

SEÑALES Y ONDALETES

UNA INTRODUCCION

Alejandro Ortiz Fernández*

En esta exposición damos algunas ideas sobre la evolución de las ondaletes, una nueva teoría surgida en la clásica teoría de Fourier así como en la matemática aplicada (tratamiento de las señales e imágenes). Sus aplicaciones en delicadas áreas del análisis (ecuaciones en derivadas parciales, análisis no-lineal, ...), así como en diversos sectores de la tecnología contemporánea y de la física teórica, hacen de tal teoría un campo estimulante para su estudio en nuestro medio.

* Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) Dpto. de Ciencias, Sec. Matemática.

C O N T E N I D O

INTRODUCCION Y MOTIVACIONES

SEÑALES. Breve Introducción

LAS VENTANAS RESBALADIZAS

FOURIER - GABOR

ONDALETES: Caminos que conducen a la teoría

Teoría de Fourier

Bases de Haar

El Movimiento Browniano

Teoría de Littlewood - Paley

El Sistema de Franklin

Lusin, Espacios $H^p(\mathbb{R})$ y Ondaletes

Descomposición Atómica. Identidad de Calderón

Strömberg. La Primera Base de Ondaletes

El Tratamiento de la Señal

ANALISIS MULTIRESOLUCION DE $L^2(\mathbb{R})$ Y BASES DE
ONDALETES

YVES MEYER, su Contribución a las Ondaletes

COMENTARIOS FINALES

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION Y MOTIVACIONES *

Una nueva teoría ha surgido recientemente, pero sus raíces se encuentran en diversos caminos, tanto del análisis clásico como de la matemática aplicada. Se trata de la teoría de ondaletes. Por el lado del análisis tenemos que remontarnos a Fourier (1807) y a su celebrada teoría del uso de las series trigonométricas en el tratamiento de problemas de la conducción del calor. Tratando de clarificar algunas dificultades del análisis de Fourier, A. Haar (1909) construye una base de "átomos" para representar funciones continuas sobre $[0,1]$; esta contribución ha de conducir a las ondaletes. La teoría tiene también su motivación en diferentes trabajos realizados alrededor de los años 30's, como son los aportes de Littlewood-Paley en relación a la distribución de la energía en $[0,2\pi]$ de funciones en L^p , $1 < p < \infty$; definen los llamados "bloques diádicos". Por aquellos años la teoría de los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, son estudiados con el uso de la variable compleja; en esta dirección la función área de Lusin ha de ser fundamental en el proceso de **análisis** y **síntesis** de funciones de $H^p(\mathbb{R})$. Otras contribuciones que condujeron a las ondaletes son debidos a Ph. Franklin (1927) siendo profesor en el Instituto Tecnológico de Massachusetts ("M.I.T.").

Mas recientemente, de 1960 a 1980, analistas armónicos percibieron la posibilidad de construirse elementos, los mas simples posibles, de un espacio funcional y que funcionasen como "bases". Tales elementos, llamados átomos, servirían para analizar funciones de espacios de funciones (como $C^m, L^p, H^p, \Lambda_\alpha, \dots$).

* [Me], Y. Meyer, es la referencia fundamental en la evolución de las ondaletes.

La teoría debe ser capaz de reconstruir todos los elementos del espacio, es decir, se debe conocer las reglas del ensamblaje. Estas ideas fueron introducidas por G. Weiss y R. Coifman a inicios de los años 60's pero ya Marcinkiewics en 1938 había considerado descomposiciones "atómicas" de elementos de $L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$; por otro lado, en la teoría de Calderón-Zygmund sobre los operadores integrales singulares la idea de átomo está latente.

Asimismo, a inicios de los años 60's, A.P. Calderón estudiando problemas de interpolación introduce una famosa identidad que consiste en una descomposición de la identidad de cierto espacio de funciones. Un hecho anecdótico fue que 20 años después, el geofísico Jean Morlet y el físico A. Grossmann estudiando problemas de señales en reflexión - sísmica (un método de investigación del petróleo) redescubrieron la identidad de Calderón. Como nos convenceremos posteriormente, existe una interesante y profunda relación entre el análisis armónico, en su contexto más analítico, con ciertas áreas de la matemática pura y la aplicada, así como con la física e ingeniería; así se relaciona con la teoría del tratamiento de señales e imágenes, con las ecuaciones en derivadas parciales, con el estudio de objetos fractales, ... y hasta con la cosmología.

Debemos a J.O. Strömberg la construcción de la primera base ortonormal de Ondales a inicios de los años 80's, lo que hizo en relación a sus estudios del espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R})$. Esta contribución, y las citadas anteriormente (entre otras) permitieron realizar las primeras síntesis de la teoría, la que fue estimulada y fortalecida por trabajos que venían de la matemática aplicada, en especial del tratamiento de las señales en investigaciones de la geofísica, como veremos luego.

Yves Meyer, un analista francés, es uno de los más entusiastas matemáticos en desarrollar la teoría de ondaletes, de formar Escuela y de divulgar la importancia de las ondaletes, tanto al interno de la matemática pura, como en las aplicaciones en diferentes áreas de la matemática aplicada [Me]. En 1985, Meyer construye una base ortonormal de Ondaletes, la que es más amplia que la de Strömberg que es un tanto limitada a cierto tipo de funciones. En efecto, ejemplos particulares de la base de Meyer son las construidas por Haar y por Strömberg; así aparecen las llamadas bases hilbertianas de $L^2(\mathbb{R})$, y que son aplicables a diversos espacios de funciones. En esta dirección tenemos los trabajos de P.G. Lemarié, G. Battle, P. Tchamitchian.

Un paso decisivo en la teoría de las ondaletes fue logrado por Stéphane Mallat en 1987 [Ma] al proponer un rápido algoritmo para calcular los coeficientes de las ondaletes; a propósito, estos coeficientes juegan un análogo papel que los coeficientes de Fourier cuando uno representa una función por su serie de Fourier. Es oportuno mencionar que Mallat es graduado por la Escuela Nacional Superior de Telecomunicaciones de Paris, y es doctor en ingeniería eléctrica por la Universidad de Pennsylvania; trabaja en visión computacional, en el procesamiento de señales e imágenes y en matemática aplicada. Esto es un ejemplo, entre otros, de que la teoría de ondaletes, teniendo ahora un fundamento riguroso en el análisis, se proyecta a campos de la tecnología contemporánea, tan estimulado por los países en vanguardia y deseado por aquellos en desarrollo.

Posteriores desarrollos en la teoría de ondaletes han sido obtenidos en los últimos cinco años. Antes de comentar a éstos, mencionemos lo que sucedió en la matemática aplicada, en particular en la teoría de señales, objeto también de esta exposición.

La noción de señal corresponde a la de función. Así una señal puede depender de una variable, o de varias variables, que puede ser el tiempo t , el espacio x , la frecuencia u otras. Siendo las distribuciones (de L. Schwartz) entes matemáticos que generalizan a las funciones, ellas constituyen modelos mucho más generales de señales. Son ejemplos de señales: la variación de la presión del aire en un lugar dado en función del tiempo; la intensidad de una corriente eléctrica; un sonido que percibimos; la vibración del suelo (señal sísmica); las fluctuaciones del índice de la bolsa (señal económica); una fotografía en blanco y negro es una señal de dos variables, etc. Diremos que una señal $s(t)$ es **analógica** si ella es una función (de valor real o compleja). La señal es llamada **discreta o digital** si ella es una sucesión de números reales o complejos, así $s = (s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

El análisis o tratamiento de la señal consiste en el proceso de extraer la información que ella contiene, tarea no fácil en general dada la heterogénea naturaleza física de cada caso. Hasta hace pocos años tal procesamiento era hecho en base a técnicas o recetas sin un sustento matemático adecuado. En general el investigador recibe un conjunto de señales, combinadas entre si; una tarea es saber separarlas. Una señal puede ser sometida a un proceso de **discretización** ("échantillonnage" en francés) para su mejor estudio, etapa que constituye el análisis. Luego, debemos ser capaces de reconstruir la señal, lo que constituye la síntesis. Este proceso está latente en la teoría de Fourier cuando uno da una función f (la señal) y le asociamos su serie de Fourier, donde sus coeficientes de Fourier contienen lo esencial de f (análisis); luego sabemos como reconstruir f vía el cálculo de tales coeficientes y criterios de convergencia (síntesis).

Mucho de la actividad científica y de la actual tecnología descansa esencialmente en el procesamiento de señales e imágenes, sobre todo cuando actualmente se tienen teorías matemáticas que optimizan a los sistemas de procesamiento. La teoría de ondaletes es precisamente uno de los actuales soportes matemáticos!. Para fundamentar lo afirmado digamos, entre otros argumentos, que el tratamiento de la señal es utilizado en las telecomunicaciones, como es el teléfono y la televisión; en el procesamiento de las imágenes que envían los satélites; en el trabajo profesional de los médicos, en particular en delicadas operaciones quirúrgicas; en el análisis de la variación del clima y en el recalentamiento de nuestro planeta; ... , en el estudio de las lejanas galaxias cuyo único contacto con ellas son las señales luminosas que nos envían y que recibimos después de muchísimos años.

Remarquemos que vía el procesamiento de la señal, ésta es analizada con el mayor cuidado; se la codifica, se la trasmite con la mayor rapidez, luego al recibirla se la reconstruye. Este proceso es delicado pues muchas veces la información deseada está escondida dentro de muchas otras informaciones que aparecen en el gráfico de la señal. Esta situación plantea la necesidad de optimizar los recursos matemáticos. En esta dirección nos encontramos con un camino que ha de conducirnos a las ondaletes. Veamos algunos antecedentes. El análisis de Fourier fue (y lo sigue siendo en determinados casos) la más antigua técnica para tratar diferentes problemas, tanto en matemática pura como en la aplicada, en particular en las investigaciones de los físicos, ingenieros y de muchos científicos ligados al desarrollo industrial. Tal análisis fue fortalecido con la invención de la transformada rápida de Fourier, un algoritmo que permite tratar las señales con gran eficacia, en particular para las señales periódicas y suficientemente regulares. Sin embargo, el análisis de Fourier presenta algunos inconvenientes lo que no permite un análisis óptimo para todas las señales.

