Reflexiones sobre la Didáctica de la Matemática

Cecilia Gaita Iparraguirre | cgaita@pucp.edu.pe

Resumen:

Se presenta una organización de distintas posturas frente a la definición de las Matemáticas, cómo se hacen y cómo se aprenden. Se establece una relación entre los modelos epistemológicos, los modelos docentes y los distintos momentos en el desarrollo de la educación matemática, hasta la consolidación de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica.

Palabras claves:

Didáctica de la matemática, didáctica fundamental, evolución de la educación matemática.

Introducción

Muchos matemáticos dedicamos la mayor parte de nuestro quehacer académico a la docencia universitaria:la formación que hemos recibido nos brinda las herramientas básicas para enseñar Matemáticas a diversos públicos. Sin embargo,también en la mayoría de los casos, asumimos que la conexión entre lo enseñado en un curso de Matemáticas y las aplicaciones propias de las distintas especialidades es una tarea que ya no nos compete,pues requiere de otros temas no matemáticos y porque además, este paso es trivial. Consideramos que contar con herramientas matemáticas y haber desarrollado un pensamiento matemático basado en el razonamiento lógico constituyen condiciones suficientes para que los estudiantes puedan establecer estos vínculos de manera autónoma.

Esta situación puede ser explicada porque los matemáticos desarrollamos nuestra práctica docente influidos por nuestra propia experiencia como alumnos y por la manera como concebimos nuestra disciplina. Y pese a que este debe ser un tema de reflexión, pues nuestra postura respecto a las Matemáticas se relacionará directamente con la forma en que las enseñemos, pocas veces nos planteamos preguntas relacionadas con lo que entendemos por Matemáticas o con la forma en la que se hace Matemáticas.Existen trabajos relevantes en la historia de la matemática, desarrollados por matemáticos que cuestionan la naturaleza de esta disciplina y que adoptan distintas posturas al respecto.

Por otro lado, durante la evolución de la Educación Matemática,los focos de atención han ido cambiando, lo que ha hechoposible asociar cada etapa de este desarrollo a los distintos modelos epistemológicos y docentes sobre la Matemática, descritos por Gascón (2001).

Como veremos luego, en la etapa en la que se encuentra actualmente la Educación Matemática, se puede distinguir a una comunidad de investigadores que centran su atención en la disciplinay en sus particularidades. Ellos están construyendo una disciplina científica, a la que se denomina Didáctica de la Matemática, que tiene sus bases en un modelo epistemológico constructivista matemático.

Modelo epistemológicos y modelos docentes

Empezaremos por describir los modelos epistemológicos y docentes que permiten entender las distintas formas en la que el conocimiento matemático es organizado con la finalidad de ser enseñado. Veremos que estos modelos se asocian directamente con el papel que distintas posturas asignan a la resolución de problemas en la actividad matemática.
La primera postura corresponde a una perspectiva epistemológica euclídea, que concibe a la Matemática como una disciplina acabada y cuyo objetivo al momento de la enseñanza es mostrar teorías cristalizadas

(Gascón, 2001). Desde esta perspectiva, la resolución de problemas es considerada una actividad secundaria dentro de un proceso de enseñanza,y suele encontrarse solo cuando se ejemplifican determinados resultados o cuando es reducida a la aplicación de técnicas matemáticas. En estos dos casos, los modelos docentes que se generan son distintos: en el primero, se trata de un modelo docente teoricista; en el segundo, de un modelo docente tecnicista. A pesar de sus diferencias, ambos tienen como raíz un modelo epistemológico euclídeo.

Una clara muestra de un modelo educativo teoricistafue el periodo comprendido entre los años sesenta y setenta al que se denominó Matemática Moderna.Ante el evidente fracaso de esta experiencia, en la comunidad matemática, surgieron voces que proponían un cambio; es así como Lakatos (1978) plantea que, en realidad, la aceptación de una teoría matemática no es que los axiomas sobre los que esta se basa sean incuestionablemente verdaderos, sino más bien el hecho de que la teoría permita deducir resultados que se consideren fundamentales.

