Lugares geométricos en el plano: "Curva: Bruja de Agnesi"

Norberto Jaime Chau Pérez | jchau@pucp.edu.pe
Roy Wil Sánchez Gutiérrez | rwsanche@pucp.edu.pe

Introducción

Uno de los temas sobre Geometría Analítica que se trabaja en el curso de Matemática Básica es Lugares Geométricos. El tema es abstracto y difícil de comprender para los alumnos. Por ello, conscientes de esta dificultad, elaboramos este material de apoyo para que los alumnos puedan abordar los diferentes lugares geométricos con mayor fluidez.

> Una figura geométrica, tal como una curva, se define como un lugar geométrico. Esta definición permite identificarla de entre todos los demás objetos de su clase. Si estamos definiendo una curva plana C por medio de una propiedad P que únicamente posee C, entonces, entre todas las curvas planas, una curva es del tipo C si y solamente si posee la propiedad P[4] y [5].
> Para describir a una curva, se debe dar la condición que deben cumplir sus puntos, es decir, se debe dar una ley a la cual deben obedecer los puntos de la curva. Una curva es el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve siguiendo esa ley específica [3].
> Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos y solamente aquellos puntos que satisfacen una o más condiciones geométricas [4] y [5].

El problema fundamental que abordaremos será, a partir de las condiciones que cumplen los puntos del lugar geométrico, el de determinar su ecuación. El procedimiento para hallar dicha ecuación puede reducirse a los tres pasos siguientes:

1. Se supone que el punto P(x, y) es un punto cualquiera que satisface las condiciones dadas y, por lo tanto, pertenece al lugar geométrico.
2. Se expresa analíticamente la condición o condiciones geométricas dadas por medio de ecuaciones o de fórmulas analíticas, algunas de ellas estudiadas previamente.
3. Se simplifica la ecuación y el resultado será la representación algebraica del lugar geométrico en cuestión.

Como ejemplo sencillo, consideremos la circunferencia. Es una curva plana que posee la propiedad única P de que todos sus puntos están a igual distancia de un punto fijo en su plano.

La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituye un problema muy importante en todas las ramas de la Matemática y sus aplicaciones.

---

[1] María Gaetano Agnesi nació en Milán; fue una distinguida lingüista, matemática y filósofa. Reemplazó a su padre en la cátedra de la Universidad de Bologna cuando este estuvo enfermo. En 1748, cuando tenía 30 años, se publicó su libro *Instituzioni Analitiche*, que fue muy popular, se tradujo a muchos idiomas y se usó en Europa durante muchos años. En su libro, Agnesi confundió la palabra "*Versovia*" con "*versiera*", otra palabra latina que significa "abuela del diablo" o "bruja", de ahí viene el nombre de la curva: "la Bruja de Agnesi"[2].

Por ejemplo, la curva que representa a una cadena "uniforme" suspendida por sus extremos entre dos puntos situados a la misma altura es el lugar geométrico denominado catenaria[3]. La estructura de algunos grandes puentes que sirven para el tránsito vehicular está suspendida de cuerdas metálicas. Estas cuerdas forman la curva catenaria (ver figura 1).

Figura 1
Golden Gate en San Francisco, EE.UU.
Tomado de: www.guias-viajar.com

Ideamos un problema real aplicado al ciclismo para poder, a través de una actividad cooperativa, trabajar estos conceptos.

La aplicación de esta actividad pasó por las siguientes etapas:

1. Formación de los grupos de estudiantes en clases. Cuatro personas por grupo. La formación en cada caso fue heterogénea y mixta.
2. Coordinación previa del profesor con los asistentes de docencia sobre la forma de llevar adelante la actividad. Las dificultades que se presentan son atendidas siguiendo el modelo del facilitador rotativo de los asistentes de docencia y de los profesores, es decir, cada asistente rota de grupo en grupo, aclarando y resolviendo las consultas [1].