Como sabemos, recibida una señal $s(t)$ deseamos que ella nos devuelva la información que contiene. Si la señal es periódica, esto es, que ellas se repiten idénticamente en forma indefinida, entonces la señal es la superposición de una onda "senoidal" fundamental con muchas otras ondas, llamadas armónicos. Una señal senoidal es de la forma

$$s(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$$

donde $|\alpha| = \max|s(t)|$ es llamada la amplitud de la señal; ω es la pulsación; $a \equiv \frac{2\pi}{\omega}$ es el período; $\lambda = \frac{1}{a}$ es llamada la frecuencia de la señal y φ es la fase inicial. La frecuencia de la onda senoidal fundamental es llamada frecuencia fundamental, y las frecuencias de los armónicos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. El análisis de Fourier permite calcular los coeficientes de Fourier, los que son las amplitudes de las diferentes frecuencias. Para las señales no periódicas (las series de Fourier no permiten analizarlas) uno recurre a la transformada de Fourier, que los físicos llaman el espectro (continuo) de la señal. Así, dada la señal $s(t)$, su transformada de Fourier es definida vía

$$F s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} s(t) dt \equiv \hat{s}(\xi).$$

Lamentablemente el método de la transformada de Fourier (o más convenientemente la transformada rápida de Fourier) no permite analizar correctamente todos los tipos de señales, pues, entre otras razones, ella descompone la señal en funciones senoidales (senos y cosenos) que oscilan indefinidamente en el tiempo. Una descripción directa de la señal es dada por una representación en el tiempo t , en tanto que una representación en frecuencia (ξ) es dada por su transformada de

Fourier como superposición de senoidales; éstas vibran sin amortiguamiento alguno en el eje del tiempo t . Esta es una de las desventajas del sistema trigonométrico, pues tal decrecimiento rápido en el infinito es deseado (uno tiene un control en el infinito). Por esta razón, decimos que el sistema trigonométrico (análisis de Fourier) no es localizable en la variable t , pero (y esto es una ventaja) sí es localizable respecto a la frecuencia ξ (o variable de Fourier). Como veremos más tarde, la localización es una de las condiciones fundamentales de las ondaletes.

En contraposición, las funciones de la base de Haar (que más tarde precisaremos) son bien localizables en la variable de espacio x (o tiempo t) pero tiene una mala localización en la variable ξ , esto debido a que tales funciones no son regulares y no tienen el carácter oscilante (oscilante significa que tienen integral nula). Tanto la regularidad como la oscilación son también ingredientes esenciales para las ondaletes. Estos argumentos nos llevan a sospechar que buscamos bases más universales (las ondaletes!), que sean bien localizables tanto en la variable espacio como en la variable frecuencia. Así surge el análisis tiempo-frecuencia. Por otro lado, el mejor o más adecuado espacio para elaborar la teoría es el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$, que es de Hilbert y en donde vale el principio de incertidumbre de Heisenberg que afirma

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int t^2 |g(t)|^2 dt \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

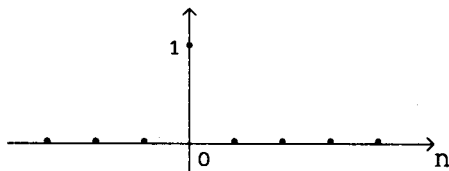
Como $g \in L^2(\mathbb{R})$ es dado, el lado izquierdo tiene un valor determinado, luego las localizaciones en t y ξ no pueden ser arbitrariamente muy pequeñas a la vez. Cuando realizamos una representación tiempo-frecuencia de una señal ponemos en acción dos operaciones recíprocas: el análisis (la descomposición) y la síntesis (la reconstrucción). En el análisis la señal es descompuesta como

una suma de elementos simples y universales, llamadas funciones elementales o átomos (u "ondaletes"). Por ejemplo, en el análisis de Fourier los átomos son las funciones senoidales (senos y cosenos). La primera representación tiempo-frecuencia fue descubierta por el físico británico Dennis Gabor durante los años 1940's, más propiamente fue el primero en introducir los ondaletes tiempo-frecuencia (u "ondaletes de Gabor"). Su idea fue recortar una onda (cuya representación matemática es de la forma $\cos(\omega t + \phi)$) en pedazos de longitud limitada; cada pedazo es estudiada por el análisis de Fourier. De esta manera, la onda es descompuesta en funciones elementales u "ondaletes de Gabor", las que provienen de una misma función **vía una traslación** de ésta en el tiempo y **multiplicándola** por una función senoidal de frecuencia a . Más concretamente, si $\psi(t)$ es la función "madre" entonces se obtienen las "ondaletes" $\psi_{a,b}(t) = \cos(2\pi a)t \psi(t-b)$, donde el parámetro a está ligado a la frecuencia y b al tiempo.

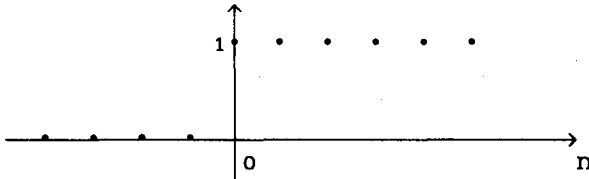
SEÑALES. Breve Presentación.

Recordemos que una señal es una función que transporta información sobre la naturaleza de un sistema físico. Son ejemplos de señales digitales:

(a) la **señal delta** (o impulso) $\delta(n) \begin{cases} 1 \dots n = 0 \\ 0 \dots n \neq 0 \end{cases}$

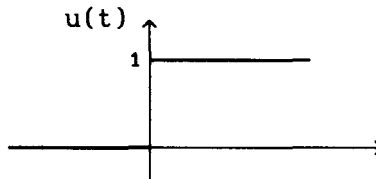


(b) la **señal escalón** $u(n) = \begin{cases} 1 & \dots n \geq 0 \\ 0 & \dots n < 0 \end{cases}$



Son ejemplos de señales analógicas.

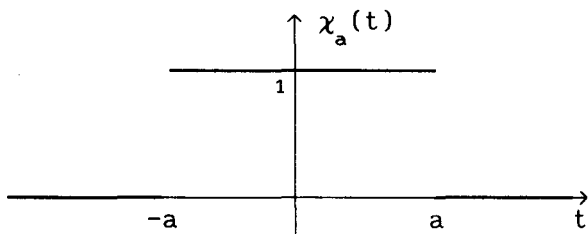
(c) la **señal o función escalón** $u(t) = \begin{cases} 1 & \dots t > 0 \\ 0 & \dots t < 0 \end{cases}$



Esta señal es también llamada la **señal escalón unitaria de Heaviside**.

(d) la **señal pulso rectangular**

$$\chi_a(t) = \begin{cases} 1 & \dots |t| < a \\ 0 & \dots |t| > a \end{cases}, \quad a > 0 \text{ real}$$



Otros ejemplos particulares de señales son:

- (1) $s(t) = e^{\alpha + i(\varphi + 2\pi\omega t)}$ con $t \in (-\infty, +\infty)$, α , φ y ω números reales.
- (2) $s(t)$ es una **señal periódica**, de período T , si $s(t+T) = s(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- (3) $s(t)$ es una **señal acotada** (o limitada) si $\exists K > 0$ real tal que $|s(t)| \leq K$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- (4) $s(t)$ es una **señal de energía limitada** si $\exists K > 0$ real tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \leq K, \text{ esto es, si } s \in L^2(\mathbb{R}).$$

- (5) $s(t)$ es una **señal de duración limitada** si $s(t) = 0$ para $|t| > T$, esto es, si ella es nula fuera de $-T \leq t \leq T$, donde T es un tiempo determinado.
- (6) $s(t)$ es una **señal de banda limitada** si

$$\hat{s}(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi i \xi t} dt = 0, \text{ para todo } |\xi| > \lambda$$

donde λ es una frecuencia dada.

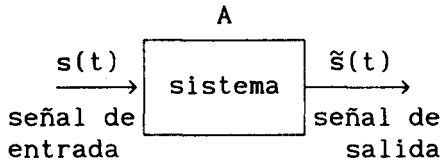
Para la señal impulso consideremos la traslación

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & \dots \text{ si } n = k \\ 0 & \dots \text{ si } n \neq k, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Entonces podemos verificar que $s(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \delta(n-k)$.

Obsérvese que la sucesión $(\delta(n-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ actúa como una base para representar a la señal discreta $s(n)$.

Para procesar una señal recurriremos a los llamados sistemas (de transmisión) que pueden ser entes matemáticos o aparatos en donde distinguimos señales que entran y señales que salen, y en donde las señales no son necesariamente de la misma naturaleza. Tenemos el diagrama



Matemáticamente tenemos el operador $A: X \rightarrow Y$
 $s \rightarrow As = \tilde{s}$

donde X es el conjunto de las señales de entrada, Y el de las señales de salida.

Observamos que tanto X como Y son espacios de funciones (o de sucesiones) y por tanto podemos asociarles una estructura de espacio vectorial, así como de una estructura topológica. El sistema (u operador) A puede gozar de ciertas propiedades, como son:

- (i) A es **lineal** si $A(s_1+s_2) = As_1+As_2$, $A(\lambda s) = \lambda As$ para $\forall s_1, s_2 \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Esta propiedad es llamada el principio de superposición.

(ii) A es **causal** o **realizable** si $\forall t < t_0, s_1(t) = s_2(t)$ entonces $\forall t < t_0$ tenemos $As_1(t) = As_2(t)$. Esto nos dice que la respuesta ($As(t)$) en un instante t depende sólo del pasado anterior a t .

Esta propiedad es una condición (necesaria) para que un sistema sea físicamente realizable. Por extensión, $s(t)$ es causal si $s(t) = 0$ para $t < 0$.

(iii) A es **invariante por traslaciones** si $As(t) = \tilde{s}(t)$ entonces $As(t-a) = \tilde{s}(t-a)$. En otras palabras, si $\tau_a s(t) = s(t-a)$ diremos que A es invariante por traslaciones si $A\tau_a = \tau_a A$.

(iv) A es un **sistema continuo** si $s_n \rightarrow s$ (en la topología de X), entonces $As_n \rightarrow As$ (en la topología de Y). En particular, si X e Y son espacios normados, entonces $s_n \rightarrow s$ significa $\|s_n - s\|_X \rightarrow 0$. En este caso podemos considerar, para señales analógicas, topologías particulares, como son:

(a) **convergencia uniforme** $\|s\|_{L^\infty} = \sup_{t \in I} \{|s(t)|\}$,
I es un intervalo.

