# Reflexiones sobre el uso de artificios y el conocimiento especializado del contenido matemático de docentes del nivel primaria

**KELLY JENNIFER DÁVILA VARGAS***
Innova Teaching School - Perú

**STHEFANI ELENA GARAY RAMÍREZ****
Universidad Nacional Mayor San Marcos - Perú

Recibido el 30-10-23; primera evaluación el 01-04-24;
segunda evaluación el 15-05-24; aceptado el 27-06-24

**Resumen**

Este ensayo plantea que, cuando un docente de primaria posee una comprensión instrumental del contenido matemático, recurre a artificios para enseñar; es decir, utiliza procedimientos mecánicos para resolver problemas u operaciones matemáticas, simplificando los conceptos involucrados en la resolución. Sobre la base del marco del conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Ball et al. (2008) y el conocimiento de los temas (KoT) propuesto por Carrillo-Yañez et al. (2018), se describen los dominios de conocimientos implicados en la enseñanza de las matemáticas, en particular el conocimiento especializado del contenido matemático. Este no solo permite resolver un problema o realizar una operación correctamente, sino que implica comprender a profundidad las nociones matemáticas que subyacen y las conexiones entre estas. A través del análisis de algunos artificios, las autoras buscan promover la reflexión sobre la importancia del conocimiento especializado del contenido matemático en la formación docente.

* Licenciada en Educación Primaria y magíster en Educación por la PUCP. Magíster en Estudios Curriculares por la Universidad de Columbia Británica, Canadá. Ha sido Líder de Matemática de la Oficina de Evaluación Docente del Ministerio de Educación del Perú, especialista en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes organizaciones. Además, trabaja como docente adjunta en el Departamento de Educación Matemática en la Universidad de la Columbia Británica en Canadá, y como docente de educación privada en una escuela privada en Vancouver, Canadá. Además, es docente en Innova Teaching Schools, Lima. Correo electrónico: fkdavila@its.edu.pe ORCID: https://orcid.org/0009-0006-1663-9361

** Magíster en Educación Universitaria, docente y especialista en didáctica de la matemática. Participación como consultora en proyectos educativos sobre evaluación, educación a distancia y formación docente. Estudios de matemáticas activas en Chile y España. Actualmente, es catedrática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor San Marcos - Perú y especialista de innovación y desarrollo docente en la red de Colegios Peruanos. Correo electrónico: sgarayr@unmsm.edu. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0750-4346

*Educación* XXXIII (65), septiembre 2024, pp. 213-239 / e-ISSN 2304-4322
**https://doi.org/10.18800/educacion.202402.E003**

**Palabras clave**: formación de docentes de primaria, enseñanza de las matemáticas, enseñanza primaria, conocimiento de los temas

## Reflections on the use of arbitrary procedures and the specialized mathematical content knowledge of elementary school teachers

**Abstract**

This essay suggests that when an elementary school teacher has an instrumental understanding of the mathematical content, they rely on arbitrary procedures or "shortcuts" to teach. In other words, they resort to mechanical steps to solve problems or operations, often oversimplifying the underlying concepts. Based on the Mathematical Knowledge for Teaching framework proposed by Ball et al. (2008) and the Knowledge of Topics (KoT) proposed by Carrillo-Yañez et al. (2018), this essay delves into the domains of knowledge involved in teaching mathematics, emphasizing the specialized content knowledge domain. This domain goes beyond merely solving problems or executing operations accurately; it implies a profound comprehension of the underlying mathematical concepts and their interconnectedness. Through the analysis of some "shortcuts" used by elementary school teachers, the authors seek to promote reflections on the importance of specialized content knowledge in teacher education.

**Keywords**: Primary teacher education, Mathematics Education, Primary Education, Knowledge of Topics

## Reflexões sobre o uso de artifícios e o conhecimento especializado em matemática de professores do ensino fundamental

**Resumo**

Este artigo argumenta que, quando um professor do ensino fundamental possui uma compreensão instrumental do conteúdo matemático, ele recorre a artifícios para ensinar, ou seja, utiliza procedimentos mecânicos para resolver problemas ou operações matemáticas, simplificando excessivamente os conceitos envolvidos na resolução. Com base no modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino proposto por Ball et al. (2008) e no Conhecimento de Tópicos (KoT) proposto por Carrillo-Yañez et al. (2018), são descritos os domínios de conhecimento envolvidos no ensino de matemática, em particular o conhecimento especializado do conteúdo matemático. Esse conhecimento não apenas permite resolver um problema ou realizar uma operação corretamente, mas também implica uma compreensão profunda das noções matemáticas subjacentes e das conexões entre elas. Por meio da análise de alguns artifícios, as autoras buscam promover a reflexão sobre a importância do conhecimento especializado do conteúdo matemático na formação de professores.

**Palavras-chave**: Formação de professores do ensino fundamental, ensino de matemática, ensino fundamental, conhecimento dos temas

## 1. Introducción

"…one important contribution we can make toward social justice is to ensure that every student has a teacher who comes to the classroom equipped with the mathematical knowledge needed for teaching"[1] (Ball et al., 2005, p. 44)

"Cualquiera puede enseñar en primaria" o "si eres docente de matemáticas en primaria, solo necesitas saber las operaciones básicas" son solo algunas de las creencias acerca del conocimiento que deben tener los docentes de matemáticas del nivel primaria. Sin embargo, ninguno de esos comentarios realmente captura el quehacer de un docente de este nivel; por el contrario, representan un conjunto de mitos que la sociedad tiene respecto de esta profesión.

En el Perú, una de las carreras con mayor oferta profesional es la de educación primaria. Poco más del 40 % de los docentes de Educación Básica Regular (EBR) pertenecen a este nivel [Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), 2021]. Las fuentes de formación de estos docentes son diversas: institutos pedagógicos, escuelas normales, facultades y universidades de educación. Debido a la falta de una política nacional de educación, los centros de formación docente han proliferado, sin necesariamente asegurar la calidad del servicio que brindan (Guevara & Meregildo, 2022). Ciertamente, el reto de garantizar la calidad de la formación docente no es exclusivo del Perú.

Tanto aquí como en otros países, la formación de los docentes de primaria se caracteriza por tener un enfoque general, que no brinda herramientas suficientes para la especialización en, al menos, una de las áreas curriculares. Aun cuando se espera que los docentes de educación primaria posean el mismo nivel de conocimiento de lengua, matemáticas, ciencias y estudios sociales (Stylianides & Hino, 2017), los programas de formación ofrecen oportunidades limitadas para aprender a través de experiencias que faciliten la comprensión conceptual de dichas áreas. Cuando la formación docente se diseña bajo los supuestos de que la enseñanza solo consiste en un conjunto de métodos generales, o que un buen maestro puede enseñar cualquier área curricular (Bransford et al., 2000), la calidad del proceso de aprendizaje puede verse afectada.