Conocimientos previos necesarios para la actividad

Para desarrollar la actividad sobre lugares geométricos, se requiere que los estudiantes conozcan los siguientes temas:

a. Gráficas de ecuaciones y curvas en el plano. Por ejemplo, conocer la ecuación y la gráfica de rectas, circunferencias, parábolas, etc.
b. Recta tangente a una circunferencia. Propiedades de las rectas tangentes a una circunferencia
c. Intersecciones de curvas. Los puntos de intersección de dos curvas se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones formado por las mismas ecuaciones de cada curva
d. Comportamiento asintótico de las curvas. Idea intuitiva de límite y rectas asíntotas
e. Semejanza de triángulos en geometría plana

Objetivos de aprendizaje involucrados en la actividad

Objetivos generales

1. Aplicar habilidades de razonamiento matemático, y de comunicación oral y escrita
2. Desarrollar la capacidad para trabajar y aprender tanto de forma individual como cooperativa
3. Integrar el conocimiento académico con las experiencias adquiridas fuera del aula
4. Analizar, deducir, descubrir y resolver el problema planteado en cada etapa de trabajo, en la etapa de pareja y en la etapa grupal
5. Compartir los conocimientos adquiridos con todos los integrantes del grupo

Objetivos específicos

1. Identificar las condiciones que determinan el lugar geométrico
2. Deducir las relaciones que existen entre las variables del problema y los datos
3. Determinar la ecuación que determina el lugar geométrico
4. Graficar la curva descrita por el lugar geométrico

Desarrollo de la actividad

Tiempo	Procedimiento	Materiales
15 min.	**Prueba individual.** Cada alumno resolverá una pregunta relativa al tema sin apuntes. Esta prueba permite conocer quiénes vienen estudiando previamente el tema.	▪ Pregunta ▪ Reglas ▪ Compás
50 min.	**Trabajo en parejas.** Parte de la actividad se resuelve en parejas. De los resultados y conclusiones de las parejas, el grupo aprende sobre lugares geométricos.	▪ Pregunta ▪ Reglas ▪ Compás ▪ Calculadora ▪ Apuntes de clase
50 min.	**Trabajo grupal.** Será resuelto con los aportes de las parejas. Es el momento en que comparten y elaboran el informe final. Todos son solidarios e interactúan mutuamente.	▪ Pregunta ▪ Reglas ▪ Compás ▪ Calculadora ▪ Apuntes de clase

Posibles dificultades

En algunas ocasiones, los alumnos tienen dificultades para resolver los problemas porque:

- No reconocen las relaciones halladas y tratan de eliminar las variables.
- No conocen el algoritmo de construcción de semejanza de triángulos.
- No manejan el concepto de distancia, punto medio, razón dada.

Recomendaciones para una posterior aplicación

- Utilizar una idea, una fotografía o un fenómeno físico como punto de partida para elaborar muchos problemas tipo ABP
- Propiciar un ambiente de análisis que les permita validar geométricamente estas situaciones y comprenderlas con profundidad
- Usar con mayor frecuencia los recursos con que se cuenta: calculadoras, computadoras portátiles, sistemas de información vía Internet, foros, blogs y bibliotecas
- Seleccionar a los asistentes de docencia de entre los jefes de prácticas del curso que tengan experiencia en el manejo de grupos
- Acondicionar el aula para grupos de 4 integrantes

Referencias

Duch, B. Groh, S.
2006 El Poder del Aprendizaje Basado en Problemas. Lima: PUCP

Lehmann, Ch.
1986 Geometría analítica. México DF: Editorial Limusa

Perero, Mariano
1994 Historia e Historias de Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Sobel, M. Lerner, N.
2006 Precálculo, sexta edición. México D. F.: Pearson Prentice Hall.

Stewart, J.
2006 Cálculo. Conceptos y contextos. Valencia: Editorial Thompson.

Anexo 1: Material para el alumno

Actividad cooperativa "Bruja de Agnesi"

Parte I: INDIVIDUAL **Tiempo: 15 minutos**

1) Halle la ecuación del lugar geométrico Ω de los puntos $Q=(x;y)$ del plano que equidistan de los puntos $Q=(x;y)$ y $Q=(x;y)$ ¿Es cierto que cualquier punto del LG es un triángulo isósceles?
2) Halle los puntos de intersección de las curvas Ω: $y=x^2$ y C: $Q(\frac{\ }{1+a^2};\frac{\ }{1+a^2})$.
3) Represente gráficamente las curvas y ubique los puntos de intersección.