Estaconcepción epistemológica sobre las matemáticas desarrollada por Lakatos se denomina cuasi empíricayplantea, básicamente,que una teoría matemática surge como producto de la exploración y del querer extender resultados. En ese sentido, señala Gascón (2001), se plantea la destrivialización del conocimiento matemático, que implica dar un lugar esencial al momento exploratorio en el quehacer matemático, lo que, a su vez, lleva a centrar la atención en los problemas.

Por su parte, el modelo epistemológico cuasi empírico contempla dos modelos docentes: el modernismo y el procedimentalismo. Ambos centran su atención en la actividad de resolución de problemas como parte del primer encuentro que debe tener el estudiante con la matemática. La diferencia radica en que en el segundo modelo, además, se plantea que debe existir un momento posterior en el que se reflexione sobre el proceso aplicadopara resolver el problema.

Sin embargo, el hecho de que el modelo epistemológico cuasi empírico tuvierarepresentantes que discrepaban en distintos aspectos cuando se trata de describir los mecanismos del desarrollo científico dio pie para que Piaget y García (1982) desarrollaran un nuevo modelo:la epistemología constructivista. A diferencia del cuasi empirismo que trata de interpretar racionalmente el desarrollo de la ciencia, el constructivismo plantea que, para abordar el problema epistemológico, es imprescindible utilizar como base empírica dos aspectos: los hechos que proporciona la historia de la ciencia y el desarrollo psicogenético, ya que estos se encuentran íntimamente relacionados. Así, en el caso particular de las Matemáticas, losprocesos que permiten explicar cómo se construyen los conocimientos matemáticos son la abstracción reflexiva y la generalización completiva. El primer instrumento permite la construcción progresiva de entidades matemáticas y el segundo corresponde al proceso en el que una estructura se enriquece con nuevos subsistemas.

Asociado con el modelo epistemológico constructivista, hay distintos modelos docentes, entre los cuales figura el modelo constructivista psicológico. Este brinda especial importancia a la actividad de resolución de problemas como génesis del conocimiento y asume que la construcción de los conocimientos matemáticos se lleva a cabo mediante un proceso estrictamente psicológico.Desde este punto de vista, la dificultad de una tarea matemática no está en las propias matemáticas, sino que dependerá de la complejidad de las construcciones mentales que dicha tarea exigeal estudiante (Gascón, 2002)

Este punto de vista permitirá comprender algunos fenómenos, como el hecho de que algunos alumnos de un determinado grado sean capaces de realizar actividades específicas, mientras que otros alumnos del mismo grado puedan completarademás otras que indican niveles de adquisición mayores para un mismo concepto. La explicación se basará en las construcciones mentales que los individuos han realizado. Y estos resultados podrán guiar el diseño del proceso de instrucción.

Cabe resaltar que, en un modelo constructivista psicológico, el conocimiento matemático y su organización no son cuestionados. Tal como señala Gascón (2003), hay fenómenos como la algebrización del cálculo diferencial y la presentación del álgebra escolar como una aritmética generalizada que son transparentes, en el sentido de que no se cuestionan, desde la perspectiva constructivista psicológica.
De esta manera, se plantea un modelo docente constructivista que sí sitúa el foco de atención en las Matemáticas; a dicho modelo se le denomina constructivista matemático.

Evolución de la Educación Matemática

Por otro lado, en los últimos cincuenta años, la comunidad de educadores matemáticos ha sido testigo, y también responsable, de cambios radicales durante la evolución de esta disciplina. Como veremos a continuación, la modificación de posturas epistemológicas y docentes ha tenido una clara influencia en los focos de atención, las metodologías y los enfoques teóricos que han permitido que la Educación Matemática evolucione.

Los autores de la escuela de la didáctica francesa, tal como señalan Ruiz, Chavarría y Alpízar (2004), plantean que existen tres etapas en el desarrollo de la Educación Matemática.