La formación docente vinculada con el conocimiento matemático para enseñar ha sido de interés de diversos estudios [Ball, 1988, Ball et al., 2005;

[1] Traducción propia: […]una contribución importante que podemos hacer hacia la justicia social es asegurar que cada estudiante tenga un maestro que venga al salón de clases equipado con los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza (Ball et al., 2005, p. 44)

Carrillo-Yañez et al., 2018; Li & Kaiser, 2011; Ma, 1999/2010; Stylianides, 2016]. Al comparar el conocimiento matemático de docentes de primaria de China y de Estados Unidos, Ma (1999/2010) encontró que los docentes chinos, quienes se habían especializado en matemáticas, poseían un mayor nivel de comprensión de los conceptos matemáticos que sus contrapartes estadounidenses, cuya formación había sido más bien generalista y que enseñaban todas las áreas.

En el Perú, como en otros países, la formación inicial de futuros docentes de educación primaria incluye cursos de matemáticas. Sin embargo, estos no siempre están alineados con lo que un docente requiere para enseñar. Por ejemplo, en España, una problemática importante radica en la desconexión entre la formación inicial de los profesores y la realidad docente en los centros de enseñanza infantil y primaria, lo que ha impulsado la necesidad de promover políticas de inversión (Diez et al., 2018). Por otro lado, en Costa Rica, Alpízar y Alfaro (2020) encuestaron a un grupo de docentes para conocer sus percepciones sobre la preparación matemática recibida en su formación universitaria. Los docentes consideraron que su formación no los había preparado adecuadamente para los desafíos actuales, debido a la antigüedad de los planes de estudio y a la falta de un enfoque que priorizara conocimientos esenciales para la enseñanza de matemáticas en primaria. Es decir, los cursos de matemáticas que llevaron estos docentes estuvieron alejados del quehacer cotidiano de las aulas. En el Perú, los cursos generales de matemáticas se imparten en los primeros ciclos de la formación docente [Ministerio de Educación (Minedu), 2019]. Sin embargo, el contenido de estos cursos suele enfocarse en temas abstractos y es el mismo para todos los estudiantes de educación de distintos niveles y especialidades, sin diferenciar las matemáticas que necesita comprender un docente para enseñar esta área en primaria.

Considerando lo expuesto, las autoras de este ensayo se preguntan qué necesita saber un docente de primaria para favorecer el desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes. ¿Es suficiente saber las operaciones básicas? Si una persona sabe resolver problemas con fracciones, ¿tiene el conocimiento suficiente para enseñar a un estudiante a resolver problemas con fracciones? Es posible encontrar algunas respuestas en el trabajo de Ball (1988), Ball et al. (2005), y Ball et al. (2008), quienes abordan el conocimiento matemático para enseñar. Su trabajo enfatiza que el conocimiento de las matemáticas de los docentes es fundamental para utilizar apropiadamente los materiales didácticos, evaluar el progreso de los estudiantes y emitir juicios sólidos sobre la progresión del aprendizaje (Ball et al., 2005). Este conocimiento implica un tipo de profundidad y detalle que va más allá de saber realizar correctamente una operación. Asimismo, el trabajo de Carrillo-Yañez et al. (2018), basado en los estudios de Ball, se enfoca en la naturaleza especializada del contenido matemático requerido para enseñar. Ellos proponen una categoría llamada conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés), que describe lo que un docente de matemáticas sabe y de qué formas lo sabe, resaltando así la importancia de comprender a profundidad los conocimientos matemáticos para atender las necesidades en el aula de clases.

Sin embargo, la práctica pedagógica de los docentes que enseñan matemáticas suele basarse en procedimientos o pseudoexplicaciones (Ma, 1999/2010) que en este ensayo se llaman "artificios". Estos denotan un dominio superficial de las matemáticas, lejano al conocimiento que se considera necesario para enseñar.

Así, a partir del análisis de artificios usados por profesores al enseñar matemáticas en primaria, este ensayo busca promover la reflexión acerca de la importancia del conocimiento especializado del contenido matemático en la práctica pedagógica.

## 2. Desarrollo

De acuerdo con Ball (1988), aún se cree que si el contenido de las matemáticas escolares es sencillo y comúnmente entendido, entonces los futuros docentes no necesitan volver a aprender el currículo de primaria y secundaria. Sin embargo, para Ball, el tipo de conocimiento matemático que requieren los docentes de primaria para enseñar es especial y distinto al conocimiento matemático que otras profesiones necesitan. El maestro no solo necesita comprender que algo es así; el maestro debe comprender por qué es así (Shulman, 1986). Por ejemplo, si un docente busca que sus estudiantes resuelvan problemas con fracciones, no es suficiente que sepa resolver correctamente problemas con fracciones. Necesita comprender aspectos como los distintos modelos para representar fracciones (área, medida y conjunto); los distintos significados de fracción (parte-todo, cociente, razón, medida y operador); la importancia del lenguaje para expresar la fracción  como "un cuarto" en vez de "uno sobre cuatro"; o que la fracción por sí misma no describe el tamaño de la unidad.

Diversos estudios abordan el impacto que tiene el conocimiento matemático del docente en el rendimiento de los estudiantes. En un estudio realizado con 115 docentes de educación primaria, Hill et al. (2005) encontraron que el conocimiento matemático del docente predice el avance en el rendimiento, en este caso, de estudiantes de primer y tercer grado. Por su parte, Rockoff et al. (2008) aplicaron una encuesta a docentes noveles para recoger información sobre predictores de efectividad y encontraron que el conocimiento del contenido específico es uno de ellos. En otro estudio, Campbell et al. (2014) concluyeron que existe una relación significativa entre el conocimiento del contenido matemático de los docentes de los últimos grados de primaria y el rendimiento matemático de sus estudiantes.

Para comprender el conocimiento matemático especializado de los docentes, en este ensayo se hace referencia al marco del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés), propuesto por Ball et al. (2008). Este marco establece distinciones entre los diferentes tipos de conocimientos necesarios para que un docente enseñe matemáticas de manera efectiva. Además, se hace uso del marco del conocimiento especializado del docente de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) propuesto por Carrillo-Yañez et al. (2018). Dentro de esta propuesta, destaca la categoría de KoT porque se centra en la comprensión profunda del contenido matemático, incluyendo definiciones, procedimientos y representaciones, así como sus significados. En este ensayo, esta categoría se utiliza para ilustrar los diferentes conocimientos necesarios para enseñar matemáticas, los cuales van mucho más allá de usar artificios.

## 2.1. Conocimientos profesionales de los docentes

### *2.1.1. Conocimientos especializados del docente de matemáticas*

Uno de los esfuerzos más destacados para entender el conocimiento profesional de los docentes es el estudio realizado por Shulman (1986), que destacó tres categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular. Shulman fue pionero en reconocer que existe un conocimiento exclusivo para la enseñanza, pues incluye las formas más útiles de representación de una materia, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, que permitan hacer comprensible dicha materia a los demás (Shulman, 1986). Este conocimiento le permite al docente convertir sus comprensiones sobre algún tema en diversas estrategias que faciliten la enseñanza. Ello favorece que los estudiantes logren los aprendizajes esperados.