(b) **convergencia L^1** (o en promedio)

$$\|s\|_{L^1} = \int |s(t)| dt.$$

(c) **convergencia L^2** (convergencia en "energía" o promedio cuadrático)

$$\|s\|_{L^2} = \left(\int_I |s(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

En el caso de señales discretas tenemos respectivamente:

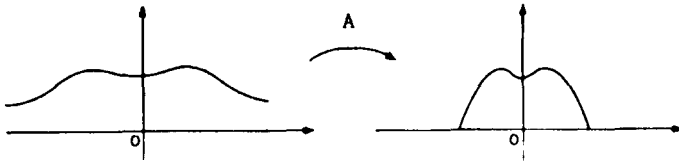
$$\|s\|_{L^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{|s_n|\} ; \quad \|s\|_{L^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s_n| ;$$

$$\|s\|_{L^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s_n|^2 \right)^{1/2} . \quad \text{En este caso diremos que}$$

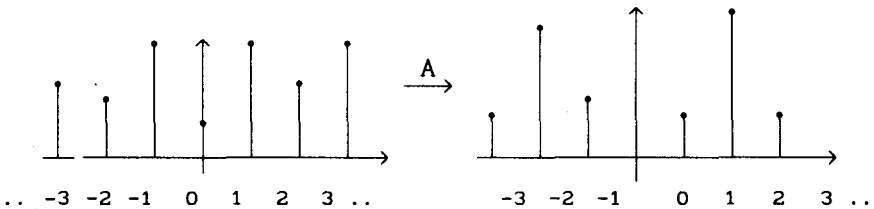
$(s_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ si la serie converge.

Son ejemplos de sistemas: el teléfono, un amplificador, un circuito eléctrico.

Por otro lado, diremos que el sistema $A: X \rightarrow Y$, es analógico si transforma una señal analógica en una señal analógica.



Por analogía, A es un sistema discreto si transforma una señal discreta en una señal discreta.



También, un sistema A puede transformar señales discretas en señales analógicas, e inversamente puede transformar señales analógicas en discretas (en este

caso, el operador A funciona como un discretizador o "échantillonneur").

Son ejemplos de sistemas:

- (i) $A s(t) = ks(t)$, $k \in \mathbb{R}$ constante
(amplificador ideal)
- (ii) $A s(t) = s(t-a)$, $a \in \mathbb{R}$ constante
(sistema de retardo)
- (iii) $A s(t) = s'(t)$, (s' derivada de s)
(sistema derivador).

Convolución: Dadas las señales analógicas s_1 y s_2 su **convolución** es definida vía

$$(s_1 * s_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\lambda) s_2(t-\lambda) d\lambda.$$

En el caso discreto tenemos

$$(s_1 * s_2)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) s_2(n-k).$$

Se tiene

$$(s_1 * s_2)(t) = (s_2 * s_1)(t) \quad \text{y} \quad (s_1 * s_2)(n) = (s_2 * s_1)(n).$$

Filtro

Una idea muy importante en la teoría de la señal es la de filtro. Concretamente, un **filtro** es un operador A que es lineal, continuo e invariante por traslaciones. Como corolario tenemos que si A es un filtro, entonces

$$A\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n s_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n A(s_n).$$

Se verifica que toda señal periódica $s(t)$ se puede escribir en la forma

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (e^{2\pi i \lambda t})^n \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_{\lambda}^n(t), \text{ donde } e_{\lambda}(t) = e^{2\pi i \lambda t}.$$

Luego, si A es un filtro tenemos $As = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n A e_{\lambda}^n$.

Asimismo

$$e_{\lambda}(t_1+t_2) e^{2\pi i \lambda t_1} e^{2\pi i \lambda t_2} = e_{\lambda}(t_1) e_{\lambda}(t_2).$$

Por tanto, $\forall t_2 \in \mathbb{R}$ (considerando t_1 como parámetro y t_2 como variable) se tiene

$$A(e_{\lambda}(t_1)e_{\lambda}(t_2)) = A(e_{\lambda}(t_1)e_{\lambda})(t_2) = e_{\lambda}(t_1) A e_{\lambda}(t_2).$$

Pongamos aún, $f_{\lambda}(\omega) = A e_{\lambda}(\omega)$; entonces se tiene

$f_{\lambda}(t_1+t_2) = e_{\lambda}(t_1) f_{\lambda}(t_2)$. Luego, si $t_2 = 0$ tendremos en general

$$f_{\lambda}(t) = e_{\lambda}(t) f_{\lambda}(0) = [\text{llamando } H(\lambda) = f_{\lambda}(0)] = e_{\lambda}(t) H(\lambda).$$

Conclusión: $A e_{\lambda} = H(\lambda) e_{\lambda}$ y podemos afirmar que toda señal monocromática $e_{\lambda}(t) = e^{2\pi i \lambda t}$ es una función propia de todo filtro A . Además, $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada la $\lambda \rightarrow H(\lambda)$

función de transferencia del filtro A .

La teoría de distribuciones de L. Schwartz generaliza el concepto de función, obteniéndose un análisis más rico y poderoso. En la teoría de la señal las distribuciones son usadas de un modo natural.

Recordemos algunas ideas. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones infinitamente derivables (en el sentido usual) sobre \mathbb{R} , tal que sus elementos se anulan fuera de un intervalo (cerrado) limitado; esto es,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{D} = \{\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ sopp}(\varphi) \text{ es compacto}\}.$$

\mathcal{D} es provisto de una adecuada topología. Una **distribución** es una aplicación

$$\begin{aligned} T: \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{C} && \text{que es lineal y continua,} \\ \varphi &\rightarrow \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

esto es, T pertenece al dual (topológico) de \mathcal{D} .

\mathcal{D}' representa el espacio de las distribuciones. En este contexto, llamaremos **filtro analógico** a todo operador

$$A: X \subset \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}',$$

que es lineal, continuo e invariante por traslaciones. Remarcamos que X es un subespacio de \mathcal{D}' con una apropiada topología; X puede ser, por ejemplo, $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$, o algún subespacio de distribuciones. Por ejemplo, el sistema de convolución

$$\begin{aligned} A: X &\rightarrow \mathcal{D}' \\ f &\rightarrow Af = h * f \end{aligned}$$

es un filtro analógico si el núcleo h es una distribución con soporte compacto.

Dentro de este panorama, se llama **respuesta impulsional** de un filtro A a la respuesta $h = A\delta$, donde δ es la impulsión de Dirac (que asumimos pertenece a X). En este caso, la función de transferencia de A es $H = \hat{h}$ (la transformada de Fourier de h). Por otro lado, sea $a \in \mathbb{R}$; definamos δ_a vía $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$, con $\varphi \in \mathcal{D}$. δ_a

es lineal y continua sobre \mathcal{D} y por tanto es una distribución. Si $a = 0$ se pone $\delta_0 \equiv \delta$ (delta de Dirac). Pongamos ahora

$$T_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \delta_{na}, \quad \text{con } \lambda_n \in \mathbb{C},$$

que es definida vía

$$\langle T_a, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \varphi(na).$$

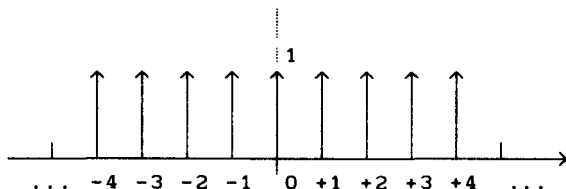
Así, T_a es una forma lineal continua sobre \mathcal{D} , esto es, T_a es una distribución.

Si $\lambda_n = 1 \quad \forall n$, se obtiene $T_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$, distribución que es llamada "*peine de Dirac*", de gran utilidad en la física.

Si $a = 1$, tendremos al *peine de Dirac*

$$\text{III} (x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)$$

cuyo gráfico simbólico es



El "*peine de Dirac*", escrito en la forma

$$T_{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n}, \quad \text{nos ilustra el hecho de que la restricción}$$

de la distribución $T_{2\pi}$, 2π -periódica, al intervalo $(0, 2\pi)$ es nula. De un modo general, las distribuciones 2π -periódicas no son caracterizadas por sus restricciones al intervalo $(0, 2\pi)$, esto a diferencia de que las funciones 2π -periódicas que pertenecen a $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ que se identifican con funciones en $L^2((0, 2\pi))$. Lo sucedido con las distribuciones periódicas fuerza una nueva estrategia de trabajo para salvar tal dificultad.

LAS VENTANAS RESBALADIZAS ("*fenêtres glissantes*")

Sea $s(t)$ una señal. Recordemos lo mencionado respecto al aporte de D. Gabor, un precursor de las ondaletes. La idea es cortar la señal con la "ventana" $\chi_{[-A, A]}$, la función característica de $[-A, A]$, que simbolizamos con r_A ; luego tomamos transformada de Fourier (el espectro). Más concretamente tenemos

$$[r_A s]^\wedge(\lambda) = \hat{r}_A(\lambda) * \hat{s}(\lambda) = \frac{\text{sen } 2\pi A \lambda}{\pi \lambda} * \hat{s}(\lambda) \equiv (s_A * \hat{s})(\lambda).$$

Si $\hat{g}(\lambda) = [r_A s]^\wedge(\lambda)$, podemos pensar que \hat{g} es una aproximación de \hat{s} , la que será mejor cuando $A \rightarrow +\infty$; tal optimización es conseguida cuando s_A converge a la impulsión de Dirac $\hat{\delta} = 1$.

[Aprovechamos la oportunidad para decir que $\hat{\delta}_a(\lambda) = e^{-2\pi i a \lambda}$ y para las derivadas tenemos $(\delta^{(k)})^\wedge(\lambda) = (2\pi i \lambda)^k$. Para el también llamado "peine de Dirac" T_a , que es una distribución temperada, se tiene

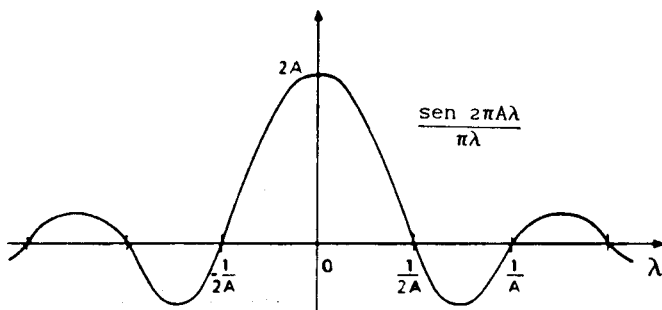
$$\hat{T}_a(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{\delta}_{na}(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i na\lambda} = \frac{1}{a} T_{\frac{1}{a}}(\lambda),$$

esto es,

$$\hat{T}_a = \frac{1}{a} T_{\frac{1}{a}} \quad (a \neq 0).$$

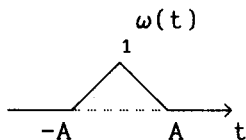
Luego, si $a = 1$ tendremos $\text{III} \equiv T = \hat{T}$, una propiedad remarkable].