Parte II: PAREJA 1 (2 puntos) **Tiempo: 50 minutos**

Sea C la circunferencia tangente al eje X en el origen O y tangente a la recta . El segmento OA de pendiente positiva, con A en la recta L, interseca a la circunferencia en el punto B. Halle la ecuación del lugar geométrico LG descrito por los puntos medios del segmento AB. Deje indicada la ecuación de LG.

Parte II: PAREJA 2 (2 puntos) **Tiempo: 50 minutos**

1) Halle el lugar geométrico Ω de los puntos $Q=(x;y)$ del plano cuya distancia a la recta L: $y=x^2$ es igual a la distancia al punto $Q=(x;y)$
2) Determine la ecuación del lugar geométrico C descrito por todos los puntos P(x; y) que equidistan del punto fijo (0; $\frac{a}{2}$), que es tangente a la recta $L_1: y=a$ e interseca en un solo punto al eje X.
3) Dada la circunferencia C: $L_1: y=a$ y $L_2: y=ax$, la parábola Ω: $y=x^2$ y las rectas $L_1: y=a$, $L_2: y=ax$.
   a) Halle los puntos de intersección de C con las rectas $(0,a)$ respectivamente.
   b) Halle el punto de intersección de la recta L_2 con C.
   c) Halle el punto de intersección de las rectas $(0,a)$.

Parte III: TRABAJO GRUPAL (2 puntos) **Tiempo: 50 minutos**

Una actividad deportiva de ciclismo recorre una determinada curva descrita sobre la colina de un cerro. La curva proyectada sobre un plano (ver figura 2) tiene las siguientes características:

- Es asintótica al eje *X*, a la derecha y a la izquierda; por tanto, solo la representaremos alrededor del origen.
- Alcanza su valor máximo justo al cruzar el eje *Y*, es decir, el punto $(0,a)$ está en la curva y es su valor máximo.
- Está determinada por un único parámetro{ .

Determine la ecuación del lugar geométrico cuando *a*=10. Para ello siga los siguientes pasos:

1. Trace una circunferencia, con centro en el punto $(0,\frac{a}{2})$ y radio *a*/2 .
2. Desde el origen de coordenadas, trace rectas que corten a la circunferencia en B y a la recta L:*y* en A.
3. El punto genérico P de la curva será aquel en que se crucen las rectas BP (horizontal) y AP (vertical) ver la figura 2.

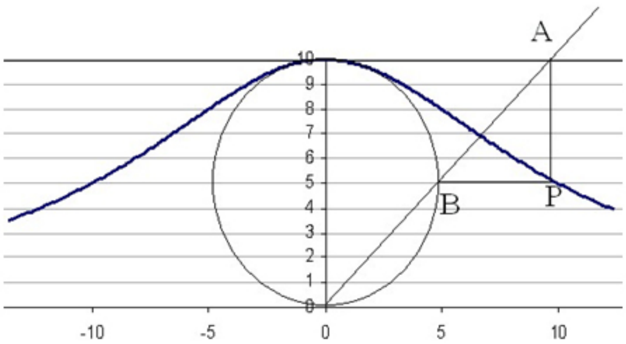


Figura 2

Anexo 2: Material para el profesor

Guía del profesor de la actividad "Bruja de Agnesi"