Por su parte, Ball y sus colegas de la Universidad de Michigan, inspirados por Shulman, desarrollaron el marco del MKT que se fundamenta en la premisa de que la enseñanza de las matemáticas requiere un conocimiento específico. Este conocimiento se estructura en dos grandes dominios: conocimiento del contenido matemático y conocimiento pedagógico del contenido matemático, alineados con la propuesta de Shulman. En el primer dominio, el conocimiento del contenido matemático se divide en tres subdominios: el conocimiento común del contenido, que implica la matemática básica conocida por docentes y no docentes, como la multiplicación de números de dos cifras; el conocimiento especializado del contenido, que es específico para la enseñanza, como explicar por qué la multiplicación por diez implica añadir un cero, necesario para responder a preguntas conceptuales, relacionar representaciones o evaluar respuestas de estudiantes; y el conocimiento del horizonte del contenido, que se refiere al entendimiento de cómo las ideas matemáticas están interconectadas y su desarrollo a lo largo del tiempo, como la relación entre el valor posicional y los algoritmos de operaciones, o qué métodos de multiplicación se pueden extender más allá del conjunto de los números enteros (Bowie et al., 2019). En el segundo dominio, se propone una subdivisión del conocimiento que incluye la relación entre contenido y estudiantes, contenido y enseñanza, y contenido y currículo, facilitando la organización de los conocimientos docentes necesarios para la educación matemática.

Carrillo-Yañez et al. (2018) proponen contribuciones al modelo de Ball et al. (2008), ya que encuentran dificultades al diferenciar el conocimiento común y el conocimiento especializado. En este nuevo modelo, se profundiza en la especialización del conocimiento del docente de matemáticas, a partir de una categorización desde las matemáticas mismas. Desde esta propuesta, se plantean tres dominios. El primer dominio consiste en el conocimiento matemático, que está dividido en el KoT, conocimiento de la estructura de la matemática y conocimiento de la práctica matemática. El segundo dominio que es el conocimiento didáctico del contenido incluye el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. El tercer dominio consiste en las creencias, y se subdivide en creencias sobre las matemáticas y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los principales elementos de esta propuesta es el énfasis del conocimiento especializado que un docente de matemáticas necesita conocer para poder enseñar. En particular, se describirá en detalle uno de los subdominios, el KoT, que permitirá caracterizar los diversos conocimientos que están detrás del uso de artificios.

#### 2.1.1.1. Conocimiento de los Temas (KoT)

Este subdominio implica el conocimiento amplio del contenido matemático y combina el conocimiento que se espera que los estudiantes aprendan, pero con una comprensión más profunda, y quizás más formal y rigurosa (Carrillo-Yañez et al., 2018). Dentro de este subdominio, se describen categorías de conocimiento como las definiciones, propiedades y fundamentos, que se refieren al conocimiento del conjunto de propiedades que hacen definible a un concepto (Liñán et al., 2016); los procedimientos, que refieren al conocimiento sobre cómo se hace (ej. los algoritmos), cuándo se hace (las condiciones suficientes para aplicar los algoritmos) y por qué se hace (los principios detrás de los algoritmos); los registros de representaciones, que se refieren al conocimiento sobre las diferentes formas en las que usualmente se representa un concepto matemático como, por ejemplo, los registros concretos, gráficos, verbales, simbólicos, etc.; y la fenomenología y aplicaciones, que refiere al conocimiento sobre los diferentes contextos asociados con los conceptos matemáticos.

El conocimiento especializado del contenido matemático que tiene un docente de educación primaria le permitirá responder preguntas como ¿qué relación existe entre el algoritmo de la sustracción y el sistema de numeración decimal? ¿Por qué se dejan espacios en blanco al usar el algoritmo de la multiplicación? ¿Por qué el método del "aspa" funciona al comparar fracciones? ¿Por qué, al dividir dos fracciones, la segunda fracción se "voltea" y luego se multiplica?, entre otras.

La formación docente, sin embargo, no siempre atiende esta necesidad de comprensión más profunda de las matemáticas que se requiere para enseñar. Un docente que no está realmente equipado para enseñar matemáticas puede restringir su práctica a la exposición, a la memorización de algoritmos, al uso de representaciones simbólicas sin conexiones con otras representaciones, o al uso de trucos o artificios que funcionan, aunque no pueda explicar el porqué.

## 2.2. Análisis de artificios usados al enseñar matemáticas

En este ensayo, un artificio es un procedimiento centrado en llegar al resultado sin la comprensión de las matemáticas involucradas, simplificando los conceptos involucrados en su resolución o aplicándolos de manera aislada. Resolver operaciones usando artificios implicaría una comprensión instrumental que Skemp (2006) describe como una comprensión limitada de las matemáticas, focalizada en seguir procedimientos sin un entendimiento profundo de los conceptos subyacentes. Por el contrario, para Skemp, una comprensión relacional implica la capacidad de argumentar por qué se debe hacer algo. Por ello, un docente que solo usa artificios, sin saber explicar por qué estos funcionan y qué conexiones con conceptos matemáticos se establecen, tendrá pocos recursos para promover aprendizajes.

La revisión bibliográfica hecha por las autoras indicó que ciertos artificios son habitualmente utilizados por los educadores. Ma (1999/2010), al analizar el conocimiento especializado de los docentes para enseñar distintos temas matemáticos en el nivel primario, como la sustracción de números de dos cifras, encontró que predominaba la tendencia a emplear la pseudoexplicación conocida como "préstamo del vecino". Esta práctica se prefirió sobre métodos más conceptuales, tales como la descomposición de unidades de orden superior. Igualmente, al investigar el conocimiento de los docentes sobre la multiplicación de números de varias cifras, se encontró que optaban por la regla de "desplazamiento de cifras" en vez de profundizar en los conceptos de valor posicional que fundamentan el algoritmo. Este hallazgo motivó la exploración de los artificios 1 y 2 en este ensayo. Por otro lado, los estudios de Roy et al. (2022) sobre la comparación de fracciones mostraron una predilección por la técnica de la "multiplicación cruzada", lo que condujo el análisis del artificio 3. Finalmente, la investigación de Márquez (2013) sobre el conocimiento profesional de los educadores en torno a la división de fracciones reveló que la mayoría de los participantes tenía dificultades para justificar el método convencional de "invertir y multiplicar", un procedimiento ampliamente utilizado. Este resultado promovió el análisis del artificio 4. Además, desde su experiencia como acompañantes pedagógicas, las autoras de este ensayo han identificado el uso recurrente de estos artificios por parte de docentes de primaria.

A continuación, se analiza cada artificio, profundizando en las ideas matemáticas que subyacen y se exploran las limitaciones de estos para el aprendizaje.

### *2.2.1. Artificio 1: "Para restar, hay que pedirle prestado al vecino"*

Los algoritmos de la adición y sustracción requieren una comprensión profunda del valor posicional de los números, y las distintas formas de componerlos y descomponerlos. Para Van de Walle et al. (2019), los términos "llevar" y "prestar" son obsoletos y conceptualmente engañosos. Un término preferible para usar es canje. Por ejemplo, diez unidades se canjean por una decena, o una centena se canjea por diez decenas. Sin embargo, los algoritmos de la adición y sustracción se suelen abordar con procedimientos que contienen errores conceptuales.