Una primera forma de entender la enseñanza de las matemáticas es como si esta fuera un arte, donde el único requisito que debe cumplir un profesor es dominar el tema que debe enseñar, además de poseer dones innatos que le permitan transmitir conocimientos a sus estudiantes. Según lo visto anteriormente, un modelo docente teoricista o tecnicista encajaría perfectamente con esta concepción de la Educación Matemática ya que solo se requiere que el docente sea capaz de mostrar de manera organizada el conocimiento matemático.

Un ejemplo de lo que podría ocurrir en una clase donde se mantiene un modelo docente con rasgos teoricistay tecnicistapodría ser el siguiente: Al empezar un curso de cálculo diferencial, se define el límite de una función en un punto empleando la notación épsilon-delta, como se indica en la figura 1.

Dada una función f:I⊂R→R, definida en un intervalo I=]a; b[, excepto quizás en$c$, a<c<b, se define el límite de f en el punto c como el número L si, y solo si, se cumple que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \; tal\ que\ si\ 0 < |x-c| < \delta \rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \quad (*)$$

Lo que se denota de la forma: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

Figura 1. Primer ejemplo

Esto se hace sin una problematización previa que justifique la necesidad de estudiar el comportamiento de una función en la vecindad de un punto, más allá de lo que ocurra en el punto específico. Es decir, no se enfatiza en que el límite de la función en c es el valor (si existe) al que se aproxima la función cuando x se aproxima a c.

Luego, se solicita a los estudiantes que realicen demostraciones de límites de funciones elementales expresando el valor de delta en términos de épsilon, procedimiento que se convierte en una técnica. A manera de ejemplo, se presentan las siguientes tareas en la figura 2.

Demuestre que:

$$\lim_{x\to 0}(x^2-3) = -3 \qquad\qquad \lim_{x\to 1}(x+4) = 5$$

Figura 2. Los problemas como aplicaciones de técnicas

En ambos casos, bastará desarrollar la expresión (*) y observar que para la primera demostración solo se requiere tomar δ=ε, mientras que en la segunda, conviene tomar δ=√ε. Así, se identifica una técnica para este tipo de problemas.

Retomando la postura teoricista, en esta clase donde el tema a enseñar es límites de funciones, luego se demuestran resultados para el cálculo de límites de operaciones aritméticas de funciones. Posteriormente se plantean una serie de problemas donde se requiere aplicar estos resultados, lo que nuevamente lleva a aplicar una técnica.

Una observación sobre esta forma de introducir el concepto básico del cálculo diferencial sería que esta se hace sin que se ponga especial énfasis en las distintas representaciones del concepto de límite que intervienen cuando se trabaja este tema. En particular, notemos que en la explicación brindada solo se hace presente un registro, el simbólico, y se dejade lado el registro gráfico e incluso el numérico al que pudo recurrirse en un primer momento exploratorio. Con esta reflexión, concluimos el primer ejemplo.
Continuando con el desarrollo de la Educación Matemática, en una segundaetapa, estarecurre a explicaciones que pueden brindarle otras disciplinas, especialmente la Psicología, para entender asuntos relacionados con la motivación, los conocimientos previos, las técnicas de resolución de problemas y la evaluación, que son algunas de las problemáticas a las que se enfrenta un profesor cuando enseña Matemáticas. Así, se desarrollan distintas posturas; por ejemplo,posturas que colocan su foco de atención en la resolución de problemas y proponen metodologías activas para su enseñanza y otras que centran su atención en la manera como el conocimiento previo del estudiante y el nuevo conocimiento se relacionan. La característica central de todas estas posturas es que las explicaciones que se dan se basan fundamentalmente en resultados de la Pedagogía o de la Psicología, por lo que no dependen directamente del objeto matemático de estudio.

