LEXIS. Vol. XII. Nº 1. 1988

VERDAD O REFERENCIA

Consecuencias Semánticas del Lema A de Tarski

Mario Montalbetti y Oscar Trelles

Pontificia Universidad Católica del Perú

Trataremos de mostrar dos resultados paradójicos en la teoría semántica. El primero contradice la esperanza que abrigamos "naturalmente" de que una oración verdadera tenga un sólido asidero en la realidad; es decir, que los referentes de sus términos estén unívocamente fijados cuando sabemos que ella es verdadera. Se trata del teorema de Putnam[1]. El segundo, es que una oración abierta verdadera, contrariamente a lo esperado, sí fija su referente. El resultado se deriva del Lema A de Alfred Tarski[2].

En el presente trabajo no presentaremos las demostraciones ni los detalles técnicos que sustentan los resultados de Putnam y Tarski (remitimos al lector a las obras citadas en las referencias). Más bien, queremos ofrecer una versión didáctica de los mismos, y señalar a continuación algunas consecuencias semánticas para el análisis de los lenguajes naturales.

El teorema de Putnam dice a la letra: "Sea L un lenguaje con predicados $F_1, F_2, \ldots, F_k$ (no necesariamente monádicos. Sea I una interpretación,

---

1. Apéndice de: Putnam, Hillary. *Reason, Truth and History*. New York, Cambridge University Press, 1981.

2. p. 200 de: Tarski, Alfred. "Le Concept de Vérité dans les Langages Formalisés" en Tarski, Alfred. *Logique, Sémantique, Métamathématique. 1923-1944.* (Trad. revisada por el autor), París, Armand Colin, 1972.

en el sentido de que asigna una extensión a cada predicado de L. Entonces, si I es no-trivial, en el sentido de que al menos un predicado tiene una extensión que no es ni vacía ni universal en al menos un mundo posible, existe una segunda interpretación J distinta de I, pero que hace verdaderas las mismas oraciones que I hace verdaderas en todo mundo posible".

Una forma de presentar este teorema es empleando un lenguaje artificial muy sencillo que pasamos a construir. El lenguaje consta de nombres propios, variables, predicados o propiedades y la estructura lógica mínima: funciones de verdad (conectores proposicionales) y cuantificadores; adicionalmente requiere de signos de puntuación para hacerlo unívoco.

1) Nombres propios: 'a', 'b', 'c' (sólo tres).

2) Variables individuales: 'x' e 'y' (sólo dos).

3) Predicados o nombres de propiedades: 'F', 'G', 'H' (sólo tres).

4) Conectores proposicionales: '–', '·', 'v', '⇒', '⇔' (Negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional).

5) Cuantificadores: '(_)' y '(E _)' (Universal y existencial).

6) Signos de puntuación: paréntesis y corchetes en su empleo usual.

Las expresiones de nuestro lenguaje pueden ser gramaticales o agramaticales, es decir, estar bien o mal construidas. Están bien construidas (son gramaticales):

1) Cualquier predicado seguido por una única variable o nombre propio. Ej. 'Fx', 'Fy', 'Ha'.

2) Toda expresión gramatical antecedida por un cuantificador. Ej. '(x) Fx', '(E y) Hy'.

3) Toda expresión gramatical negada. Ej. '– (y) Gy', '–Fa'.

4) Dos expresiones gramaticales cualesquiera unidas por una conjunción, disyunción, condicional o bicondicional. Ej. 'Fb · (y) Gy', 'Fx ⇒ Gx'.

5) Sólo se consideran expresiones gramaticales las descritas anteriormente (1–4).

Asumiremos igualmente la existencia de un mundo formado por sólo tres objetos: $*$, o, #

La simplicidad del lenguaje y del universo escogido se debe exclusivamente a un afán de claridad en la exposición; las conclusiones son las mismas para mundos y lenguajes más complicados.

Definamos ahora una relación (interpretación I1) entre nuestro lenguaje y la realidad que nos permita encontrar expresiones verdaderas. Primero, nuestros nombres propios designarán unívocamente objetos del mundo:

I1 $\quad a \dashrightarrow *$

$b \dashrightarrow o$

$c \dashrightarrow \#$

Los predicados son nombres de las siguientes propiedades, definidas a partir de los objetos que las poseen:

$F \dashrightarrow \{*, o\}$

$G \dashrightarrow \{o\}$

$H \dashrightarrow \{o, \#\}$

Así, por ejemplo, 'Fa' se lee: a es F (i.e., a tiene la propiedad F); '(x)' (Gx ⇒ Fx)' como 'todo lo que es G es F'; '(Ǝ y)(Gy·Hy)' como 'Algún G es H'.

A continuación presentamos dos expresiones del lenguaje verdaderas:

Fa

(x) (Gx ⇒ Fx)

mientras que, por ejemplo, '(x)(Fx ⇒ Gx)' es falsa.

Usualmente esperamos que el referente de una expresión quede fijado, una vez que conocemos el valor de verdad de la oración en la que ocurre. Es decir, asumimos que si una teoría es verdadera, y lo sabemos, basta ese conocimiento para entender de qué habla la teoría. Lo que el Teorema de Putnam demuestras es que esto no es así.