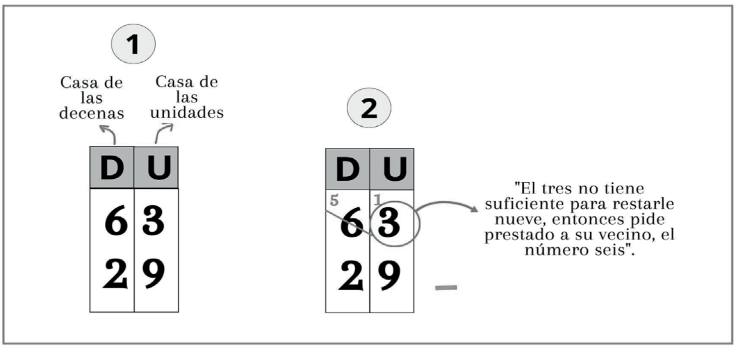
Los docentes con una comprensión instrumental del algoritmo de la sustracción pueden describir muy bien los pasos, pero no logran explicar por qué se realizan. Al discutir con algunos docentes sobre cómo abordar sustracciones como 21 - 9, Ma (1999/2010) encontró que estos se enfocaban en el procedimiento de cálculo. Por ejemplo, una docente explicó:

> Los estudiantes necesitarán saber que no se puede sustraer 9 de 1, por ende, tienes que pedir prestado un 10 al espacio de las decenas y, cuando tomas prestado ese 1, equivale a 10. Tarjas el 2 que tenías y se convierte en 10 así que ahora tienes 11 - 9, haces ese problema de sustracción, te queda el 1 y lo bajas. (p. 12)

Esta docente describe un procedimiento, pero no evidencia comprensión de las nociones matemáticas que subyacen a este. Ella usa expresiones como "pedir prestado", "tarjar y se convierte en 10" o "te queda el 1 y lo bajas". Sin embargo, la operación 21 - 9 involucra nociones claves para comprender el sentido del algoritmo, como la composición y descomposición de la decena como una unidad de mayor valor, que no están presentes en su explicación.

Al abordar la sustracción, por ejemplo, 63 - 29, pueden surgir errores conceptuales. Uno común es afirmar erróneamente que "no se puede restar un número mayor a un número menor y, por ello, se debe pedir prestado a la casa de las decenas". Esta explicación es incorrecta porque, en el conjunto de los números enteros, sí es posible realizar tales restas (por ejemplo, 3 - 9 = -6). Además, la expresión "la casa de las decenas" no se usa para reflejar el valor posicional de las cifras del número. Se emplea para nombrar la columna de la decena y diferenciarla de la de las unidades, como si fueran simples etiquetas, tal como se observa en el paso 1 de la Figura 1.

**Figura 1.** *Artificio de "préstamo del vecino" al restar*

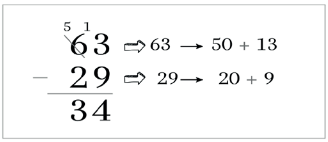



La idea de que, para resolver la operación, 63 - 29 "el tres no tiene suficiente para restarle nueve, entonces pide prestado a su vecino el número seis", como se observa en el paso dos de la Figura 1, contiene dos errores conceptuales. El primero es considerar que las cifras del número 63 son dos números aislados, en lugar de dos partes de un mismo número. Por otro lado, la idea de “préstamo” sugiere que el valor del número cambia. Sin embargo, en el ejemplo, es el mismo número 63 que se reagrupa o descompone en 5 decenas y 13 unidades.

#### 2.2.1.1. ¿Qué significa realmente el artificio “para restar, hay que pedirle prestado al vecino”?

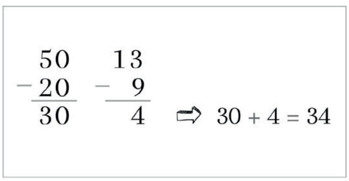
Un docente con limitado conocimiento especializado de la resta con reagrupación se restringe a usar explicaciones arbitrarias como “pedir prestado del vecino” sin ningún fundamento matemático. Tampoco evidencia conexiones entre los conceptos. Por el contrario, un docente con un sólido conocimiento especializado del contenido sustenta sus explicaciones con argumentos matemáticos. Este docente reconoce que el algoritmo de la sustracción implica descomposición y composición. El uso de la descomposición implica comprender la tasa de composición de una unidad mayor o de orden superior como, por ejemplo, que la decena es una unidad de orden superior a las unidades. El procedimiento de “tarjar el seis y llevar el uno” en realidad es una simplificación del proceso de descomposición del número 63, como se muestra en la Figura 2.

**Figura 2.** *Uso de la descomposición de números para resolver la sustracción*




Es el conocimiento de la descomposición lo que realmente permite explicar el sentido del algoritmo, y lo que faculta al docente a explorar estrategias diversas y flexibles, como la que se muestra en la Figura 3.

**Figura 3.** *Estrategias flexibles usando la descomposición de números*




La comprensión relacional de la sustracción de números de dos cifras implica una serie de conocimientos que pueden ser descritos desde la categoría KoT. La Tabla 1 presenta algunos de dichos conocimientos.

**Tabla 1.** *KoT en relación con el algoritmo de la sustracción con números de dos cifras*

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Definiciones, propiedades y sus fundamentos | Comprender la definición de sustracción. |
| | Comprender la definición del sistema de numeración decimal y el valor de posición. |
| | Comprender las relaciones de unidad de orden superior. |
| | Comprender los principios del sistema de numeración (principio aditivo y principio multiplicativo). |
| | Comprender la propiedad conmutativa. |
| Procedimientos | Saber cómo componer y descomponer números de dos cifras, a partir de la comprensión de unidades de mayor valor. |
| | Saber cómo intercambiar una decena por diez unidades manteniendo el valor equivalente. |
| | Saber usar la unidad de orden superior y la multiplicación (e.g. sesenta y tres es igual a seis veces diez y tres más). |
| Registros de representación | Representar en forma concreta, gráfica y simbólica la descomposición de números con grupos de diez al realizar una sustracción. |
| Fenomenología y aplicaciones | Usar los contextos de "separar", "quitar" y "comparar" para representar la sustracción. |

Así, algo que parece directo y sencillo, como la resta con números naturales, en realidad no lo es. "Cuando se compone de paquetes de conocimientos bien desarrollados e interconectados, el conocimiento matemático forma una red sólidamente sustentada por la estructura del tema" (Ma, 1999/2010, p. 146). El conocimiento especializado del contenido matemático le permite al docente contar con mayores herramientas para acompañar formativamente a los estudiantes en la construcción de nociones matemáticas.

### *2.2.2. Artificio 2: "Al multiplicar dos números de dos cifras o más, se deben correr espacios"*

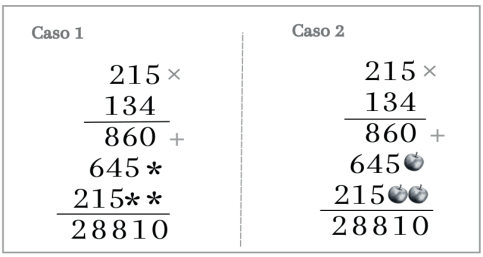
Una forma común de resolver una multiplicación con números de dos o más cifras, por ejemplo 135 x 64 consiste en multiplicar primero la cifra de las unidades del multiplicador (4) y correr un espacio cuando se multiplique la segunda cifra (6), tal como se muestra en la Figura 4. Si bien esta serie de pasos lleva a obtener la respuesta correcta, ¿por qué se debe correr un espacio? Y si fueran tres cifras, ¿se dejarían dos o tres espacios? ¿De qué depende el número de espacios que se deben correr?

