho, J. Blau halló un error en ella (Blau, J. H., "The Existence of Social Welfare Functions", Econometrica 25, Nº 2, 302-313), con lo cual se dudó seriamente de la validez del teorema de imposibilidad. Sin embargo, análisis posteriores de Arrow, y del mismo Blau, condujeron a demostraciones que han sobrevivido a tres décadas de examen por parte de académicos matemáticamente bien enterados.

Por otro lado, se tomó el teorema de imposibilidad como una revelación en la Etica que obligaba a rechazar algunas ideas morales consideradas como buenas. De todas formas, no ha sido ésta la actitud común. Más bien, la reacción más moderada ha sido la más frecuente. Consiste ésta en objetar al tipo de formulación matemática hecha, argumentando que las profundas intuiciones éticas del hombre no podrían ser fielmente representadas por formulaciones matemáticas. No pocos economistas y pensadores sociales, poco familiarizados con los recientes hallazgos de la teoría del bienestar y de la elección colectiva, han reaccionado de este modo, señalando en especial como poco razonable la independencia de alternativas irrelevantes. Desgraciadamente, para quienes adoptaron esta posición, se dispone ahora de varios teoremas de imposibilidad semejantes al original de Arrow, cada uno de los cuales prescinde de sólo una de las condiciones de dicho teorema original. En otras palabras, si se rechaza una cualquiera de las condiciones, se obtiene inmediatamente otro teorema que, sin exigirla, demuestra la inexistencia de un procedimiento de elección colectiva que satisfaga a las condiciones restantes.

Por todo lo expuesto, resulta obvia la pertinencia y actualidad de discutir una elaboración teórica como la de Arrow. Sin embargo, antes de discutir tal elaboración debe empezarse conociéndola, y es en este sentido que se orienta el presente artículo, dada la escasa atención que en nuestro medio se ha prestado a tema tan importante. Puede preguntarse por qué hay que reescribir la demostración de Arrow. La respuesta es que, como ya se ha indicado, la versión original del propio Arrow contenía un error importante,y que aún su corrección posterior, contiene algunas ambigüedades en lo que se refiere al carácter del dictador, puesto que, según la definición dada por Arrow, un indiferente absoluto podía ser considerado como dictador. Luego, Sen (1970) trató de corregir esto y dio una nueva versión de la demostración. Sin embargo, este autor no logra plenamente su propósito, ya que, por ejemplo, en la definición de "decisorio" y de "casi decisorio", omite señalar que la implicación en cuestión ha de cumplirse para cualquier estado de preferencias individuales; su notación no es la más afortunada en lo que a claridad se refiere, puesto que ¡ni en el enunciado ni en la demostración aparece jamás la función de bienestar social de la que se habla!; finalmente, algunas de sus afirmaciones son sólo intuitivamente justificadas, y no se hace patente cómo se está usando la condición de independencia de alternativas irrelevantes.

Lamentablemente, desde 1975, en que por primera vez leí la versión de Sen, hasta el presente, no he hallado ninguna otra versión que supere las deficiencias señaladas, y cabe preguntarse si no se deberá a esto la escasa difusión en nuestro medio de un teorema tan importante en Ciencias Sociales en general, y en Economía del Bienestar en particular.

Finalmente, me he decidido a intentar la reescritura del teorema de Arrow, tratando de lograr la mayor claridad y rigor posible, a fin de permitir su fácil comprensión por cualquer persona que de matemáticas conozca sólo las presentaciones introductorias de Teoría de Conjuntos, como suele aparecer en cualquier libro de matemáticas para Ciencias Sociales.

## 2 *Exposición y Formulación del Problema*

Se considera una sociedad compuesta por n individuos, y un conjunto, X, sobre cuyos elementos cada individuo tiene opción y preferencias.

Las preferencias del i-ésimo individuo sobre los elementos de X, denotadas por $r_i$, son relaciones de orden sobre X, es decir que son reflexivas, transitivas y completas(1).