Continuando con el anterior argumento, se observa que el cardinal seno



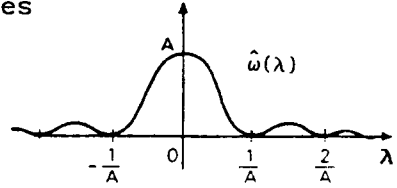
$s_A(\lambda) = \frac{\text{sen } 2\pi A\lambda}{\pi\lambda}$ se amortiza **muy lentamente** cuando $|\lambda| \rightarrow +\infty$. Por esta razón (entre otras) se utilizan otros tipos de "ventanas", que sean mas regulares que $\chi_{[-A,A]}$. Entre esas ventanas tenemos:

(i) **ventana triangular**

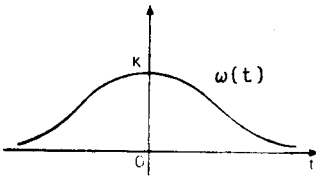


cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\omega}(\lambda) = \frac{1}{A} \left(\frac{\text{sen } \pi A \lambda}{\pi \lambda} \right)^2$$



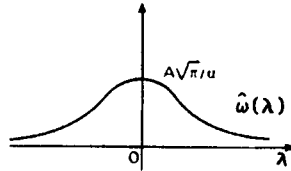
(ii) ventana de Gauss $\omega(t) = A e^{-\alpha t^2}$, $\alpha, A > 0$,
cuyo gráfico es



y cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\omega}(\lambda) = B e^{-C\lambda^2},$$

con B y C apropiadas constantes.



Por el análisis de Fourier sabemos que dada una señal $s(t)$ a ella le asociamos su serie de Fourier

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t}$, que asumimos representa a $s(t)$ y donde

los coeficientes de Fourier son dados por

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Bien, el análisis que estamos presentando (el análisis por las ondaletas) está en esta dirección; a las ventanas las hacemos resbalar o deslizar de modo

que tomen todos los valores, de esta manera se obtiene una familia de coeficientes

$$W_s(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \bar{\omega}(t-b) e^{-2\pi i \lambda t} dt, \quad (\bar{\omega} \text{ conjugado de } \omega),$$

donde λ y b actúan como dos parámetros (b ligado al tiempo y λ a la frecuencia). Así tenemos la aplicación $s \rightarrow W_s$, la que es llamada "la transformada de Fourier a ventana resbaladiza". Así como en el análisis de Fourier, $W_s(\lambda, b)$ nos da una información de lo que pasa alrededor de $t = b$, con frecuencia λ . Observemos que si $\omega_{\lambda b}(t) = \omega(t-b) e^{2\pi i \lambda t}$ entonces $W_s(\lambda, b) = \langle s, \omega_{\lambda b} \rangle$ donde \langle, \rangle es el producto interno familiar en $L^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, si conocemos $W_s(\lambda, b)$ para todos los valores reales de λ y b , entonces se puede reconstruir la señal $s(t)$. Estas ideas fueron desarrolladas por D. Gabor en los años 1940's, quien utiliza la ventana

$$\omega(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2} t^2} \quad (\text{Gauss}). \quad \text{En síntesis se tiene el}$$

Teorema. Sea la ventana $\omega \in L^1 \cap L^2$ tal que $|\hat{\omega}|$ es una función par y $\|\hat{\omega}\|_{L^2} = 1$; pongamos

$\omega_{\lambda b}(t) = \omega(t-b) e^{2\pi i \lambda t}$, con $\lambda, b \in \mathbb{R}$; para toda señal $s \in L^2$ sean los coeficientes

$$W_s(\lambda, b) = \langle s, \omega_{\lambda b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \bar{\omega}_{\lambda b}(t) dt.$$

Entonces se tiene

$$(i) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} |W_s(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \dots$$

conservación de la energía.

$$(ii) \quad s(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_s(\lambda, b) \omega_{\lambda b}(t) d\lambda db \dots$$

reconstrucción de la señal.

La reconstrucción debe ser entendida en el sentido:

$$\iint_{\substack{|\lambda| \leq A \\ b \in \mathbb{R}}} W_s(\lambda, b) \omega_{\lambda b}(t) d\lambda db \rightarrow s(t)$$

en la norma L^2 cuando $A \rightarrow +\infty$.

Para la prueba del teorema ver [Ga-Wi], pág. 318. Observemos la gran analogía entre el contenido del teorema con el respectivo del análisis de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$. También observemos que la familia $(\omega_{\lambda, b})_{\lambda, b \in \mathbb{R}}$ actúa como una base; así, estamos en la dirección de las ondaletes.

FOURIER - GABOR

Observemos que $W_s(\lambda, b) = \langle s, \omega_{\lambda b} \rangle = \langle \hat{s}, \hat{\omega}_{\lambda b} \rangle$ y de esta manera los coeficientes W_s contienen información tanto en tiempo como en frecuencia alrededor de (b, λ) . Por otro lado, la descomposición de la señal $s(t)$ según Fourier es de la forma

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi,$$

mientras que según Gabor es de la forma

$$s(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_s(\lambda, b) \omega_{\lambda b}(t) d\lambda d\xi.$$

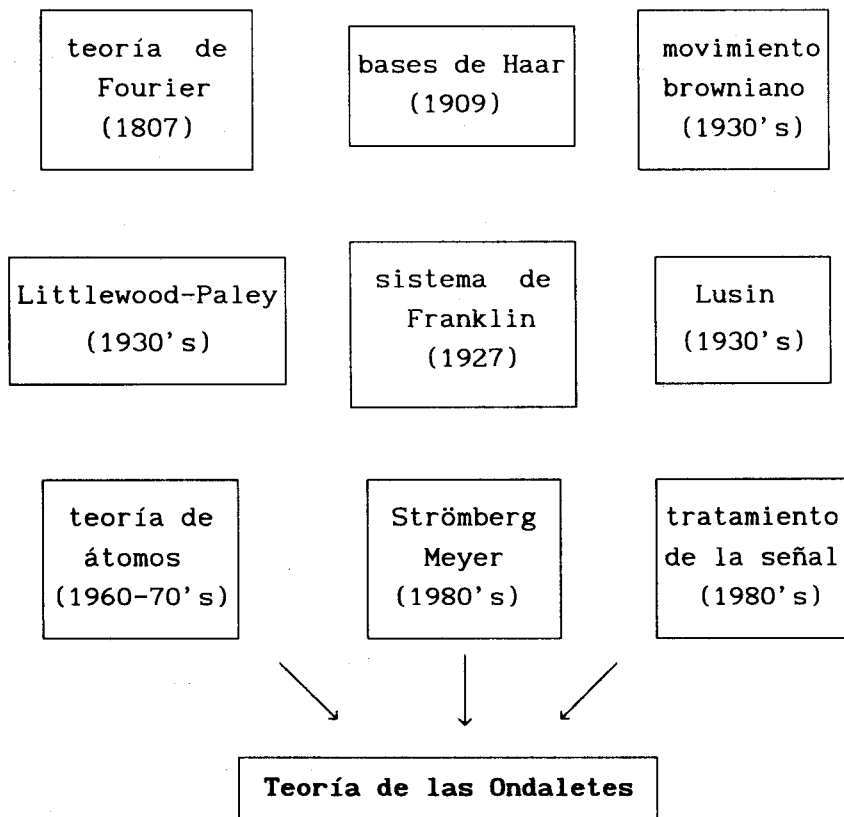
En el análisis de Fourier la base está formada por funciones senoidales (senos y cosenos), las que están bien concentradas en frecuencia pero no se amortizan convenientemente en el infinito; así, vía Fourier se tiene información sobre la repartición de las frecuencias pero no las tenemos en relación al tiempo. En cambio, en el análisis de Gabor la base está formada por senoidales que están fuertemente amortizadas

$(\omega_{\lambda b}(t) = \omega(t-b)e^{2\pi i \lambda t})$ y se tiene información tanto en el tiempo como en la frecuencia pero sujeta al principio de incertidumbre de Heisenberg!

Sin embargo, el método de Gabor presenta algunas limitaciones; por ejemplo, la longitud de la ventana es fija y no permite cierta flexibilidad. Existen situaciones concretas en donde el método no funciona. Fue precisamente el geofísico J. Morlet quién constata tales limitaciones al analizar las señales sísmicas que provienen de las capas geológicas al hacerse exploraciones petrolíferas. Por tal razón, en 1983, Morlet anuncia un nuevo método, pero ahora las ventanas varían por traslaciones, así como también por dilataciones o contracciones. Es el inicio de las ondaletes, creado para atacar problemas concretos.

ONDALETES: CAMINOS QUE CONDUCEN A LA TEORIA

Según Y. Meyer [Me] existen diversos caminos, que a través de los años han conducido a la formulación de la teoría de ondaletes. El siguiente diagrama da una idea de tales caminos.



Una teoría científica tiene sus precursores. En el caso de las ondaletes podemos ver que ella es el producto de trabajos hechos por matemáticos puros, así como de los aplicados o físicos. Es anecdótico mencionar que algunos resultados, obtenidos años atrás por analistas, fueron redescubiertos por matemáticos aplicados o físicos. Antes de la formulación de la teoría de ondaletes existían conjuntos de resultados, aparentemente sin ligación alguna; cada camino tenía su propia óptica, sus técnicas particulares. Es conveniente remarcar que algunos fundamentos matemáticos fueron hechos por físicos o ingenieros, lo que nos ilustra la buena formación matemática de aquellos. La evolución de la ciencia es un continuo esfuerzo colectivo; científicos de hoy hacen uso de trabajos de los de ayer, a veces después de muchísimos años. Por ejemplo, Grossmann y Morlet, un físico y un geofísico respectivamente, redescubrieron una famosa identidad de Calderón; S. Mallat, un especialista en la teoría de señales e imágenes, usa la teoría de Littlewood-Paley en la creación del análisis multiresolución, que es el escenario donde se construyen las ondaletes.

Hagamos unos breves comentarios sobre los caminos que conducen a las ondaletes. Seguimos de cerca a [Me].