Así, en esta segunda etapa del desarrollo de la Educación Matemática, denominada etapa clásica, predominan concepciones docentes como las que propone el modelo cuasiempírico, cuando el foco de atención es el momento exploratorio oel modelo constructivista psicológico, cuando se plantea relacionar el momento exploratorio y el momento tecnológico-teórico, (Chevallard, Bosh y Gascón, 1997).

Un ejemplo en donde se puede notar el efecto de una concepción como la descrita podría ser una clase de cálculo diferencial en donde, teniendo como finalidad introducir la noción de límite, se plantee como tarea el estudio de la función $f(x)=1/x$, cuando x se encuentra próximo a 0.

Se propone hacerlo, inicialmente, a través de valores de x cada vez más próximos a cero, como se muestra en la figura 3.

x	$f(x)=\frac{1}{x}$	X	$f(x)=\frac{1}{x}$
1	1	-1	-1
0,1	10	-0,1	-10
0,001	1000	-0,001	-1000
0,0001	10000	-0,0001	-10000
0,00001	100000	-0,00001	-100000

Figura 3. Segundo ejemplo

Encontramos que, cuando los valores se aproximan a cero por la izquierda, el valor de la función crece, mientras que si se aproximan por la derecha, el valor de la función decrece. Este sería un primer encuentro del estudiante con el problema en el que se familiarizaría con la pregunta e intentaría dar una respuesta partir de la *exploración*.

Adicionalmente, los puntos determinados pueden ubicarse en un plano de coordenadas rectangulares y trazar una curva que los una, con lo que se obtienela gráfica de la función $f(x)=1/x$, como se muestra en el siguiente esbozo, figura 4.

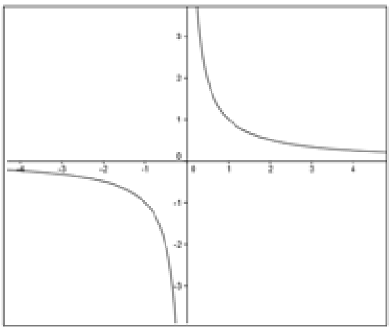

Figura 4. Gráfica de la función *f(x)=1/x*

Con ayuda de estas representaciones, se puede explicar el comportamiento de la función en una vecindad centrada en cero y,en este caso, se dirá que el límite no existe. Luego, se puede dar paso a la presentación de una técnicaque permita calcular el límite, en los casos en los que exista, con una justificación que se apoyará en conceptos formales pero también en la experimentación.

Si, adicionalmente, el profesor toma en cuenta que el manejo de la técnica no garantiza la comprensión del concepto de límite y que se requieren de tareas diferentes, no rutinarias, para identificar el nivel de comprensión respecto al concepto delímite en el que se encuentra un determinado estudiante, estaríamos ante una postura constructivista psicológica. Distintos trabajos (Tall y Vinner (1981), Cornu (1991), Coltrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic (1996), entre otros) dan cuenta de la complejidad cognitiva que presentan distintas tareas asociadas con la noción de límite.

Sin embargo, una observación sobre esta forma de presentar este concepto básico del cálculo diferencial es que esto se sigue haciendo sin que exista una problematización previa que justifique la introducción del concepto de límite.

Y justamente, el reconocer que la Matemática como disciplina tiene particularidades que no se pueden comprender desde la perspectiva de otras disciplinas, es el punto de partida de una nueva etapa en la evolución de la Educación Matemática.

Así, un grupo de matemáticos interesados en comprender el proceso de enseñar y aprender matemáticas plantearon que era necesario estudiar los fenómenos didácticos-matemáticos, es decir, aquellos que dependen de las características específicas de la organización matemática institucionalizada y del contrato didáctico institucional vigente (Brousseau, 1997). Esto hace que el estudio de los fenómenos didácticos se haga a partir de la modelización explícita del saber matemático enseñado. Así, se define un nuevo campo del conocimiento, la Didáctica de la Matemática, entendida como la didáctica fundamental.