**Figura 4.** *Algoritmo tradicional de la multiplicación*

$$135 \times 64 = ? \qquad \begin{array}{r} 135\times \\ 64\phantom{\times} \\ \hline 540+ \\ 810\phantom{0+} \\ \hline 8640\phantom{+} \end{array}$$

Ma (1999/2010) investigó cómo los docentes abordaban los errores de los estudiantes al multiplicar números de varias cifras, en particular, el “no correr un espacio”. Algunos docentes afirmaron que, en esos casos, aconsejaban a los estudiantes usar “marcadores” como asteriscos (caso 1 en la Figura 5). Otros mencionaron que apelaban a dibujos, como manzanas o naranjas (caso 2 en la Figura 5), para que los estudiantes “no olviden” dejar el espacio. Finalmente, algunos docentes consideraron que “colocar un cero en vez del espacio” no tendría mayor relevancia, ya que “el cero no tiene valor”. La investigación de Ma evidenció la ausencia de conocimiento especializado del contenido matemático por parte de estos docentes, pues ningún argumento evidenciaba la comprensión de por qué era necesario correr un espacio.

**Figura 5.** *Uso de marcadores de posición en una multiplicación*




Si un docente utiliza el artificio de “dejar espacio” al abordar la multiplicación de varias cifras, podría generar obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Tal enfoque puede limitar la comprensión del valor posicional de los números y su relación con el sistema de numeración decimal. El valor posicional es un concepto clave que ayuda a los estudiantes a entender cómo cada cifra en un número tiene un valor diferente dependiendo de su posición. Sin un entendimiento sólido de este concepto, los estudiantes pueden encontrarse simplemente moviendo números y espacios sin comprender la lógica detrás de sus procedimientos.

#### 2.2.2.1. ¿Qué significa realmente "correr un espacio" al multiplicar?

Maza (1991) menciona que "para lograr una satisfactoria comprensión del algoritmo es necesario, como mínimo, conocer la estructura del sistema de numeración decimal, la descomposición del número, y un cierto dominio de productos básicos y de las propiedades distributivas" (p. 240). Sin duda, la comprensión del número de forma flexible, es decir, el sentido numérico, resulta clave para la comprensión de las operaciones y sus propiedades.

La propiedad distributiva es la base del algoritmo tradicional para multiplicar con números de dos o más cifras. Se aplica, por ejemplo, cuando se propone que la multiplicación 18 x 7 equivale a (10+8) x 7. Al representar simbólicamente dicha operación, se deberían visualizar dos productos: 7 x 8 = 56 y 7 x 10 = 70 (Ramos, 2019). Esta estrategia, conocida como "productos parciales", se representa en la Figura 6.

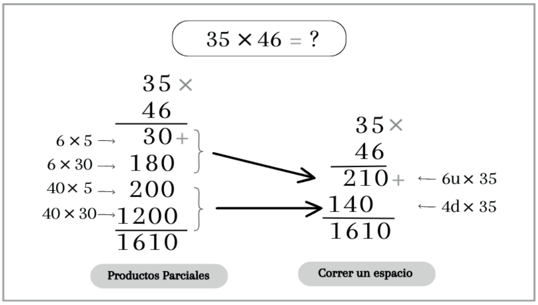
**Figura 6.** *Estrategia de productos parciales*

$$18 \times 7 = (10 + 8) \times 7$$

$$\begin{array}{rr}
 & 18\ \times \\
 & \underline{7} \\
7 \times 8\text{u} \rightarrow & 56\ + \\
7 \times 1\text{d} \rightarrow & \underline{70} \\
 & 126
\end{array}$$

En el caso de una multiplicación de dos números con varias cifras, la propiedad distributiva se usa al descomponer ambos factores tomando en cuenta su valor posicional. Por ejemplo, al multiplicar 35 x 46 se entiende "46 veces 35", lo que se puede traducir en (30 + 5) x (40 veces y seis veces) como se muestra en la Figura 7.

**Figura 7.** *Conexión entre la estrategia de productos parciales y el artificio de "correr un espacio"*




En este ejemplo, se han alineado los números 35 y 46, se multiplica cada cifra considerando su valor posicional y se suman los productos parciales para obtener el resultado final de 1610. Cuando se multiplica la cifra de las decenas del número 46 con el número 35, es cuando se corre un espacio. Así, se obtiene como resultado 140 decenas o lo que equivale a 1400 unidades. Debido a que la estrategia de productos parciales es una versión ampliada del algoritmo tradicional, se puede explicar por qué este último permite obtener las respuestas correctas a los problemas de multiplicación.

En la Tabla 2 se presentan algunos ejemplos del conocimiento que permiten una comprensión relacional para abordar la multiplicación de números con más de dos cifras, desde la perspectiva de KoT.

**Tabla 2.** *KoT en relación con el algoritmo de la multiplicación de números con más de dos cifras*

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Definiciones, propiedades y sus fundamentos | Comprender el significado de la multiplicación. |
| | Comprender la definición del sistema numeración decimal y el valor de posición. |
| | Comprender la propiedad distributiva. |
| Procedimientos | Saber cómo multiplicar números de una cifra. |
| | Saber multiplicar con productos parciales, a partir de la comprensión de cómo componer y descomponer números de dos cifras o más. |
| | Saber multiplicar por diez y sus múltiplos. |

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Registros de representación | Representar en forma concreta, gráfica y simbólica la descomposición de números con grupos de diez al realizar una multiplicación. |
| Fenomenología y aplicaciones | Usar los contextos de "grupos iguales", "área" y "comparación multiplicativa" para representar la multiplicación. |

Así, la comprensión de la multiplicación de números de varias cifras implica un conocimiento especializado del contenido que permite al docente conectar el valor posicional de las cifras de los números y el alineamiento de los productos parciales, lo cual es mucho más que correr espacios.

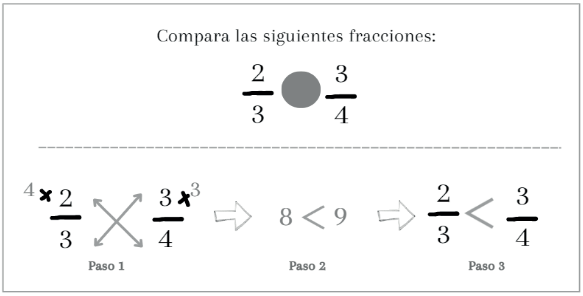
#### *2.2.3. Artificio 3: "Para comparar fracciones, se multiplican los numeradores y denominadores en aspa"*

Cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones en las que deben comparar fracciones, recurren inmediatamente al artificio del "aspa". Sin embargo, si los docentes solamente promueven este artificio en sus aulas, ¿cuál es su nivel de comprensión de las fracciones? ¿De qué forma este artificio se conecta con la noción de fracción?

El artificio del "aspa" suele presentarse de la siguiente manera: "Si son fracciones con diferente numerador y denominador, se realiza una multiplicación cruzada para identificar cuál es mayor". Cuando el estudiante aplica el artificio deja de usar fracciones y, más bien, compara números naturales, sin saber cómo o por qué cambió de campo numérico. Sin embargo, no cuestiona el procedimiento, pues obtiene el resultado correcto. En ese sentido, el artificio del "aspa" también evidencia una simplificación de los conceptos involucrados en la comparación de fracciones, y lleva al estudiante a aplicar pasos de manera mecánica.