Teoría de Fourier

Como se sabe, Fourier usó las series trigonométricas en su estudio de la conducción del calor. Desde entonces es una técnica para estudiar problemas de la física matemática, pero también, y esto es muy importante, motivó el surgimiento de notables teorías matemáticas. En la época de Fourier (inicios del siglo XIX) el análisis matemático aun no existía; muchas ideas básicas carecían del rigor que hoy conocemos. Sin embargo, con una intuición genial, Fourier usó las llamadas hoy series de Fourier, para estudiar problemas concretos.

Sea la familia $1, \cos x, \sen x, \cos 2x, \sen 2x, \cos 3x, \sen 3x, \dots$ la que es ortogonal (con el usual producto interno de la integral) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ (y por tanto linealmente independientes). Asumamos que tal familia se comporta como una base y formemos la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sen nx,$$

donde a_n y b_n son constantes reales. Tal serie es una serie trigonométrica.

Dada una función f , si los coeficientes a_n y b_n son de la forma

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sen nx dx,$$

entonces la serie es llamada una **serie de Fourier** asociada a f . Fourier, en 1807, afirmó:

“toda función, 2π -periódica, f puede ser representada por su asociada serie de Fourier, esto es, se tiene

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sen nx ”.$$

Observemos que estamos trabajando con funciones... y en aquella época este concepto no estaba aún bien definido; los coeficientes son dados como integrales... que

tampoco tenían un sustento riguroso. Así, la teoría nació con algunos defectos conceptuales; sin embargo, ella funcionaba, y funcionaba bien. En aquella época ya se conocían representaciones en series de potencias, pero la representación en series trigonométricas fue un paso audaz.

En 1873, Dubois-Reymond sorprende al ambiente matemático al construir una función continua, 2π -periódica, cuya asociada serie de Fourier diverge en un punto dado. Fourier es considerado un matemático revolucionario, ¿se equivocó al afirmar la anterior sentencia? ... No, simplemente se adelantó a su época. Los analistas de fines del siglo pasado y comienzos del nuestro tuvieron el reto de aclarar el panorama. En efecto, como Meyer afirma, esta situación abriría tres nuevos caminos hacia teorías importantes. Un camino conduciría a los espacios $L^p[0,2\pi]$ y en particular al espacio $L^2[0,2\pi]$, creado por H. Lebesgue al elaborar su teoría de la medida; este espacio será el escenario más conveniente para las series de Fourier. Otro camino está orientado a modificar el criterio de convergencia de la serie trigonométrica, surgiendo así otros criterios, como el de Cesaro. El tercer camino llevaría a las ondaletes y parte de la idea de considerar otras familias ortonormales que sirvan de base. Así surge el aporte de Haar.

Bases de Haar

A comienzos de siglo (1909) se construye una base ortonormal para el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$ siguiéndose una estrategia muy análoga a lo que hoy se hace para construir las ondaletes. Es la base (base hilbertiana) construida por Alfred Haar y que responde al problema siguiente:

“sea $C([0,1])$ el espacio de las funciones continuas definidas sobre $[0,1]$, ¿existe una sucesión $(h_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones definidas sobre $[0,1]$, tal que si $f \in C([0,1])$

tengamos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, h_n \rangle h_n(x), \text{ con convergencia uniforme? (*)}$$

Haar comienza con la función $h(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$,

esto es,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \dots x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \dots x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \dots \text{fuera de } [0, 1]. \end{cases}$$

Ahora, para $n \geq 1$ Haar considera $n = 2^j + k$ con $j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$.

Por ejemplo, si $n = 7, 7 = 2^2 + 3, 0 \leq 3 < 2^2$. Luego, da un importante paso, considera

$$h_{j,k}(x) \equiv h_n(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k).$$

Observemos que las funciones $h_{j,k}$ tienen soporte compacto, que es el intervalo $I_{j,k} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}] \subset [0, 1]$; además, $h_0(x) = 1$ sobre $[0, 1]$ por construcción. Entonces, la sucesión $(h_{j,k}(x))_{j,k \in \mathbb{N}}$ constituye una base ortonormal de $L^2([0, 1])$. Asimismo, la convergencia uniforme (*) sigue del hecho que toda función continua se puede aproximar por funciones simples. Lo esencial de la construcción de Haar es que se parte de una sola

función h y a partir de ella, vía traslaciones y dilataciones, se construye la base. Esto se hará cuando se construyan las ondaletes!

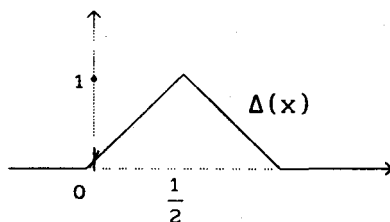
De algún modo podríamos decir que las ondaletes son la base de Haar "regularizadas". En efecto, el lector habrá observado que h y los $h_{j,k}$ no son funciones continuas en $[0,1]$. En otras palabras, los elementos simples o átomos (que sirven para representar elementos del espacio $C([0,1])$) no pertenecen al espacio considerado. Esto es un gran inconveniente, pero el aporte de Haar es muy importante por la gran semejanza de su metodología con la de la teoría de ondaletes; además, las "ondaletes" de Haar son de soporte compacto.

El Movimiento Browniano

En 1826 el botánico inglés Brown observó que las partículas en un fluido se mueven de una forma muy irregular bajo el impacto entre ellas mismas. A. Einstein, en 1905, formula una teoría que explica tal situación. El movimiento browniano es un proceso físico, el que está regido por leyes probabilísticas y constituye toda una teoría matemática. Designemos con $X(t,\omega)$ al movimiento browniano, donde t es el tiempo y ω pertenece a un espacio de probabilidad P ; así consideramos a $X(t,\omega)$ como una función en t , y con parámetro ω .

¿Cuál es la mejor representación para el movimiento browniano? Para responder a la cuestión necesitamos la noción de base de Schauder. La idea es reemplazar las funciones de Haar $h_n \equiv h_{j,k}$ por sus primitivas. Así, ahora partimos de la función

$$\Delta(x) = \begin{cases} 2x & \dots x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \dots x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \dots x \notin [0, 1] \end{cases}$$



Ahora se construye la sucesión $(\Delta_n) \equiv (\Delta_{j,k})$ vía

$$\Delta_{j,k}(x) = \Delta(2^j x - k),$$

donde nuevamente $n = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$. Observemos que aún el intervalo diádico $I_{j,k} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$ es el soporte de $\Delta_{j,k}$.

Por construcción $\Delta'_{j,k}(x) = h_{j,k}(x)$, y si $n = 0$ pondremos $\Delta_0 = x$ (así $\Delta'_0(x) = 1 = h_0(x)$).

A la familia $\Delta_{j,k}(x)$ le agregamos la constante 1; se concluye que la sucesión $1, \Delta_0(x), \dots, \Delta_n(x), \dots$ es una

base (de Schauder) en el espacio $C([0,1])$. Esta base da un buen análisis para las trayectorias del movimiento browniano. En conclusión: consideramos la base de Haar $(h_n(t-\ell))_{\substack{n \geq 0 \\ \ell \in \mathbb{Z}}}$ con la cual representamos $\frac{d}{dt}X(t, \omega)$,

enseguida consideramos las primitivas para obtener una representación del movimiento browniano en términos de la base de Schauder. Remarquemos que en el estudio del movimiento browniano no se usa la teoría de Fourier pues ella es insuficiente en este caso.

Teoría de Littlewood-Paley

Una de las líneas de estudio de la teoría de Littlewood-Paley es la composición diádica de una función en términos de su serie de Fourier. La teoría fue desarrollada fundamentalmente en el período 1930 a 1939 por Littlewood, Paley, A. Zygmund (el profesor Antoni Zygmund falleció recientemente (1992); fue un gran matemático y Maestro de la Escuela de Chicago) y Marcin kiewicz (J. Marcinkiewicz, alumno de Zygmund, fue hecho prisionero por los nazis muriendo en el campo de concentración). Los inconvenientes del análisis de Fourier también se presentan en el problema de localizar la energía de una función f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

¿Qué estrategia seguir con la serie de Fourier asociada a f ?

Littlewood-Paley descubrieron un camino con tal objeto: definen los bloques diádicos. Así,

si $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ es la serie de Fourier asociada a f , se definen los bloques

$$\Delta_j f(x) = \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Entonces se tiene: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x)$, y el resultado fundamental es, si $1 < p < \infty$, existen dos constantes $0 < A_p < B_p$ tal que

$$A_p \|f\|_{L^p} \leq \left\| \left(\left| \frac{a_0}{2} \right|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j f(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq B_p \|f\|_{L^p}$$

esto es, se tiene una equivalencia entre las mencionadas normas.

¿Cómo se relaciona la teoría de Littlewood-Paley con las ondaletes?

Tal relación surgirá en las investigaciones del grupo de Chicago, alrededor de Zygmund, consistente en extender la teoría al caso n -dimensional. De esta manera aparecerá una función $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, la que es infinitamente derivable, con decrecimiento rápido en x , y tal que su transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ satisface, entre otras propiedades, la condición de ser infinitamente derivable y sobre todo la condición

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2 = 1, \quad \text{para } \forall \xi \neq 0. \quad (+)$$

Lo curioso es que la condición (+) es satisfecha por todas las bases ortonormales de ondaletes (cuando la teoría fue establecida años después); además, (+) nos dice que el análisis de Littlewood-Paley conserva la energía. Veamos algunos argumentos. Sea la dilatación $\psi_j(x) = 2^{nj}\psi(2^jx)$ y consideremos la convolución $f * \psi_j$, la que reemplazará a los bloques diádicos $\Delta_j f$. Por comodidad pongamos aún $\Delta_j f = f * \psi_j$.

Entonces, si definimos la función

$$g(x) = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Delta_j f(x)|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{y si } f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \text{entonces}$$

$g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la conservación de la energía

$$\|g\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \quad \text{Por otro lado, si } 1 < p < \infty, \quad \text{entonces}$$

son equivalentes las normas $\|f\|_{L^p}$ y $\|g\|_{L^p}$. $g(x)$ es

llamada la **función de Littlewood - Paley - Stein**. Lo

esencial de estos argumentos es que la función $g(x)$ da una estrategia para analizar $f(x)$ según las escalas de los bloques. El análisis por escalas es fundamental en la teoría de las ondaletes conforme veremos en el análisis multiresolución introducido por S. Mallat.