Es en ese momento que se constituye la tercera etapa en el desarrollo de la Educación Matemática.Y es así como se propone distinguir dentro de la Educación Matemática un campo del conocimiento dedicado al estudio de la génesis, el desarrollo, la utilización, y la difusión personal e institucional del saber matemático (Chevallard, 1991, citado en Gascón, 2001).

Son varios los grupos de investigación que comparten estas raíces; algunos de ellos se basan en la Teoría de Situaciones Didácticas, cuyo foco de atención es construir situaciones para las que el conocimiento matemático que se quiere que el estudiante aprenda representa el camino óptimo de solución. Otros han ampliado la problemática y han otorgado especial atención a la organización matemática de un tema y a la organización didáctica del mismo, para lo cual han introducido el término praxeología para denotar las tareas, técnicas, tecnologías y teorías; este grupo desarrolla la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Esaquí donde se encuentra actualmente la Educación Matemática, y es en ese contexto en el que tiene lugar el surgimiento de la Didáctica de la Matemática, como disciplina científica. Esta corresponde también a un modelo epistemológico constructivista pero que tiene asociado un modelo docente constructivista matemático.

Como se ha mencionado, es el carácter científico que se le atribuye a la Didáctica de la Matemática lo que la distingue de la Educación Matemática. Así, la Didáctica de la Matemática plantea que, una vez que se identifique un problema, este puede ser estudiado apoyándose en unos principios definidos previamente, siguiendo un método de investigación y encontrando resultados que pueden ser explicados por el conjunto de supuestos adoptados inicialmente.

Y una segunda característica que le otorga la categoría de científica es que la Didáctica de la Matemática posee lacapacidad de predecir; razón por la cual, por ejemplo, la Teoría de Situaciones Didácticas contempla una fase de análisis a priori en donde se pueden prever los comportamientos de los estudiantes ante una determinada situación problema; por ello, también se dice que adopta una postura positivista.

Reflexión final

Cuando los matemáticos enseñamos, tenemos la misión de reorganizar y adaptar los saberes matemáticos para su aprendizaje. Y desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática, esto requiere de una reflexión sobre nuestra propia práctica, la que debe hacerse a través de la investigación. Y de esta manera, es que la problemática didáctica se matematizará.

Desde esta perspectiva, la postura que se adopta cuando se piensa que solo sabiendo matemáticas se pueden proponer cambios y garantizar mejoras en los aprendizajes, resulta fuera de época. Debemos reconocer la importancia del surgimiento de un nuevo campo del conocimiento, la Didáctica de la Matemática, y la necesidad de conocerlo y aportar a él. Es mucho lo que se ha avanzado, pero queda todavía mucho por hacer.

Referencias Bibliográficas

BROUSSEAU, G.
1997 *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N.Balachef, M. Cooper, R. Shuterland and V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. Y GASCÓN, J.
1997 *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE:Horsori. Barcelona.

COLTRILL, J.,DUBINSKY, E., NICHOLS, D., SCHWINGENDORF, K., THOMAS, K. Y VIDAKOVIC, D.
1996 "Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema", *The Journal for Mathematical Behavior,* vol. 15, pp. 167-192.

CORNU, B.
1991 Limits. En Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking*.Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

GASCÓN, J.
2003 From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *FortheLearning of Mathematics*, 23/2, 44-55.
2002 El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* Vol. 5, N° 3, págs. 673-702.
2001 Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Relime, 4/2, 129-160.

LAKATOS, I.
1981 *Matemáticas, ciencia y epistemología*.Alianza: Madrid. Piaget, J. y García, R.
1982 *Psicogenésis e historia de la ciencia,* Siglo XXI (4ª. Edición). México, DF.

RUIZ, A., CHAVARRÍA, J. Y ALPÍZAR, M.
2003 Epistemología y construcción de una nueva disciplina científica: la Didactique des mathématiques. Revista *UNICIENCIA*, Vol. 20, Número 2, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

TALL, D Y VINNER, S.
1981 Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2).151-169.