Se llamará *"un estado de preferencias individuales"* a cualquier n-uple $(r_1 \ldots r_n) \in (\text{ord } X)^n$, donde ord X: $[r \subseteq X^2 \mid r \text{ orden en } X]$. Para simplificar la notación, se denotará un tal n-uple por r. Además, dada una $r_i$, se denotará por $\hat{r}_i$ la relación binaria en X definida por: $x \hat{r}_i x'$ si $(x r_i x' \text{ . no } x' r_i x)$. Con $\tilde{r}_i$, en cambio, se denota a la relación binaria en X: $x \tilde{r}_i x'$ si $(x r_i x' \text{ . } x' r_i x)$.

El problema que la sociedad afronta es el de asignar un orden en X a partir de cualquier estado de preferencias individuales; a tal orden se llamará una *"preferencia social"*. Así, la tarea de los legisladores de la sociedad será establecer una *"función de bienestar social"*, es decir una $f : (\text{ord } X)^n \to \text{ord } X$.

La función de bienestar social, f, deberá satisfacer ciertas condiciones tenidas generalmente por necesarias en un ambiente "democrático". Tales condiciones son: *"el principio Paretiano"*, según el cual:

$$\forall r \in (\text{Ord } X)^n, \forall (x, y) \in X^2, (\forall i \in N_n \; x \hat{r}_i y) \Rightarrow x \hat{f}(r) y,$$

denotado en adelante por (P); *"la independencia de alternativas irrelevantes"*, denotada en adelante por (I), según la cual

$$\forall [r, r'] \subseteq (\text{ord } X)^n, \forall S \subseteq X \; (r_i \cap S^2 = r'_i \cap S^2)$$
$$C(S, f(r')) = C(S, f(r)),$$

donde $C(S, f(r)) := [z \in S \mid \forall u \in S, z f(r) u]$, y similarmente para $C(S, f(r'))$; la *"indictadura"*, denotada en adelante por (D), según la cual

1. A veces se encuentra el término "conexas" en lugar de "completas"; en todo caso, esto significa que $\forall x, \forall x' \in X, \Rightarrow x r_i x' \vee x' r_i x$.

$$\text{no } \exists\ i \in \mathrm{IN}_n, \forall r \in (\text{ord } X)^n, \forall (x, y) \in X^2, (x\ \hat{r}_i\ y \Rightarrow \hat{f}(r)\ y\ )^{(1)}.$$

Tratando de traducir estas condiciones al lenguaje verbal habitual, puede decirse que la condición (P) establece que cualquiera que sea el estado de preferencias individuales, si, respecto de x y de y, todos los miembros de la sociedad prefieren x a y, entonces la sociedad también ha de hacer lo mismo; la condición (I), en cambio, sostiene que si dos estados de preferencias individuales, distintos posiblemente, coinciden sobre un subconjunto S de X, entonces los óptimos sociales de S según la función de bienestar social para cada uno de dichos estados de preferencias individuales serán los mismos. Finalmente, la condición (D) elimina la posibilidad de la existencia de un dictador.

## 3. *Dificultad de Satisfacer Simultáneamente a (P), (I) y (D)*

Que sea difícil satisfacer simultáneamente, mediante una función de bienestar social, a estas tres condiciones, puede verse a partir de los siguientes ejemplos.

a) La *"regla de mayoría"*, M, asigna, a cualquier $r \in (\text{ord } X)^n$, la relación M(r) dada por: x M(r) y si Card $[i \in \mathrm{IN}_n \mid x\ r_i\ y] \geq$ Card $[j \in \mathrm{IN}_n \mid y\ r_j\ x]$.Ya a fines del siglo pasado, Nanson descubrió lo que llamó "paradoja de la votación", surgida de una sociedad de tres invidivuos (n = 3), con X = [ x, y, z]. Se da el siguiente estado de preferencias individuales:

$$r_1 = [\ (x, y), (y, z), (x, z), (x, x), (y, y), (z, z)\ ]$$

$$r_2 = [\ (y, z), (z, x), (y, x), (x, x), (y, y), (z, z)\ ] \text{ y}$$

$$r_3 = [\ (z, x), (x, y), (z, y), (x, x), (y, y), (z, z)\ ]$$

Entonces x M(r) y, pues dos individuos, (1 y 3), hallan a x preferible a y, pero sólo uno (2) halla a y preferible a x. Similarmente, y M(r) z, pero z M(r) x.