En la Figura 8, se muestran los pasos usados al implementar el artificio del "aspa". En el paso 1, se observa la intención de homogenizar fracciones multiplicando el denominador de la fracción $\frac{3}{4}$ con el numerador de la fracción $\frac{2}{3}$ y multiplicando el denominador de la fracción $\frac{2}{3}$ con el numerador de la fracción $\frac{3}{4}$. Sin embargo, estos resultados no se colocan como fracciones, solo se colocan los numeradores, 8 y 9, tal como se observa en el paso 2. Este paso en realidad debería visibilizar las fracciones homogeneizadas, es decir $\frac{8}{12}$ con $\frac{9}{12}$. Así, se concluye que si 8 es menor que 9, entonces $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{3}{4}$, pero se deja de lado la comparación de fracciones en sí. Si bien el resultado es correcto, el proceso por el que el estudiante llega a este no promueve la comprensión de la fracción, solo demuestra una comprensión instrumental.

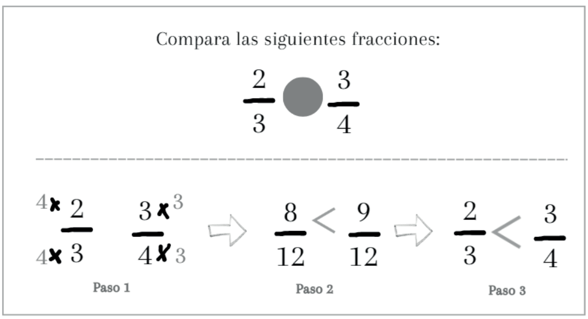
**Figura 8.** *Artificio del aspa para comparar fracciones*




#### 2.2.3.1. ¿Qué significa realmente el artificio del "aspa" al comparar fracciones?

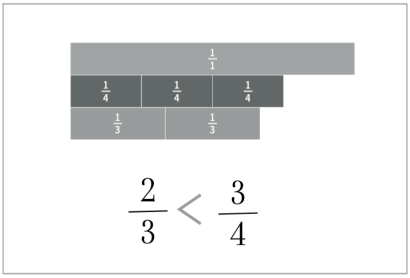
El uso del artificio del aspa para comparar fracciones se ha normalizado en las aulas. Sin embargo, si este método no aborda conceptualmente la comparación de fracciones, ¿por qué sigue proporcionando resultados correctos? En la Figura 9 se muestra la estrategia de encontrar fracciones equivalentes al comparar dos fracciones. En el paso 1, se busca un denominador común de $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ para compararlos; para ello, se amplifica la fracción $\frac{2}{3}$ multiplicando el numerador y denominador por cuatro, para así subdividir los tercios en 12 pedazos iguales; y en el caso de la fracción $\frac{3}{4}$, esta se amplifica multiplicando el numerador y denominador por tres, para así subdividir los cuartos en 12 pedazos iguales también. Como resultado, las fracciones a compararse serán $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, obteniendo que $\frac{9}{12}$ es mayor que $\frac{8}{12}$. Al simplificar ambas fracciones se obtiene su forma irreductible: $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Así, $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{3}{4}$.

**Figura 9.** *Comparación de fracciones con fracciones equivalentes*



Comparar fracciones implica identificar la relación de mayor, menor o igual entre dos fracciones. Una representación visual también podría ayudar a establecer la comparación de dos fracciones con denominadores diferentes. Por ejemplo, en la Figura 10 se puede observar una comparación de fracciones con el uso de regletas, en donde la primera barra representa la unidad y, a continuación, se representan los cuartos y tercios. Al alinear las regletas, se evidencia que ¾ es mayor que ⅔.

**Figura 10.** *Comparación de fracciones con regletas*




Para abordar eficazmente la enseñanza de la comparación de fracciones, es crucial que el docente disponga de una amplia base conceptual que trascienda recordar procedimientos básicos, como el artificio del "aspa". En la Tabla 3 se presentan algunos conocimientos involucrados en la comprensión de la comparación de fracción, desde la perspectiva de la categoría de KoT.

**Tabla 3.** *KoT en relación con la comparación de fracciones*

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Definiciones, propiedades y sus fundamentos | Comprender los significados de las fracciones (parte-todo, medida y reparto). |
| | Comprender la definición de fracciones equivalentes. |
| | Comprender los tipos de fracciones: homogéneas y heterogéneas. |
| | Comprender los principios de la comparación de fracción (e.g. las fracciones solo pueden ser comparadas si se especifica la unidad referente o se asume que esta unidad, en cada caso, es uno). |
| Procedimientos | Saber cómo homogenizar fracciones al compararlas, usando la noción de fracciones equivalentes. |

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Registros de representación | Representar la comparación de fracciones, en forma concreta, gráfica y simbólica. |
| Fenomenología y aplicaciones | Usar los contextos de fracción como parte-todo, medida y reparto para representar problemas de comparación. |

#### *2.2.4. Artificio 4: "Al dividir dos fracciones, se voltea la segunda fracción y se multiplica"*

Un artificio clásico para dividir dos fracciones reza así: "Invierte la segunda fracción y multiplica". Pero ¿por qué se invierte la fracción y por qué se multiplica? ¿En qué situación de la vida real se usa la división de fracciones?

Desde una propuesta centrada en la repetición de procedimientos y uso de artificios, la resolución de la operación ¾ ÷ ⅓ implicaría invertir el divisor y multiplicar, tal como se muestra en la Figura 11. Este artificio no evidencia el uso conceptual del inverso multiplicativo ni la relación entre la división y la multiplicación.

**Figura 11.** *Artificio para dividir una fracción por una fracción*

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{3}$$

(Al invertir $\frac{1}{3}$ se obtiene 3)

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4}$$

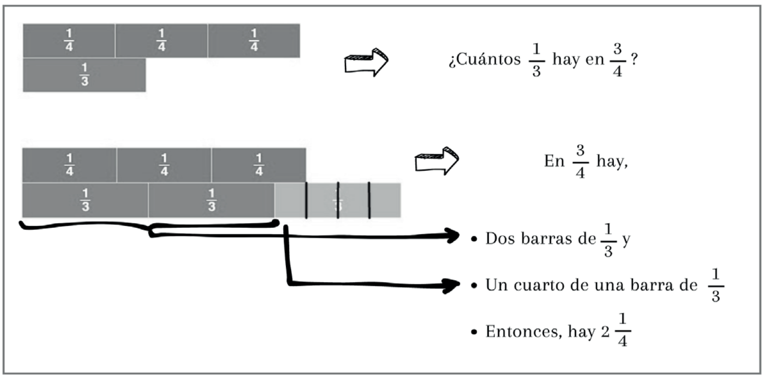
#### 2.2.4.1. ¿Qué significa realmente el artificio del "invertir y multiplicar" al dividir fracciones?

Los docentes no se limitan a resolver problemas mientras los estudiantes observan, sino que deben escuchar, examinar el trabajo de los estudiantes, elegir modelos o ejemplos útiles. Hacer todo esto requiere conocimientos y comprensión matemática adicionales (Ball et al., 2005). Nuevamente, es el conocimiento especializado del contenido matemático lo que llevará al docente a determinar contextos que permitan abordar el significado de la división de fracciones, sin limitarse al uso de artificios. Por ejemplo, podrían usar los contextos de división como reparto y medida.