Parte I: INDIVIDUAL

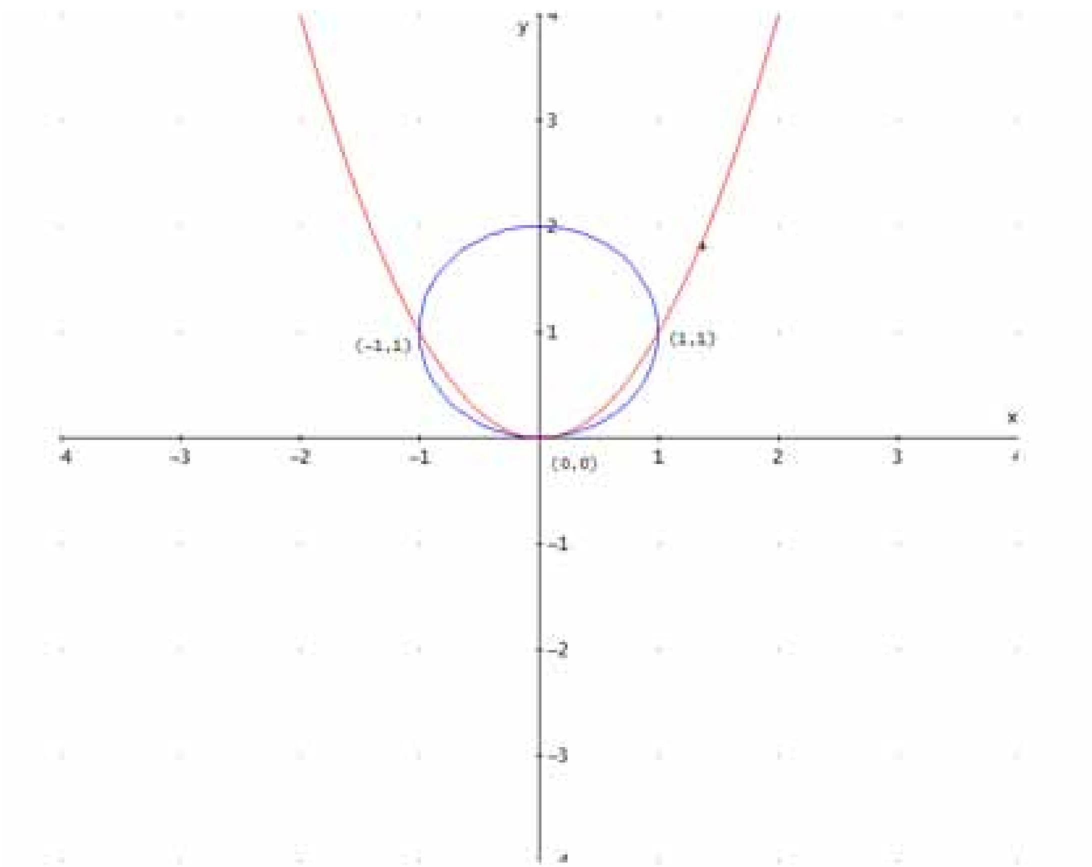
1. Halle la ecuación del lugar geométrico Ω de los puntos $Q=(x;y)$ del plano que equidistan de los puntos $Q=(x;y)$ y $Q=(x;y)$.
   ¿Es cierto que cualquier punto del L G forma con A y B triángulos isósceles?
2. Halle los puntos de intersección de las curvas Ω: $y=x^2$ y C: $Q(\frac{}{1+a^2};\frac{}{1+a^2})$
3. Represente gráficamente las curvas ubicando los puntos de intersección.

Solución

1. Sea P(x, y) un punto generador del lugar geométrico Ω: $d(P,A)=d(P,B)$.
Entonces $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}$
Desarrollando y simplificando, se obtiene: *y=-2x+8.*
El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, L: *y=-2x+8.*
Por propiedad de mediatriz, cualquier punto de L forma con A y B triángulos isósceles.
2. Sea P(x, y) el punto de intersección Ω: $y=x^2$ y C: $Q(\frac{}{1+a^2};\frac{}{1+a^2})$.
Las coordenadas de P se obtienen resolviendo el sistema : $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$

del que se obtienen los puntos comunes a ambas curvas (-1; 1), (0; 0) y (1; 1).

3. Gráficas de las curvas:



ISSN: 2221-8874 (En línea)

Parte II: PAREJA 1 (2 PUNTOS)

Sea C la circunferencia tangente al eje X en el origen O y tangente a la recta . El segmento OA de pendiente positiva, con A en la recta L, interseca a la circunferencia en el punto B. Halle la ecuación del lugar geométrico LG descrito por los puntos medios del segmento AB. Deje indicada la ecuación de LG.