El Sistema de Franklin

Sea la base de Schauder $1, \Delta_0(x), \dots, \Delta_n(x), \dots$ visto anteriormente. Ph. Franklin, siendo profesor en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, en 1927 ortonormaliza tal base utilizando el método de Gram-Schmidt. Se obtiene una nueva sucesión $(f_n(x))_{n \geq -1}$, que es una base ortonormal de $L^2([0,1])$, llamada el sistema de Franklin, que tiene la propiedad de los momentos:

$$\text{si } n \geq 1 \text{ se tiene } \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x f_n(x) dx = 0.$$

Si bien el sistema de Franklin posee simultáneamente las ventajas de la base de Haar y las de Schauder, ella no tiene una estructura simple (que la haga manejable); por otro lado, los elementos $f_n(x)$ no se deducen de una sola función "madre" ψ vía traslaciones y dilataciones diádicas, tal como sucede con las bases de ondaletes. Por tales razones el trabajo de Franklin fue olvidado por muchos años hasta 1963 cuando Z. Ciesielski descubre que el sistema de Franklin posee estimativas del tipo

$$|f_n(x)| \leq C 2^{j/2} e^{-\gamma|2^j x - k|} \dots \text{ si } 0 \leq x \leq 1, n = 2^{j+k} \\ \text{y } 0 \leq k < 2^j$$

$$\left| \frac{d}{dx} f_n(x) \right| \leq C 2^{3j/2} e^{-\gamma|2^j x - k|}.$$

Estas estimativas sugieren que los f_n 's se comportan como $2^{j/2} \psi(2^j x - k)$. Además, la primera base de ondaletes hecha por J.O.Strömberg en 1980, está relacionada de algún modo al sistema de Franklin, que "aún" no es base de ondaletes.

Lusin, Espacios $H^p(\mathbb{R})$ y Ondaletes

Por los años 30's se desarrollan los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, en el contexto de la variable compleja. Un hecho importante fue la caracterización de esos espacios utilizando la función área de Lusin. A la luz actual de las ondaletes, en tales trabajos de Lusin ya "aparecen" las primeras ondaletes.

Veamos. Sea el semi-espacio superior

$$P = \{z = x + iy \mid y > 0\}.$$

Diremos que $f \in H^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, si f es holomorfa en P y si

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} = \sup_{y>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Además de su conocido análisis, los espacios de Hardy H^p son importantes en el tratamiento de la señal.

El aporte de Lusin fue orientado al análisis y síntesis de los elementos de $H^p(\mathbb{R})$ con la ayuda de ciertas funciones simples o "átomos" que funcionasen como base del espacio.

¿Cómo son los átomos? Son funciones de la forma

$$\frac{1}{(Z-\xi)^2} \in H^p(\mathbb{R}), \text{ con } \xi \in P,$$

lo que permite la representación integral (en vez de sumatoria)

$$f(Z) = \iint_P \alpha(\xi) \frac{1}{(Z-\xi)^2} du dv, \text{ donde } \xi = u+iv,$$

y donde la función medible $\alpha(\xi)$ juega el rol de coeficiente.

Sucintamente esto es el análisis, ¿Cuál es la regla del ensamblaje para la síntesis? Veamos.

Sea $\alpha(\xi)$ una función medible arbitraria; con ella se construye la funcional cuadrática o **función "área" de Lusin**,

$$A(x) \left(\iint_{\Gamma(x)} |\alpha(u+iv)|^2 du \frac{dv}{v^2} \right)^{1/2},$$

siendo $\Gamma(x)$ el cono

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u > |u-x|\}, \quad \xi = u+iv \in P.$$

Sea ahora el espacio

$$T = \{\alpha(\xi) / A(x) \in L^p(\mathbb{R})\},$$

llamado el **espacio de los "toldos"** ("espaces des tentes") el que fue introducido por Coifman-Meyer-Stein en 1985. Entonces, si $\alpha \in T$ se tiene que

$f(Z) = \iint_P \alpha(\xi) \frac{1}{(Z-\xi)^2} du dv$ pertenece al espacio de Hardy

$$H^p(\mathbb{R}), \quad 1 \leq p < \infty, \quad y \quad \|f\|_{H^p(\mathbb{R})} \leq C \|A\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Obsérvese que nuevamente estamos en la misma situación de discusiones anteriores, es decir, de tener representaciones de elementos de un cierto espacio en términos de funciones (del espacio) que actúan como una base. En el caso actual la representación para $f \in H^p$ no es única, lo que tendríamos si $\alpha(\xi) = \frac{2}{\pi} iv f'(u+iv)$, $\xi = u+iv$. En este caso, los coeficientes se calculan (como en la teoría de Fourier) vía $\alpha(\xi) = \langle f, \frac{1}{(Z-\xi)^2} \rangle$,

es decir, como si $(\frac{1}{(Z-\xi)^2})$ fuera una base ortonormal

de H^p . Con estos coeficientes así calculados se tiene $\|f\|_{H^p} \approx \|A\|_{L^p}$.

Un caso especial de los espacios H^p es el espacio H^1 dado que sobre él, operadores que son "buenos" para H^p , $1 < p < \infty$, dejan de serlo para H^1 . Para comprender el breve argumento relativo a bases en H^1 demos algunas ideas previas. Sea B un espacio Banach. La familia de vectores $(e_n)_{n \geq 0}$ en B es llamada una **base de Schauder** de B si $\forall x \in B$ tiene la representación

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \quad (*)$$

donde los α_n 's son escalares y la convergencia es en el sentido

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k\|_B = 0.$$

Por otro lado, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ en B es **incondicionalmente convergente** a $x \in B$ si $\forall \varepsilon > 0$, existe una parte finita $F = F(\varepsilon) \subset \bar{N}$ tal que para toda parte finita \tilde{F} , con $\tilde{F} \supset F$ se tiene

$$\|x - \sum_{n \in \tilde{F}} x_n\| < \varepsilon.$$

Una **base incondicional** $(e_n)_{n \geq 0}$ es una base de Schauder tal que $\forall x \in B$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge incondicionalmente a x . En esta dirección, L. Carleson (1975) ha construido una base incondicional para el espacio $H^1(\mathbb{R})$; para ello considera una familia de funciones de la forma

$$2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z},$$

donde la función ψ es una "suavización" de la función $h(x)$ que se utilizó para construir la base de Haar. Por otro lado, P. Wojtaszczyk en 1982 prueba que el sistema de Franklin es una base incondicional de H^1

Descomposición Atómica. La Identidad de Calderón

Como ya hemos mencionado anteriormente, la idea de la teoría que tratamos es construir los elementos más simples con los cuales uno puede analizar cualquier elemento de un cierto espacio. Por ejemplo, en 1938, Marcinkiewicz estableció que el sistema de Haar da una descomposición atómica para $L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$. Asimismo, por definición, un átomo en $H^1(\mathbb{R}^n)$ es una función $a(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que existe una bola $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$(i) \quad a(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin B ;$$

$$(ii) \quad \|a\|_{L^2} \leq |B|^{-1/2}, \quad \text{donde } |B| \text{ denota la medida de Lebesgue de } B, \quad \text{y}$$

$$(iii) \quad \int_B a(x) dx = 0.$$

Diremos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ está en $H^1(\mathbb{R}^n)$ si existe una sucesión de átomos $a_n(x)$ y una sucesión λ_n de escalares tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n| < \infty \quad \text{y} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n a_n(x).$$

Siempre con la idea de representar elementos de un espacio en términos de funciones simples, Grossmann - Morlet parten de la función $\psi(t) = \frac{1}{(t+i)^2}$ la que tiene interesantes propiedades como ser regular; ella (y sus derivadas) tienden a cero cuando $|t| \rightarrow +\infty$, ie ψ es

localizable; ψ se comporta como una onda pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \text{esto es, } \psi \text{ es oscilante.}$$

Por estas razones, ellos llamaron una ondaleta a $\psi(t)$. Sigamos con los siguientes pasos. Construyamos la familia

$$\psi_{a,b}(t) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \text{con } a > 0, b \in \mathbb{R}$$

la que es llamada una familia de ondaletes, engendrada por la ondaleta "madre" ψ . Tal familia va a jugar el papel de una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ (ó $f \in H^2(\mathbb{R})$); siguiendo el modelo del análisis de Fourier se calculan los coeficientes de ondaletes de f vía $W(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$; esta es la etapa del análisis de f . La síntesis se obtiene superponiendo las ondaletes $\psi_{a,b}$ afectadas de sus respectivos coeficientes. Así se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b) \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$ (el caso $L^2(\mathbb{R}^n)$ es similar).

La Identidad de Calderón. Sea $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int \psi(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \quad \text{para todo } \xi \neq 0.$$

Pongamos $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$ y sean las dilataciones $\psi_t(x) = \frac{1}{t^n} \psi\left(\frac{x}{t}\right)$, $\tilde{\psi}_t(x) = \frac{1}{t^n} \tilde{\psi}\left(\frac{x}{t}\right)$. Consideremos las convoluciones

$$Q_t(f) = f * \psi_t \quad \text{y} \quad Q_t^*(f) = f * \tilde{\psi}_t.$$

Entonces la identidad de Calderón establece una descomposición de la identidad del espacio de funciones en la forma

$$I = \int_0^\infty Q_t Q_t^* \frac{dt}{t}. \quad (i)$$

Esta identidad fue establecida en un trabajo sobre teoría interpolación de espacios de Banach a inicios de los 60's. Por otro lado, siguiendo a Grossmann-Morlet, consideremos aun

$$\psi_{u,t}(x) = \frac{1}{t^n} \psi\left(\frac{x-u}{t}\right);$$

entonces los coeficientes de ondaletes de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ son definidos siendo $\alpha(u,t) = \langle f, \psi_{u,t} \rangle$. La reconstrucción de f es vía,

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(u,t) \psi_{u,t}(x) du \frac{dt}{t}. \quad (ii)$$

Un hecho interesante es saber que (i) es equivalente a (ii), y por ello decimos que la identidad de Calderón es una vía de llegada a la teoría de las ondaletes.

Strömberg. La Primera Base de Ondales

Como ya hemos mencionado debemos a J.O. Strömberg la construcción de la primera base ortonormal de ondaletes en su investigación de bases incondicionales para espacios de Hardy.