En la división como reparto, se conoce el número de grupos que se van a formar y se debe determinar el tamaño de cada grupo. Por ejemplo, "tengo ⁶⁄₈ de pastel, quiero repartirlo entre tres personas y quiero saber cuánto pastel le corresponde a cada persona". En cambio, en el contexto de la división como medida, se conoce el tamaño de cada grupo y se quiere saber el número de grupos posibles de formar. Por ejemplo, "una persona tiene 4 barras de cereal y quiere saber cuántas porciones de ⅓ puede obtener". Ambos contextos permiten comprender el sentido de la operación (Gregg y Gregg, 2007).

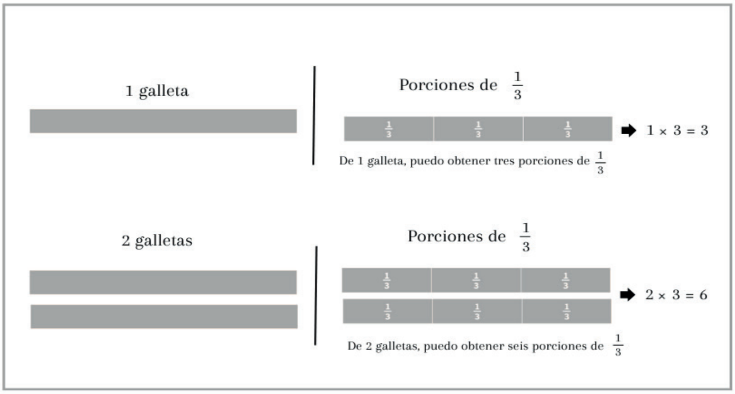
Desde el contexto de división como medida, la división ¾ ÷ ⅓ equivaldría a preguntar cuántos ⅓ hay en ¾ o cuántos ⅓ entran en ¾. La Figura 12 muestra este contexto usando barras de fracciones. Como se observa, dos barras de ⅓ caben en ¾ más un cuarto de otra barra de ⅓. De este modo, se obtiene 2¼.

**Figura 12.** *Representación visual del significado de la operación ¾ ÷ ⅓ desde el contexto de medida*



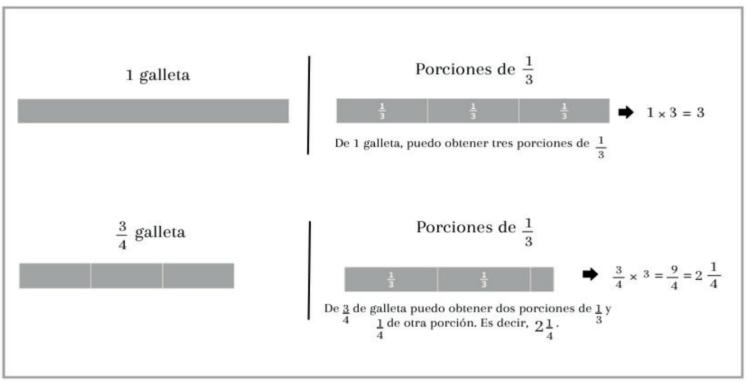

El artificio para dividir fracciones indica "invertir la segunda fracción y multiplicar". Sin embargo, ¿por qué la división ¾ ÷ ⅓ se puede resolver como ¾ x 3? A continuación, se explicará el significado de "invertir y multiplicar" usando el siguiente contexto: "Tengo ¾ de galleta y quiero servir porciones de ⅓ de galleta, ¿cuántas porciones puedo servir?". Se puede comenzar considerando la tasa unitaria; es decir, la cantidad de porciones de ⅓ que hay en una galleta. De una galleta, se puede obtener tres porciones de ⅓, como se observa en la primera parte de la Figura 13. Entonces, usando la relación proporcional, si de una galleta se puede obtener tres porciones de ⅓ (1 x 3), se puede decir que de dos galletas se puede obtener seis porciones de ⅓ (2 x 3), como se ve en la segunda parte de la Figura 13.

**Figura 13.** *Representación del uso de la tasa unitaria para encontrar la cantidad de porciones de ⅓ en dos galletas*




Hasta el momento, se ha usado unidades como una galleta o dos galletas, pero también se podría usar fracciones. Por ejemplo, "si en una unidad hay tres porciones de ⅓, ¿cuántas porciones de ⅓ habrá en ¾? En la Figura 14 se representa el uso de la tasa unitaria para encontrar la cantidad de porciones de ⅓ en ¾ de galleta. Así, de ¾ de galleta se obtienen 2 ¼ porciones de ⅓.

**Figura 14.** *Representación del uso de la tasa unitaria para encontrar la cantidad de porciones de ⅓ en ¾ de galleta*



Otra forma de expresar la relación mostrada en la figura anterior sería la presentada en la Figura 15. Como se observa, si de una galleta se obtiene tres porciones de ⅓, entonces de ¾ de galleta se obtendrán 2 ¼ porciones de ⅓. Para llegar a este resultado, se plantea la operación ¾ × 3. Esto equivale a decir que la división ¾ ÷ ⅓ se puede resolver con la operación ¾ × 3.

**Figura 15.** *Uso de la proporcionalidad para encontrar la cantidad de porciones de ⅓ en ¾ de galleta*

$$1 \rightarrow 3$$
$$\frac{3}{4} \rightarrow P$$

Entonces,

$$P = \frac{3}{4} \times 3$$
$$P = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Respuesta: $2\frac{1}{4}$ porciones de $\frac{1}{3}$

Partir del significado de la operación implica un conocimiento más profundo y explícito de la división de fracciones que aquel que se limita a realizar un cálculo correcto. En la Tabla 4 se presentan algunos conocimientos involucrados en la comprensión de la división de fracciones, desde la perspectiva de la categoría de KoT.

**Tabla 4.** *KoT en relación con la división de fracciones*

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Definiciones, propiedades y sus fundamentos | Comprender la definición de fracción. |
| | Comprender la definición de multiplicación y división. |
| | Comprender la relación entre la multiplicación y la división como operaciones inversas. |
| | Comprender la definición de recíproco o inverso multiplicativo de un número. |
| | Comprender la definición de razón. |

| Categoría | Conocimientos del docente |
|---|---|
| Procedimientos | Saber usar la relación proporcional para resolver la división de fracciones. |
| | Saber usar el inverso multiplicativo de un número al dividir las fracciones. |
| Registros de representación | Representar la división de fracciones en forma concreta, gráfica y simbólica. |
| Fenomenología y aplicaciones | Usar los contextos de medida y de reparto para representar la división de fracciones. |

Así, saber matemáticas para enseñar exige un tipo de profundidad y detalle que trasciende lo que se necesita para ejecutar un algoritmo de manera confiable (Ball et al., 2005).