Solución

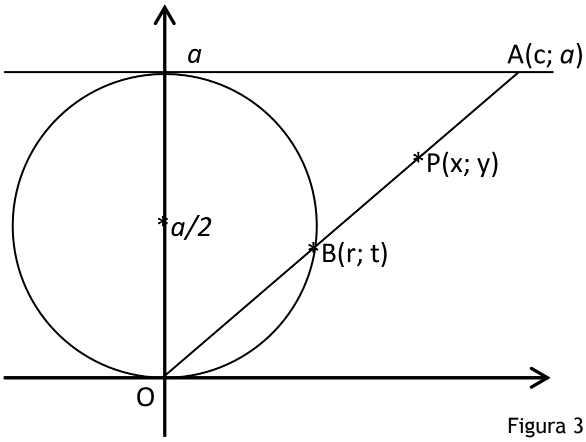


Figura 3

Sea $Q = (x; y)$ un punto genérico del lugar geométrico, P es punto medio de AB.
La ecuación de la circunferencia

$$(y+a)^2 = x^2 + (y-a)^2$$

Simplificando,

$r^2 = at - t^2$ (1)

Ahora, P es punto medio del segmento AB, entonces

$x = (r + c)/2$ $y = (t + a)/2$

$r = 2x - c$ $t = 2y - a$ (2)

Además, $a/c = y/x$ entonces $c = ax/y$

Reemplazando en (2) queda: $r = 2x - ax/y$, $t = 2y - a$

Estas ecuaciones en (1): $(2x - ax/y)2 = a(2y - a) - (2y - a)2$

Por lo tanto, la ecuación del lugar geométrico está dada por

LG: $(2x - ax/y)2 = 2(2y - a)(a - y)$.

Parte I: PAREJA 2 (2 PUNTOS)

1) Halle el lugar geométrico Ω de los puntos $Q = (x; y)$ del plano cuya distancia a la recta L: $y = -a$, $a > 0$ es igual a la distancia de P al punto $Q = (x; y)$.
2) Determine la ecuación el lugar geométrico C descrito por todos los puntos P(x; y) que equidistan del punto fijo (0; $\frac{a}{2}$), es tangente a la recta $L_1 : y = a$ e interseca en un solo punto al eje X.
3) Dada la circunferencia C: $L_1 : y = a$ y $L_2 : y = ax$, la parábola Ω: $(ax\ a)$ y las rectas

   $L_1 : y = a$, $L_2 : y = ax$

   a) Halle los puntos de intersección de C con las rectas L_2.
   b) Halle el punto de intersección de la recta L_2 con C.
   c) Halle el punto de intersección de Ω con C.

Solución

1) Sea $Q=(x;y)$ un punto genérico del lugar geométrico. Los puntos *Q*, *P*, y la recta se muestra en la figura 4 (para *a* =5/2)

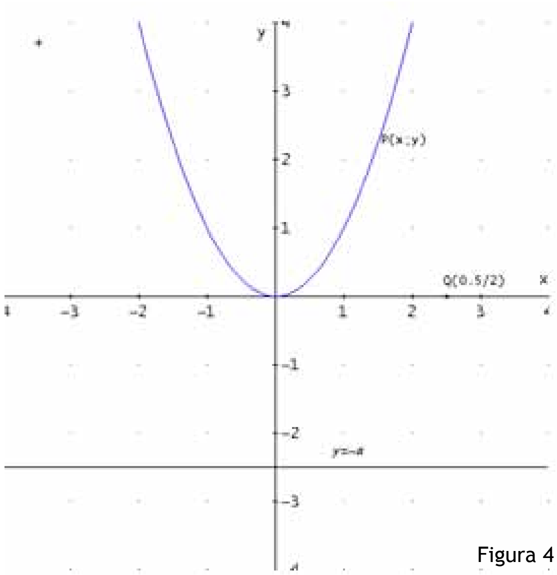


Figura 4

De la igualdad de distancias $d(P;L)=d(P;Q)$.