Luego, M(r), no siendo transitiva, no puede ser un orden en X; de donde M no es una función de $(\text{ord } X)^3 \rightarrow \text{ord } X$; es decir que no es una función de bienestar social. Sin embargo, puede fácilmente verificarse que sí satisface al principio Paretiano (vacíamente), a la independencia de las alternativas irrelevantes y a la indictadura.

1. En caso de existir un tal i se diría que i es un *"dictador"*.

b) El método de *"votación cardinal"* C, que es muy antiguo, exige que cada individuo califique con cierto puntaje a cada elemento de X, de manera que si x es preferible a y entonces la calificación de x no sea menor que la de y. Así, para cada $r_i$ de cierto estado de preferencias individuales se tendrá una función de calificación $c_i$: $X \rightarrow \mathbb{N}$. Luego, se define c: $X \rightarrow \mathbb{N}$ por c: $= \sum_{i=1}^{n} c_i$, y se define en

$$X : x\, C(r)\, y \text{ si } c(x) \geqq c(y).$$

Por ejemplo, y como antes, sea X= [x, y, z], y para cada i, $c_i(u) = 3, 2,$ ó 1 según que u sea el 1º, el 2º ó el 3º en la clasificación del i-ésimo individuo.

Puede verificarse sin dificultad que C es una función de bienestar social ya que para cada $r \in (\text{ord } X)^n$, $C(r) \in \text{ord } X$. Además, pasa bien las pruebas de las condiciones (D) y (P). Sin embargo, no satisface a la condición (I), pues, si n = 3 y:

$$x\, \hat{r}_1\, y \wedge y\, \hat{r}_1\, z \wedge \forall i \in [2, 3], (z\, \hat{r}_i\, x \wedge x\, \hat{r}_i\, y)$$

entonces c(x) = 7 = c(z); mas si para otro r' se tiene que la posición de x respecto a z según cada individuo es la misma que correspondía en r, pero el 1 cambia su apreciación acerca de una "alternativa irrelevante", y, colocándola ahora por debajo de x y de z, entonces c' (x) = 7 $\wedge$ c' (z) = 8, por lo que z $\hat{C}(r')$ x.

c) La *"regla de la tradición"*, T, establece que un cierto $r^* \in \text{ord } X$ será el orden social en X cualquiera que sea el estado de preferencias individuales.

Así, $T(r) = r^* \; \forall\, r \in (\text{ord } X)^n$. Es T, claramente, una función de bienestar social. Además, T satisface a (I) y a (D), pero incumple (P).

## 4. *Enunciado del Teorema de Arrow*

El sorprendente teorema de Arrow (1963) establece que los fracasos de las reglas anteriores no son meramente accidentales, sino, en cambio, necesarias.

*Teorema* (Arrow). Si $n \geqq 2$ y Card (X) $\geqq 3$[2], entonces no existe ninguna función de bienestar social que satisfaga a las tres condiciones: criterio Paretiano, independencia de alternativas irrelevantes e indictadura.

---

1. Arrow, K. J., Social Choice and Individual Values, Wiley, New York, 1951; 2a. ed. 1963.
2. Cabe observar que si Card $X \leqq 2$ entonces la transitividad sería trivialmente satisfecha, y que si n=1, la sociedad necesariamente sería "dictatorial". En ambos casos, la situación carecería de interés teórico.