Supongamos ahora que la relación entre nuestro lenguaje y el mundo es otra (la interpretación I2):

$$
\begin{array}{llll}
\text{I2} & a & \dashrightarrow & o \\
 & b & \dashrightarrow & \# \\
 & c & \dashrightarrow & * \\
\text{y que} & F & \dashrightarrow & \{o, \#\} \\
 & G & \dashrightarrow & \{\#\} \\
 & H & \dashrightarrow & \{\#, *\}
\end{array}
$$

entonces, podemos comprobar que se conservan los valores de verdad de las oraciones consideradas anteriormente, aunque, sin embargo, ya no dicen lo mismo. Consideremos, por ejemplo,

Fa

Bajo la interpretación I1, dicha expresión trataba del objeto *, mientras que ahora (bajo I2) la misma expresión trata del objeto o. Nótese, sin embargo, que 'Fa' es verdadera bajo ambas interpretaciones, aunque refiere a objetos distintos. La respuesta a la pregunta ¿de qué habla una oración verdadera? queda así indeterminada.

Pasemos ahora a considerar el Lema A de Tarski: "Si la secuencia f satisface la función proposicional x y si la secuencia infinita de clase g cumple la condición siguiente: para toda k, si v_k es una variable libre en la función x, entonces $f_k = g_k$, entonces la secuencia g satisface igualmente la función x.". Hunter[3] ha reformulado este Lema en el teorema 40.12 de su Meta-

3. p. 179 de: Hunter, Geoffrey. *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden.* Madrid, Paraninfo, 1981.

lógica, de la siguiente manera: "Sea I una interpretación con dominio D. Sea A una fbf cualquiera. Sean s y s' dos secuencias tales que, para cada variable libre v en A, si v es la k–ésima variable de la enumeración fijada de las variables, entonces s y s' tienen para sus k–ésimos términos el mismo elemento de D. Entonces s satisface A sii s' satisface A.".

La idea central que queremos rescatar para nuestros objetivos es que aparentemente son sólo las expresiones que contienen variables libres las expresiones verdaderamente referenciales en un lenguaje. Ya hemos visto que según Putnam una expresión como 'Fa' (donde 'a' es un nombre propio) deja indeterminada su referencia. También se sigue del teorema de Putnam que expresiones con variables ligadas como '(x)(Fx $\Rightarrow$ Gx)' corren la misma suerte. Lo que el Lema A sostiene es que una expresión como 'Fx' (donde x es una variable no ligada por ningún cuantificador, es decir es una variable libre) si es verdadera, entonces requiere de un referente unívoco para x.

Podemos preguntarnos ahora ¿cómo es que refieren las variables libres? Para relacionar las variables libres con objetos en el mundo es necesario: (a) considerar un orden en las variables. Nosotros asumiremos que 'x' es primera e 'y' segunda; (b) considerar secuencias de objetos, por ejemplo:

s1 : $\langle$ o, # $\rangle$ (Primero se presenta o y luego #)

s2 : $\langle$ #, o $\rangle$ (Primero # y luego o, distinto al anterior)

s3 : $\langle$ #, *, o $\rangle$ (Primero #, segundo * y último o).

Así, 'Gx' según I1 y s1 es verdadera, porque a la primera variable se le asigna el primer objeto de la secuencia, a la segunda variable (que no aparece en la expresión considerada) el segundo objeto. Pero, 'Gx' según I1 y s2 es falso. Lo que nos dice el Lema de Tarski es que 'Gx' es verdadero para toda secuencia con la estructura:

$\langle$ o,... $\rangle$

En cambio, en I2 cambia su valor de verdad. Por lo tanto, para asumir la verdad de una oración abierta necesitamos fijar su referente y no podemos pretender modificar su referente y conservar su valor de verdad para cualquier alteración.

¿Cómo extender estos resultados al análisis de lenguajes naturales? En un sistema generativo, como el que se encuentra en Chomsky[4], existe paradójicamente una prohibición expresa en contra de la existencia de variables libres en los lenguajes naturales. Típicamente toda traza debe estar ligada. Asimismo el siguiente ejemplo resulta grotesco si la 'x' es considerada una variable libre:

Juan besó a x

La oración es agramatical, puesto que contiene una variable no ligada. Si ligamos la variable la oración se vuelve gramatical:

Juan besó a todas

cuya forma lógica es:

[Para toda x] [Juan besó a x]

Pero si esto es así, es decir, si no existen variables libres en los lenguajes naturales, entonces estos no refieren. Creemos sin embargo que existe un conjunto en todo lenguaje natural compuesto por expresiones que funcionan desde el punto de vista referencial como variables libres y que permiten "anclar" un lenguaje natural en la realidad: el conjunto formado, por lo menos, por los pronombres y también por ciertas expresiones deícticas del tipo 'aquí', 'ahora', etc.

Consideremos a modo de ilustración una oración como 'El fue al cine'. Si nuestra asunción del párrafo anterior es correcta, dicha oración contiene una variable libre, y su forma lógica sería 'x fue al cine'. Ahora bien, si la oración es verdadera entonces no sólo la variable libre debe tener un referente, sino que éste debe estar unívocamente fijado. En cambio una oración como 'Juan fue al cine', si es verdadera, no necesariamente fija unívocamente la referencia de 'Juan' (tal como quedó demostrado en el teorema de Putnam).

Si alguna ontología se deriva de todo esto, ser sería entonces, parafraseando a Quine, ser el valor de una variable libre.

Lima, 12 de Diciembre de 1987.

---

4. Chomsky, Noam. *Lectures on Government and Binding*. Dordrecht, Foris, 1981.