Por distancia de un punto a una recta $d(P;L)=|y+a|$.

Distancia entre dos puntos $d(P;Q)=\sqrt{x^2+(y-a)^2}$.

Reemplazando en $d(P;L)=d(P;Q)$ se tiene $(y+a)^2=x^2+(y-a)^2$.

Simplificando se obtiene la ecuación del lugar geométrico $\left(\mathrm{U}_{ay} a \right)$.

2) Sea $Q=(x;y)$ el punto genérico del lugar geométrico.

Por condición del problema $d(Q;C)=\frac{a}{2}$, entonces $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$.

3)

a)Sea P(x; y) el punto de intersección de C con la recta L_2 . Sus coordenadas se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} x^2+y^2-ay=0 \\ y=a \end{cases}$.

$x^2+a^2-a^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=a$. Luego, el punto es P= $(0,a)$.

b) Sea Q(x; y) el punto de intersección de C con la recta L_2 . Las coordenadas de Q se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} x^2+y^2-ay=0 \\ y=ax \end{cases}$

$$x^2+a^2x^2-a^2x=0 \Rightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{a^2}{1+a^2}.$$

Así, los puntos son Q =(0;0) o $Q(\frac{a^2}{1+a^2};\frac{a^2}{1+a^2})$.

c) Sea R(x; y) el punto de intersección de Ω y C.
Las coordenadas de R se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ 4ay = x^2 \end{cases}$

$4ay + y^2 - ay = 0 \Rightarrow y^2 + 3ay = 0$, entonces $y = 0 \vee y = -3a$.
Por tanto, el punto P=(0,0) .

Parte III: TRABAJO GRUPAL (2 puntos)

Una actividad deportiva de ciclismo recorre una determinada curva descrita sobre la colina de un cerro. La curva proyectada sobre un plano, ver figura, tiene las siguientes características:

1. Es asintótica al eje X, a la derecha y a la izquierda, por tanto, sólo la representaremos alrededor del origen.
2. Alcanza su valor máximo justo al cruzar el eje Y, es decir, el punto $(0, a)$ está en la curva y es su valor máximo.
3. Está determinada por un único parámetro *a*.

Determine la ecuación del lugar geométrico cuando *a*=10. Para ello, siga los siguientes pasos:

4. Trace una circunferencia, con centro en el punto $(0, \frac{a}{2})$ y radio $y = a$.
5. Desde el origen de coordenadas, trace rectas que corten a la circunferencia en B y a la recta L: $y = a$ en A.
6. El punto genérico P de la curva será aquel en que se crucen las rectas BP (horizontal) y AP (vertical) ver la figura 5.