5. *Todo decisorio es dictador*

Antes de demostrar el teorema de Arrow, hay que introducir los siguientes conceptos. Dada la función de bienestar social f, un subconjunto de individuos, V, es *"casi decisorio"* para x contra y si:

$$\forall r \in (\text{ord } X)^n, ((\forall i \in V\ x\ \hat{r}_i\ y) \wedge (\forall j \in V^c\ y\ \hat{r}_j\ x) \Rightarrow x\ \hat{f(r)}\ y);$$

en cambio, V es *"decisorio"* para x contra y si:

$$\forall r \in (\text{ord } X)^n, (\forall i \in V, x\ \hat{r}_i\ y) \Rightarrow x\ \hat{f(r)}\ y.^{(1)}$$

Esto se denotará por V. D(x, y), para lo primero, y por V. $\hat{D}$. (x, y) para lo segundo.

En la demostración del teorema, se ha de requerir de los siguientes lemas:

*Lema 1:* "Si para la función del bienestar social f, que satisface a (P) y a (I), $(\exists\ j \in \mathbb{N}_n\ \exists\ (x, y) \in X^2\quad j.D(x, y))$ entonces j es un dictador".

*Demostración:*

1º Va a demostrarse que el j de la hipótesis es un dictador sobre cualquier subconjunto de X que contenga 3 elementos, dos de los cuales sean x y y.

En efecto, como card X > 2, entonces $X \setminus [x, y] \neq \phi$. Ha de probarse, cualquiera que sea $z \in X \setminus [x, y]$, que j es un dictador sobre [x, y, z].

Esto quiere decir que dados dos elementos cualesquiera u y v, de [x, y, z], entonces j. $\hat{D}$ (u, v).

a) j. $\hat{D}$ (x, z), pues si $r \in (\text{ord } X)^n$ es tal que $x\ \hat{r}_j\ z$, entonces–como se demuestra a continuación– $x\ \hat{f(r)}\ z$.

En efecto, $\exists\ r' \in (\text{ord } X)^n$ tal que $x\ \hat{r}'_j\ y \wedge y\ \hat{r}'_j\ z \wedge \forall\ i \neq j, (y\ r'_i\ x \wedge y\ \hat{r}'_i z) \wedge \forall\ h \neq j, x\ \hat{r}'_h\ z \Leftrightarrow x\ \hat{r}_h\ z$ (2)

para tal r', se tiene que $x\ \hat{f(r')}\ z$, pues $x\ \hat{f(r')}\ y$ –ya que j. D(x, y) $\wedge$ $x\ \hat{r}'_j\ y \wedge \forall\ i \neq j, y\ \hat{r}'_i\ x$– ; y f(r') z –ya que f satisface a (P) y $\forall$ h,

1. Como ha de verse en 10., cuando f satisface a (I), en estas definiciones basta que $\exists\ r \in (\text{ord } X)^n$ para el cual se verifiquen las implicaciones.

2. Por ejemplo, r' podría definirse como sigue: $r'_j := [u_h, u_k) : h \leq k]$, donde X ha sido enumerado de manera que $u_1 = x \wedge u_2 = y \wedge u_3 = z$; y para $i \neq j$, $r'_i := (r_i \setminus [(u, y) : u \in X \setminus [y]]) \cup [(y, v) : v \in X]$

$y \hat{r}'_h z \wedge y f(r')$ es transitiva por ser un orden; ahora bien, como $\forall h \in \mathbb{N}_n . x \hat{r}_h z \Leftrightarrow x \hat{r}'_h z$, entonces $C([x, z], f(r)) = C([x, z], f(r'))$ pues f satisface a (I), de donde $C([x, z], f(r)) = [x]$ ya que $x \hat{f(r')} z$, lo cual equivale a que $x \hat{f(r)} z$.

b) $j . \hat{D}(z, y)$, pues: dado $r \in (\text{ord } X)^n$ tal que $z r_i y$, entonces $\exists r' \in (\text{ord } X)^n$ $((z \hat{r}_j x \wedge x \hat{r}'_j y) \wedge (\forall i \neq j \; z \hat{r}'_i x \wedge y \hat{r}'_i x))$, por razones similares a las expuestas en a). Así $x f(\hat{r}') y$, pues $j.D(x, y)$. Además, $z \hat{f(r')} x$, pues f satisface a (P). Luego, $z \hat{f(r')} y$, lo cual entraña que $z \hat{f(r)} y$, puesto que f satisface a (I) (ver a)). Así, $j.\hat{D}(z,y)$.