A través del análisis de estos artificios y los conocimientos involucrados desde el marco de referencia de KoT, este ensayo invita a reflexionar sobre la relevancia del conocimiento especializado del contenido en el quehacer de la enseñanza. El docente de primaria no necesita saber una serie de trucos o artificios para enseñar, sino más bien una comprensión profunda de las matemáticas que lo equipe adecuadamente para promover aprendizajes. La formación inicial docente es una oportunidad para lograr ello, de modo que los docentes finalicen su formación con un bagaje teórico y práctico que les permita acceder a la práctica docente sin recurrir al "ensayo y error" que puede perjudicar el aprendizaje de los estudiantes de primaria (Blanco y Ruiz, 1995).

Cabe mencionar que los conocimientos involucrados en cada uno de los temas matemáticos presentados en este ensayo podrían ser extendido en futuros estudios.

## 3. Conclusiones

El propósito principal de este ensayo es reflexionar sobre la importancia del conocimiento especializado del contenido matemático del docente. Para ello, se han analizado artificios utilizados por docentes al enseñar matemáticas en el nivel primaria y se han detallado los diversos conocimientos involucrados desde la perspectiva del KoT con el fin de destacar la importancia del enfoque conceptual detrás de los temas en contraste con el enfoque superficial de los artificios. A partir de lo planteado, se presentan las siguientes conclusiones:

- La presunción de que las matemáticas en primaria son "básicas" y "simples" puede restar importancia al conocimiento especializado del contenido matemático y promover el uso de artificios por parte de los docentes. Si bien los contenidos del currículo de primaria parecen sencillos, no lo son, pues involucran una comprensión relacional de una red de conocimientos. El uso de artificios, por el contrario, solo demuestra una comprensión instrumental de dichos contenidos curriculares.
- Un sólido conocimiento especializado del contenido matemático les permitirá a los docentes explicar por qué los procedimientos y fórmulas estándares de las matemáticas de la escuela primaria son válidos, por qué los métodos no estandarizados también pueden ser válidos y por qué otras formas de razonamiento aparentemente plausibles no son correctas. Una comprensión conceptual del KoT les posibilitará a los docentes usar argumentos matemáticos en lugar de procedimientos arbitrarios.
- Para el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes, es necesario contar con un profesional docente equipado no solo con estrategias didácticas, sino con conocimientos especializados. Un docente con dominio del conocimiento especializado del contenido matemático puede identificar la conexión entre la operación de sustracción y la descomposición de los números, en vez de recurrir al artificio del "préstamo del vecino". Cuando aborda la multiplicación de más de dos cifras, puede justificar por qué se deja espacios al usar el algoritmo tradicional, desde su comprensión del sistema de numeración decimal y el concepto de valor posicional, sin limitarse al uso de marcadores de posición. Asimismo, cuando compara fracciones, usa el concepto de fracciones equivalentes yendo más allá del clásico artificio del "aspa". Y, al dividir dos fracciones, es capaz de explicar por qué se puede invertir la segunda fracción y multiplicarlas a través del contexto de división como medida.
- Si se considera que el conocimiento especializado del contenido matemático es único a la enseñanza, su incorporación en los programas de formación docente podría ser un elemento clave en la mejora de la calidad educativa. Una formación docente que aborde los conocimientos de los temas y las necesidades del aula podría beneficiar la comprensión conceptual y relacional para una enseñanza con sentido de las matemáticas, en todos los niveles y, en particular, en la educación primaria.

## Referencias bibliográficas

Alpízar, M., & Alfaro, A. L. (2020). Percepción de un grupo de docentes de educación primaria acerca de la preparación recibida durante su formación universitaria en cuanto al tema de las matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, *20*(1), 111-146. https://dx.doi.org/10.15517/aie.v20i1.39978

Ball, D. (1988). *The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers: Challenging the Myths*. Michigan State University.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46. https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389-407.

Blanco, L., & Ruiz, C. (1995). La formación del profesorado de ciencias y matemáticas. En L. Blanco y V. Mellado. *Conocimiento Didáctico del Contenido y formación del profesorado. La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal* (pp. 55-66). Universidad de Extremadura.

Bowie, L., Venkat, H., & Askew, M. (2019). Pre-service primary teachers' mathematical content knowledge: An exploratory study. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(3), 286-297. https://doi.org/10.1080/18117295.2019.1682777

Bransford, D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2002). *How people learn: Brain, Mind, Experience, and School.* National Academy Press.

Campbell, P. F., Nishio, M., Smith, T. M., Clark, L. M., Conant, D. L., Rust, A. H., DePiper, J. N., Frank, T. J., Griffin, M. J., & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers' mathematical content and pedagogical knowledge, teachers' perceptions, and student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 419-459. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0419

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Diez, E. J., Dolz, D., & Fernández, A. (2018). Hacia un nuevo modelo de formación y acceso a la función docente: propuestas de debate. *Revista de la Escuela Universitaria de Magisterio de Toledo, 43*(28), 94-116.

Guevara, A. & Meregildo, J. (2022). Lineamientos generales para el desarrollo y la formación inicial docente en el marco del bicentenario. En Revilla, D. & Escalante, M. (Eds.)*, La Formación Docente en Educación Superior en el Marco del Bicentenario* (pp. 52 - 58). Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación, Kipus Perú, Red de Formación Docente.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(9), 490-496. https://doi.org/10.5951/MTMS.12.9.0490

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2021). *Docentes en el sistema educativo, según nivel y modalidad, 2011-2021.* https://m.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/indices_tematicos/5.30a_Doc.Niv_IT_Dic.2022.xlsx

Li, Y. & Kaiser, G. (2011) *Expertise in Mathematics Instruction. An International Perspective.* Springer New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7707-6

Liñán, M.M., Contreras, L.C. y Barrera, V.J. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12-20). CGSE.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.* (P. Micheli, Trans.). Academia Chilena de Ciencias. (Trabajo original publicado en 1999).

Márquez, A. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones.* Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división.* Síntesis

Ministerio de Educación del Perú (Minedu). (2019*). Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente – Programa de Estudios de Educación Primaria*. http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/dcbn-educacion-primaria-2019/

Ramos, P. (2019). *Aritmética para maestros. Más ideas y menos cuentas.* https://pedroramos.web.uah.es/Blog/Pdfs/Aritmetica-Maestros-Muestra.pdf

Rockoff, J. E., Jacob, B. A., Kane, T. J., Staiger, D. O., National Bureau of Economic Research, & NBER Working Papers. (2008). *Can you recognize an effective teacher when you recruit one?* National Bureau of Economic Research.

Roy, G. J., Harbour, K. E., Martin, C., & Cunningham, M. (2022). Using number talks to compare fractions. *The Mathematics Teacher, 115*(12), 874.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(2), 88-95. https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press

Stylianides, G. J., & Hino, K. (2017). *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers: An international perspective.* Springer.

Van de Walle, J. A, Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2019). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10ª ed.). Pearson.

**Roles de autor: Dávila, K.**: Conceptualización, Visualización, Escritura - Revisión y edición. **Garay, S.**: Conceptualización, Visualización, Escritura - Revisión y edición.

**Cómo citar este artículo**: Dávila, K., & Garay, S. (2024). Reflexiones sobre el uso de artificios y el conocimiento especializado del contenido matemático de docentes del nivel primaria. *Educación, XXXIII*(65), 213-239. https://doi.org/10.18800/educacion.202402.E003

**Primera publicación**: 02 de septiembre de 2024.