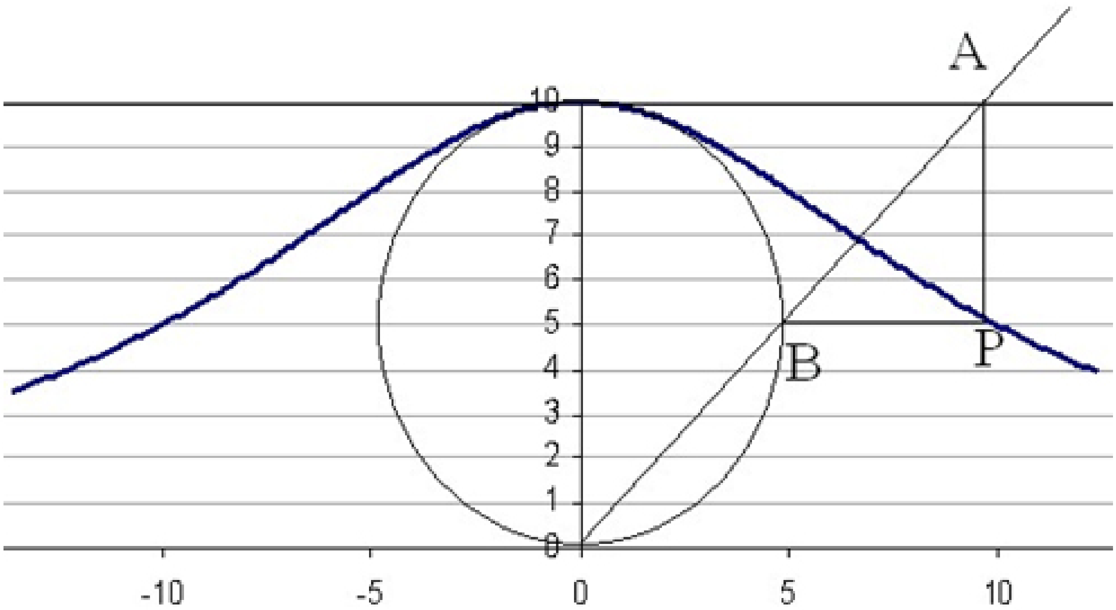


Figura 5

ISSN: 2221-8874 (En línea)

Solución

- Sea $Q=(x;y)$ un punto genérico del lugar geométrico.
- Trace una circunferencia, con centro en el punto $(0,\frac{a}{2})$ y radio $y=a$.

  La circunferencia $C: x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4} \Rightarrow C: x^2+y^2-ay=0.$

- Desde el origen, *(0, 0)*, trácense rectas que crucen con la recta y=*a* (recta OA en la figura, en la que *a*=10).
- El punto P de la bruja será aquel en que se crucen las rectas BP (horizontal que pasa por el corte entre OA y la circunferencia) y AP (vertical que pasa por el corte entre OA y la recta *y*=*a*).
- Considere el punto $B(r;y)$está en la recta y el punto $B(r;y)$ en la circunferencia, entonces satisface $C: r^2+y^2-ay=0.\cdots(1)$.
- Por semejanza de triángulos se tiene: $\frac{a}{x}=\frac{y}{r} \Rightarrow r=\frac{xy}{a}$ …(2)
- Sustituyendo (2) en (1): $C:\left(\frac{xy}{a}\right)^2+y^2-ay=0.\cdots(1)$ …(1)
- Simplificando: $1+a^2 \quad 1+a^2$ (pues la curva es asintótica al eje *X*).

  De donde $L.G.\ y=\frac{a^3}{x^2+a^2},\ a>0.$

Construcción del lugar geométrico de la actividad con animación en Cabri II

Para construir el lugar geométrico, se sigue los siguientes pasos en la ventana de Cabri II Plus:
Considere $a=10$.

1. Abra el sistema de coordenadas cartesianas.
2. Dibuje la circunferencia C de radio r=5 y centro (0, 5).
3. Con la opción "punto sobre objeto" ubicar el punto B sobre la circunferencia C, la que va a generar el lugar geométrico cuando B se desplace por C.
4. Recta L1 paralela al eje X, que pase por (0; 10).
5. Recta L2 que pasa por el origen y por B.
6. Sea A el punto de intersección entre L1 y L2. Desde A trace L3, perpendicular al eje X.
7. Recta L4 paralela al eje X que pase por B. Sea P el punto genérico, que resulta de la intersección de L3 con L4.
8. Segmento BP sobre la recta L4.
9. Con animación de B y traza de P se obtiene el lugar geométrico cuya ecuación es

$$y=\frac{1000}{x^2+100}$$

10. La gráfica se muestra a continuación (figura 6).

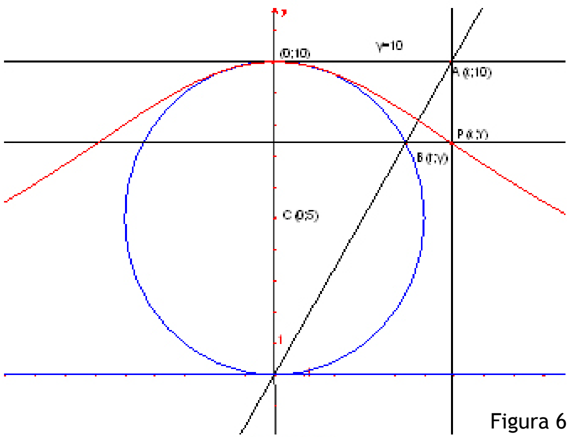


Figura 6