Cuando se estudia la versión real $H_{ne}^1(\mathbb{R})$ de $H^1(\mathbb{R})$ tenemos dos caminos diferentes para estudiar la descomposición de elementos de $H_{ne}^1(\mathbb{R})$: (i) la descomposición atómica según Coifman-Weiss y (ii) la búsqueda de bases incondicionales de $H_{ne}^1(\mathbb{R})$. Strömberg prueba que existe una función $\psi \in C^\infty$, con decrecimiento exponencial en el infinito, tal que $e^{j/2}\psi(2^j x - k)$, con $j, k \in \mathbb{Z}$, es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Un inconveniente en el trabajo de Strömberg es que su trabajo está restringido a las funciones llamadas "splin", que se caracterizan porque restringidas a intervalos de la forma $(\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$ se comportan como polinomios de cierto grado. La poca publicidad del trabajo, y esta restricción, hizo que el trabajo de Strömberg no tuviera la suficiente atención.

El tratamiento de la Señal

En las secciones anteriores hemos visto una serie de argumentos históricos y matemáticos, los que fueron evolucionando hasta llegar a la teoría de ondaletes a mediados de los 80's, siendo Strömberg (un matemático puro) y Grossmann-Morlet (matemáticos aplicados) los

primeros en elaborar la teoría en sus primeras formas. Es justo remarcar el nombre de *Yves Meyer* a quien le debemos la construcción de otra base de ondaletes así como una serie de trabajos relativos a la teoría; además, Meyer es uno de los líderes de la teoría a nivel internacional y tiene el mérito de formar una nueva pléyade de jóvenes analistas del más creciente equipo-ondaletes.

Las ondaletes constituyen un recurso matemático que es compatible con los métodos clásicos del tratamiento de la señal, pero es más óptimo porque va a las características esenciales de la señal. **Las ondaletes son los átomos del espacio en que uno trabaja;** ellas constituyen las vibraciones más cortas y las más elementales. Existen diferentes familias de ondaletes, que corresponden a diferentes descomposiciones. Como hemos mencionado, la idea es partir de una ondaleta "*madre*" $\psi(t)$; con ella se construye la familia de funciones elementales

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a^{1/2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{con } a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, Morlet parte de la función

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos 5t, \quad \text{con la cual construye sus ondaletes } \psi_{a,b}(t).$$

A mediados de los 80's, Stephane Mallat e Ingrid Daubechies han de dar contribuciones fundamentales en la teoría. Daubechies es una matemática aplicada que labora en los Laboratorios-Bell en New Jersey. Mallat estudia las propiedades de las aproximaciones multiresolución del espacio $L^2(\mathbb{R})$ (lo que definiremos en la próxima sección) y su relación con las bases ortonormales de ondaletes de $L^2(\mathbb{R})$. Descubre relaciones íntimas

entre las bases de ondaletes de Strömberg (y de otros) con los filtros "espejos en cuadratura", un algoritmo inventado en el contexto del teléfono digital.

Asimismo descubre relaciones con ciertos algoritmos llamados piramidales, y que se usan en el tratamiento numérico de la señal. Es decir, se establecen conexiones entre un tema de matemática pura con áreas de la matemática aplicada y de la física.

En base al programa de Mallat (teoría analítica de las ondaletes), Daubechies construye ondaletes con soporte compacto, esto es, una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ de la forma

$$2^{\frac{j}{2}} \psi_{\nu}(2^j x - k), \text{ con } j, k \in \mathbb{Z},$$

pero ahora los ψ_{ν} tienen por soporte al intervalo $[0, 2^{\nu+1}]$; además se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\nu}(x) dx = \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu} \psi_{\nu}(x) dx = 0$$

y $\psi_{\nu}(x)$ es suficientemente regular (posee k ν derivadas continuas). Se observa que si $\nu = 0$ entonces estamos en el sistema de Haar; es decir, Daubechies completa el trabajo de Haar (después de 80 años), lo que no es una simple extensión sino que la síntesis hecha con las ondaletes de Daubechies es de mejor calidad que la obtenida con el sistema de Haar. Por ello (entre otros argumentos) el suceso que tuvo las ondaletes de soporte compacto.

ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN DE $L^2(\mathbb{R})$

Y BASES DE ONDALETES

El análisis multiresolución es un concepto fundamental para la construcción de las bases de ondaletas y fue introducido por S. Mallat e Y. Meyer en 1986.

Definición. Un análisis multiresolución de $L^2(\mathbb{R})^n$ es una sucesión creciente $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios vectoriales cerrados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$(i) \quad \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \quad , \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$(ii) \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \forall j \in \mathbb{Z};$$

esto es,

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0.$$

$$(iii) \quad f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n;$$

esto es, V_0 es estable bajo traslaciones por elementos de \mathbb{Z}^n .

$$(iv) \quad \text{Existe una función } g(x) \in V_0 \text{ tal que la sucesión } (g(x-k))_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{ es una base de Riesz de } V_0.$$

En general, una sucesión $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$ es una **base de Riesz** en un espacio de Hilbert H si existen dos constantes positivas C, C_1 tal que para cualquier

sucesión de escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ de escalares, se tiene

$$C(\sum |\alpha_n|^2)^{1/2} \leq \|\sum \alpha_n e_n\|_H \leq C_1(\sum |\alpha_n|^2)^{1/2}$$

y si el espacio vectorial de las sumas finitas $\sum \alpha_n e_n$ es denso en H .

El análisis multiresolución $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es r -regular, con $r \in \mathbb{N}$, si g en (iv) es tal que las derivadas $D^\alpha g$, $|\alpha| \leq r$ son rápidamente decrecientes en el infinito, esto es,

$$|(1+|x|)^m D^\alpha g(x)| \leq C_m \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq r.$$

Observemos que los V_j pueden ser interpretados como el espacio de todas las aproximaciones posibles, a la resolución 2^{-j} ; esto es, permite aproximar cualquier función $f \in L^2$ con cualquier grado de exactitud. Además, la definición nos permite restringirnos a V_0 , pues los elementos de V_j pueden ser obtenidos de V_0 vía un producto - escala 2^{-j} . Si la escala 1 es asociada a V_0 , la escala 2^{-j} es asociada a V_j . Si F_j es la proyección de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre V_j , entonces (i) nos dice que:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F_j(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} F_j(x) = 0.$$

Ejemplo. Sea $r \in \mathbb{N}$ y V_0 el subespacio de las funciones $f \in C^{r+1}$ tales que sus restricciones al intervalo $[n, n+1)$ coinciden con un polinomio de grado $\leq r$.

Luego definimos $V_1 = \{f / f(\frac{x}{2}) \in V_0\}$, y de un modo general $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$. Entonces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ es un análisis multiresolución para $L^2(\mathbb{R}^1)$, donde

$$g(x) = (\chi * \dots * \chi)(x), \quad r+1 \text{ veces,}$$

con $*$ la convolución y $\chi(x)$ = función característica de $[0,1]$. Las funciones consideradas en este ejemplo son llamadas *funciones "splines"* de orden r , de gran uso en la física.

El análisis multiresolución es más simple y poderoso que los análisis vistos en la sección anterior, como lo es el análisis de Littlewood-Paley, por ejemplo; además, permite armonizar el análisis en la variable espacio con el análisis en la variable frecuencia, respetando el principio de incertidumbre de Heisenberg. Por otro lado, dado un análisis multiresolución de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es factible construirse una base ortonormal para V_0 en la forma siguiente.

"Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un análisis multiresolución de $L^2(\mathbb{R}^n)$; entonces existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$C_1 \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \leq C_2 \text{ " .}$$

Ahora se define $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vía

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}}.$$

Entonces tenemos que $(\varphi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ es una base ortogonal de V_0 . Aún más, si $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ fuese un análisis multiresolución r -regular de $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces la función φ es rápidamente decreciente en el infinito, esto es,

$$|(1+|x|)^m D^\alpha \varphi(x)| \leq C_m, \quad \text{para } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq r \\ \text{y } \forall m \in \mathbb{N}.$$

Pasemos ahora a describir las ondaletes y su relación con el análisis multiresolución. Sea $m \in \mathbb{N}$; la función de variable real $\psi(x)$ es llamada una ondaleta ("madre") de clase m si se tiene:

(i) $D^\alpha \psi(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para $|\alpha| \leq m$, con $m \geq 0$.

Esta es la **condición de regularidad** de ψ .

(ii) $D^\alpha \psi(x)$, $|\alpha| \leq m$, es de decrecimiento rápido en el infinito. Esta es la **condición de localización** de ψ .

(iii) $\psi(x)$ es **oscilante**, lo que significa

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0 \quad \text{para } 0 \leq k \leq m.$$

(iv) La familia $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$, es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Las funciones $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$ son llamadas las ondaletes engendradas por $\psi(x)$.

Dado un análisis multiresolución r -regular en $L^2(\mathbb{R})$, ¿cómo construir una ondaleta ψ ? ... Por lo mencionado anteriormente sabemos que si $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ es un análisis multiresolución r -regular, entonces se puede construir una función $\varphi \in V_0$, la que es rápidamente decreciente en el infinito y tal que $(\varphi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 .

Pues bien, la existencia de φ es el punto de partida para la construcción de la ondaleta ψ . Antes de describir los pasos esenciales para la construcción de ψ , observemos que por construcción de análisis multiresolución, el subespacio V_{j+1} lo podemos escribir en la forma

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (W_j \text{ es el complemento ortogonal de } V_j \text{ en } V_{j+1}).$$

Además tenemos

$$L^2 = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \quad \text{y} \quad V_n = \bigoplus_{j=-\infty}^{n-1} W_j.$$

El resultado central, debido a Mallat-Meyer, es el

Teorema

“Dado un análisis multiresolución r -regular, existe una función ψ en W_0 tal que las $D^\alpha \psi(x)$ son rápidamente decrecientes en el infinito para $|\alpha| \leq r$, y tal que

$$(\psi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es una base ortonormal de } W_0.”$$

Observemos que vía un cambio de escala, la sucesión $(2^{j/2} \psi(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j ; j fijo. Entonces, $(2^{j/2} \psi(2^j x - k))_{j, k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Nota. En la construcción de la ondaleta ψ damos énfasis a la condición (iv) de su definición. Para los detalles del teorema ver [Me 1] y [Tch].

Bosquejo de la Prueba del Teorema

○ $V_1 = V_0 \oplus W_0$; luego si $f \in V_0$, $f(x) = \sum_k c_k g(x-k)$;
luego

$$\hat{f}(\xi) = \sum_k c_k e^{-ik\xi} \hat{g}(\xi) \equiv p(\xi) \hat{g}(\xi),$$

siendo $p(\xi) = \sum_k c_k e^{-ik\xi}$ una función 2π -periódica.