c) $j.\hat{D}(y, z) \wedge j.\hat{D}(y, x)$, pues $j.D(x, z) \Rightarrow j.\hat{D}(y, z)$ como puede comprobarse intercambiando papeles y y z en la implicación ya probada: $j.D(x, y) \Rightarrow j.\hat{D}(z, y)$; además intercambiando (x, y, z) con (y, z, x) en la implicación de a): $j.D(x, y) \Rightarrow j.\hat{D}(x, z)$, se obtiene: $j.D(y,z) \Rightarrow j.\hat{D}(y, x)$. Por lo tanto, $j.D(x,y) \Rightarrow j.\hat{D}(x, z) \Rightarrow j.D(x, z) \Rightarrow j.\hat{D}(y, z) \Rightarrow j.D(y, z) \Rightarrow j.\hat{D}(y, x)$.

d) $j.\hat{D}(z, x) \wedge j.\hat{D}(x, y)$, pues, de un lado, intercambiando papeles entre x y y en:
$j.D(x, y) \Rightarrow j.\hat{D}(x, z)$, $j.D(x, y) \Rightarrow j.\hat{D}(z, y)$ y $j.D(x, y) \Rightarrow j.\hat{D}(y, x)$, todas ya obtenidas en a), b) y c), respectivamente, se obtiene:

$$j.D(y, x) \Rightarrow (j.\hat{D}(y, z) \wedge j.\hat{D}((z, x) \wedge j.\hat{D}(x, y))$$

Además, como $j.D(x, y) \Rightarrow j.\hat{D}(y, x) \Rightarrow j.D(y, x)$, se concluye d). Con a),..., d) se ha probado que j es decisorio para cualquier alternativa en $[x, y, z]$, es decir que j es un dictador sobre cualquier trío de elementos de X que contenga a $[x, y]$

2º Ahora ha de probarse que j es, igualmente, un dictador sobre todo X. Sean u, v elementos cualesquiera de X. Entonces, si $[u, v] = [x, y]$, ya se probó en 1º que $j.\hat{D}(x, y)$. Si $u = x \wedge v \neq y$, entonces tomar el trío (x, y, v) para el cual ya se vio que $j.\hat{D}(u, v) \wedge j.\hat{D}(v, u)$
Finalmente, si $[u, v] \cap [x, y] = \phi$, entonces, con (x, y, u), se tiene que $j.\hat{D}(x, u)$, de donde $j.D(x, u)$; con (x, u, v), $j.\hat{D}(u, v) \wedge j.\hat{D}(v, u)$, puesto que $j.D(x, u)$, como se ha mostrado en 1º.

*Lema 2:* Si f es una función de bienestar social que satisface a la independencia de alternativas irrelevantes y existe un estado de preferencias individuales r tal que, para cierto subconjunto V de individuos, y para cierto par de opciones w, v, se tiene que $\forall j \in V \; w \hat{r}_j v \wedge \forall i \in V^c \; v \hat{r}_i w$; $w \hat{f(r)} v$; entonces V es casi decisorio para w contra v.

*Demostración.* Sea $r' \in (\text{ord } X)^n$ tal que $\forall j \in V w \hat{r}'_j v \wedge \forall i \in V^c \; v \hat{r}'_i w$; sea $S := [w, v]$. Entonces se ve inmediatamente que r y r' coinciden en

S, es decir que $\forall (x, y) \in S^2$, $\forall i \in N_n$, $x\, r_i\, y \Leftrightarrow x\, r'_i\, y$. Por lo tanto, y puesto que f satisface a (I), ha de seguirse que C ([w, v], f(r') ) = C ([w, v], f(r) ) = [z], ya que w $\hat{f}(r)$ v. Luego w $\hat{f}(r')$ v. Así, se ve que V.D(w, v).