Siendo $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ equivalente a $(\sum_k |c_k|^2)^{1/2}$ por definición de análisis multiresolución, concluimos que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \simeq \|p\|_{L^2(-\pi, \pi)}.$$

Por otro lado, desde que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |p(\xi)|^2 \left(\sum_k |\hat{g}(\xi+2\pi k)|^2 \right) d\xi \quad \text{y } f \in L^2(\mathbb{R})$$

se concluye que existen dos constantes positivas c_1, c_2 tal que

$$c_1 \leq \sum_k |\hat{g}(\xi+2\pi k)|^2 \leq c_2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

una desigualdad ya mencionada líneas atrás; ella permite definir $\varphi \in V_0$ vía (mencionada también)

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{g}(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi+2\pi k)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{esto es}$$

$$\hat{g}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi+2\pi k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Luego $\forall f \in V_0$ es representado por:

$$\hat{f}(\xi) = p(\xi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi+2\pi k)|^2 \right)^{1/2} \hat{\varphi}(\xi) \equiv m(\xi) \hat{\varphi}(\xi).$$

Se tiene la identidad $\sum_k |\hat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 = 1$, lo que permite establecer

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \|m\|_{L^2(-\pi, \pi)}.$$

Si $m(\xi) = \sum_k a_k e^{-ik\xi}$ (serie de Fourier) tenemos

$$\hat{f}(\xi) = \left(\sum_k a_k e^{-ik\xi} \right) \hat{\varphi}(\xi).$$

Luego (antitransformando)

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi(x-k) \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^2} = \left(\sum_k |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Así, $(\varphi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 .

También se tiene que φ y sus primeras n derivadas son rápidamente decrecientes en el infinito [se tiene $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k g(x-k)$, donde los γ_k son los coeficientes de Fourier del desarrollo de la C^∞ - periódica función $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2)^{-\frac{1}{2}}$; ahora basta observar que los γ_k y $g(x-k)$ son rápidamente decrecientes].

o En esta segunda etapa se establece algunas relaciones entre V_0 y V_1 . Sabemos que $V_0 \subset V_1$ y que V_1 es obtenido de V_0 vía $f(x) \in V_1 \Leftrightarrow f(\frac{x}{2}) \in V_0$. Luego,

$$\varphi \in V_1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = 2 \sum_k a_k \varphi(2x-k).$$

Tomando transformada de Fourier a esta representación obtenemos

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (i)$$

donde $m_0(\xi) = \sum_k a_k e^{-ik\xi}$ es una función C^∞ , 2π -periódica tal que

$$m_0(0) = 1.$$

Aplicando reiteradamente (i) obtenemos

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \quad (\text{ii})$$

Desde que $\sum_k |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$, se tiene también

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}(0) = 1.$$

Luego (ii) es

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \quad (\text{iii}).$$

○ **Construcción de la Ondalete ψ .** Con tal objetivo analizaremos el subespacio W_0 , que sabemos satisface $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Sea $f \in W_0$, entonces (argumento similar) existe una función 2π -periódica $p(\xi)$ tal que

$$\hat{f}(\xi) = p\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Sabemos que si $h \in V_0$ entonces

$$\hat{h}(\xi) = m(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = m(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

siendo $m(\xi)$ una función 2π -periódica.

Luego $f \perp V_0$ significa

$$\int_0^{4\pi} p\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} m(\xi) d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \left(p\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} + p\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \right) \overline{m(\xi)} d\xi = 0$$

para todo $m(\xi) \in L^2(T)$. Por tanto tenemos

$$p\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} + p\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} = 0$$

y por tanto el vector $(p\left(\frac{\xi}{2}\right), p\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right))$ es ortogonal al vector (unitario) $(m_0\left(\frac{\xi}{2}\right), m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right))$, y por tanto es proporcional al vector $e^{-i\frac{\xi}{2}} \overline{(m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right), -m_0\left(\frac{\xi}{2}\right))}$, esto es, existe una función 2π -periódica $q(\xi)$ tal que

$$p\left(\frac{\xi}{2}\right) = e^{-i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} q(\xi) = q(\xi) m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \forall \xi$$

donde

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}.$$

Por lo tanto

$$\hat{f}(\xi) = p\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = q(\xi) m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Luego, si definimos ψ vía

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{1}{m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)} \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$$

tendremos

$$\hat{f}(\xi) = q(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

Desde que también $|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + \pi)|^2 = 1$ se tiene

$$\sum_k |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$$

y por tanto

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \|q\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

donde recordamos que $f \in W_0$.

Estas dos últimas propiedades implican (teorema!) que la familia $(\psi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0 , como deseábamos.

Además, se tiene para ψ la representación

$$\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \bar{C}_k \varphi(x-k)$$

y por tanto ψ tiene la misma regularidad y decrecimiento rápido en el infinito como lo tiene φ .

Finalmente, también tenemos $\int \psi = 0$, esto es ψ es una ondaleta. ■

YVES MEYER, su contribución a las Ondaletes

A través de este manuscrito nos hemos referido reiteradamente al trabajo hecho por el Profesor Yves Meyer, de la Universidad de Paris, en el desarrollo y difusión de la teoría de ondaletes (ver también Comentarios Finales). Debemos remarcar que aun cuando la formalización de la teoría fue hecha en la segunda mitad de los años 80's, sin embargo, Meyer hizo el gran esfuerzo en escribir un tratado sobre las ondaletes (el tercer volumen en colaboración con R. Coifman) (ver Comentarios 2). La obra es un tanto técnica, pero está presentada en forma estimulante y completa. Es un reto el poder leerla y enseñarla.

El Prof. Meyer ha formado muchos alumnos, hoy investigadores en diversos sectores del análisis armónico y otras áreas del análisis. Asimismo ha escrito diversos artículos sobre divulgación de la teoría de ondaletes (por ejemplo, [Me]). Pascal Auscher, Albert Cohen, Stéphane Jaffard, entre otros de sus alumnos, vienen aportando una serie de resultados tanto al interior como en las aplicaciones de las ondaletes.

COMENTARIOS FINALES

1. Una cuestión recíproca del teorema (bosquejado en la sección anterior) es probado en A. Cohen [Coh] y P.G. Lemarié [Le 1].* En el primer trabajo se clarifica las relaciones existentes entre las técnicas de códigos en sub-bandas de señales numéricas con la teoría del análisis multiresolución y las ondaletes. El segundo trabajo está interesado en las funciones de soporte compacto, en particular en los soportes mínimos.
2. El tratado [Me 1], [Me 2] y [Me - Co], de Meyer, Meyer-Coifman, es una obra completa de la teoría de ondaletes. El primer volumen trata sobre los fundamentos de la teoría y el estudio de ciertos espacios funcionales con la ayuda de las ondaletes. El segundo libro está consagrado a los nuevos Operadores de Calderón-Zygmund así como al famoso teorema $T(1)$ de David-Journé (1983) y algunas variantes. El tercer volumen trata las aplicaciones de los operadores de Calderón-Zygmund, así se estudian: los espacios generalizados de Hardy $H^p(D)$; la teoría de los operadores multilineales; la conjetura de Kato; se estudia el cálculo pseudodiferencial con coeficientes irregulares.
3. La teoría de ondaletes permite realizar una serie de investigaciones en variados campos, como son (por ejemplo): los operadores integrales singulares, las ecuaciones en derivadas parciales, espacios de fun-

* Una forma explícita del teorema recíproco es dada en la tesis de Magister por Andrés Beltrán. PUCP.

ciones, ... , en el análisis numérico, procesos estocásticos, geosísmica, teoría de señales e imágenes, en la física teórica, en la astronomía, entre otros. Las ondaletes están penetrando en la tecnología contemporánea, con proyecciones al futuro. Según [Ga - Wi] se tienen las Escuelas-Ondaletes:

- (i) Yves Meyer y su grupo en la "Ecole Polytechnique" quienes trabajan en la caracterización de los espacios de funciones, en las ondaletes ortogonales,...
- (ii) Alex Grossmann y su equipo de Marsella (Francia) trabajan en las aplicaciones a la física teórica, en el análisis y síntesis del sonido.
- (iii) Ingrid Daubechies, de los Laboratorios Bell, introdujo las ondaletes de soporte compacto; trabaja también en las aplicaciones, en particular a la física.
- (iv) Stéphane Mallat (del Dpto. de Computación, Instituto Courant, New York) aplica las ondaletes al tratamiento de la imagen.

BIBLIOGRAFIA

- [Coh]. *Cohen, A.* "Ondelettes, Analyses Multirésolutions et Traitement Numerique du Signal". Université Paris IX. 1990.
- [Ch]. *Chui, Ch. K.* "An Introduction to Wavelets" Ac. Press. 1992.
- [D]. *David, G.* "Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces". Springer-Verlag. 1992.
- [Fr]. *Franks, L. E.* "Teoría de la Señal". Reverté. 1975.
- [Ga-Wi]. *Gasquet, C.*
Witomski, P. "Analyse de Fourier et Applications". Masson. 1990.
- [Gn]. *Gnavi, G.* "Sistemas Digitales y Analógicos". CLAMI. 1981.
- [Le]. *Lemarié, P. G.* "Ondelettes et Opérateurs". Université de Paris-Sud. 1990.
- [Le1]. *Lemarié, P. G.* "Fonctions à Support Compact dans les Analyses Multirésolutions". Revista Mat. Iberoamericana. 1991.
- [Ma]. *Mallat, S.* "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation". IEEE. PAMI. 1989.
- [Ma1]. *Mallat, S.* "Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$ " Trans. A.M.S. 1989.
- [Me]. *Meyer, Y.* "Ondelettes et Applications". CEREMADE 1992.

- [Me1]. Meyer, Y. "Ondelettes et Opérateurs". I. Ondelettes. Hermann. 1990.
- [Me2]. Meyer, Y. "Ondelettes et Opérateurs" II. Opérateurs de Calderón-Zygmund. Hermann. 1990.
- [Me-Co]. Meyer, Y.
Coifman, R. "Ondelettes et Opérateurs" III. Opérateurs Multilinéaires. Hermann. 1991.
- [Me-Ja-Ri]. Meyer, Y.
Jaffard, S.
Rioul, O. "L'Analyse par Ondelettes"
Pour la Science. 1987.
- [Tch]. Tchamitchian, Ph. "On Application of Wavelets bases to Operator Theory". Córdoba. 1991.

Carlos Cueto Fernandini 273
PUEBLO LIBRE, LIMA 21. PERU.
e-mail: jortiz@pucp.pe

RECIBIDO: FEBRERO 1993.