## 6. *Demostración del teorema de Arrow*

Gracias al lema de 5, basta probar que si f satisface a (P) y a (I), entonces $\exists\, j \in \mathbb{N}_n \;\; \exists (x, y) \in X^2$ j. D(x, y)

Si no fuera cierta tal consecuencia, entonces $\forall (x, y) \in X^2 \; \exists\, V \subseteq \mathbb{N}_n$ tal que V. $\hat{D}(x, y)$, pues, por ejemplo el mismo $\mathbb{N}_n$ puede hacer el papel de tal V, gracias a que f satisface a (P). Luego, $\forall (x, y) \in X^2 \, \exists V \subset \mathbb{N}_n$ tal que V. D (x, y). Del $[W \subset \mathbb{N}_n \mid \exists (x, y) \in X^2$ W. D(x, y) ] tomar un elemento V de mínima cardinalidad (esto es posible pues las cardinalidades de tales elementos están inferiormente acotadas por 0). Así, por definición,

$$\exists (x, y) \in X^2 \; V.D(x, y).$$

Si card V = 1, entonces se tiene la consecuencia perseguida. Pero si card V > 1, entonces sea $V_1 \subsetneq V$ tal que card $V_1 = 1$; defínanse $V_2 := V \backslash V_1$ y $V_3 := \mathbb{N}_n \setminus V$. Sea r un estado de preferencias individuales tal que:

1) $\forall\, i \in V_1 \; x\, \hat{r}_i\, y \cdot y\, \hat{r}_i\, z$,
2) $\forall\, j \in V_2 \; z\, \hat{r}_j\, x \cdot x\, \hat{r}_j\, y$,
3) $\forall\, k \in V_3 \; y\, \hat{r}_k\, z \cdot z\, \hat{r}_k\, x$.

Entonces, x $\hat{f}(r)$ y, pues $V = V_1 \cup V_2$ .V.D(x, y)

Además, no z f(r) y pues si lo fuera, se tendría $V_2$. D(z, y), ya que gracias a que f satisface a (I), para que $V_2$. D(z, y) basta que la implicación de la definición de ser decisorio se cumpla para un r cualquiera (Ver Lema 2). Ahora bien, que $V_2$. D(z, y) contradiría el que V tenga mínima cardinalidad entre los subconjuntos de $\mathbb{N}_n$ que son casi decisorios para pares en X. De que no z $\hat{f}(r)$ y se deduce que y $\hat{f}(r)$ z. Ahora, de (x $\hat{f}(r)$ y . y f(r) z) se sigue, obviamente, que x $\hat{f}(r)$ z. Esto muestra que el único elemento de $V_1$ es casi decisorio para x contra z, nuevamente gracias a que f satisface a (I). Ciertamente, esto contradice la suposición según la cual no había ningún j tal que j fuese casi decisorio para cierto par de elementos de X.

La intención de este trabajo, mencionada en la introducción, de hacer más clara la demostración del teorema de imposibilidad de Arrow, es la que me ha llevado a presentar el lema 2, sin el cual resulta difícil entender por qué para que un subconjunto de individuos sea casi decisorio para una opción respecto a otra, basta con que exista un estado de preferencias individuales que satisfaga a la condición de la definición; esto, que en general no es cierto, se debe, en el contexto del teorema de Arrow, a que se ha asumido que la función de bienestar social satisface a la independencia de alternativas irrelevantes.

Esencialmente es en dicho lema que radica la modesta contribución que este trabajo pueda hacer al propósito de comprender cabalmente cuáles son las razones profundas y de carácter social que subyacen bajo la inevitable maraña simbólica de la demostración del teorema de Arrow.

## BIBLIOGRAFIA

(1) ARROW, K. J., (1950)
"A Difficulty in the Concept of Social Welfare", *Journal of Political Economy*, 58.

(1963)
*Social Choice and Individual* Valves, Wiley, New York, 2a. ed.

(2) BLAU, J. H., (1957)
"The Existence of a Social Welfare Function", *Econometrica*, 25.

(3) SEN, A. K., (1970)
*Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day San Francisco.