PRO MATHEMATICA: Vol. VII, Nos. 13-14, 1993

DETERMINANDO AUTOMORFISMOS POLINOMIAIS ATRAVÉS DE SUAS FACES

Nivaldo Nunes M. Júnior*

RESUMO

Nestas notas mostramos que um R-automorfismo em $R[X_1,...,X_n]$ é unicamente determinado pelos seus polinômios-face, onde $n \geq 2$ e R é um anel reduzido, comutativo e com unidade. Elas foram integralmente baseadas no artigo de W.Li, em [1].

1. INTRODUÇÃO

Estabeleceremos inicialmente alguns conceitos e resultados necessários. No que se segue, os anéis considerados são sempre comutativos.

Seja R um anel e I um ideal em R. O *radical* ou *nil-radical* de I, que denotaremos por $\sqrt{I}$, é o conjunto dado por

$$\sqrt{I} := \{a \in R;\ a^n \in I, \text{ para algum } 1 \leq n \in \mathbf{Z}\}.$$

O número n na definição acima pode depender de a.

* Estudante do Mestrado em Matemática no IMPA, BRASIL.

Diremos que um anel R é *reduzido* se $\sqrt{(0)} = \{0\}$, isto é, se o único elemento nilpotente de R for o elemento nulo.

Um conjunto parcialmente ordenado $T \neq \phi$ é dito indutivo se todo subconjunto totalmente ordenado $S \subset T$ possui uma cota superior em T.

O *Lema de Zorn* nos diz que se um conjunto parcialmente ordenado T é indutivo, então T possui um elemento maximal. Necessitaremos do Lema de Zorn para provar a proposição seguinte. Uma prova deste lema pode ser encontrada, por exemplo, en [4].

Proposição 1 *Seja R um anel. Então*

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{\substack{P \subset R \\ \text{ideal primo}}} P.$$

Corolário 1 *Seja R um anel reduzido. Então*

$$\bigcap_{\substack{P \subset R \\ \text{ideal primo}}} P = 0.$$

Demonstração da proposição 1:

Como todo ideal contém o elemento nulo, é imediato que todo elemento nilpotente pertence a todo ideal primo. Logo

$$\sqrt{(0)} \subset \bigcap_{\substack{P \subset R \\ \text{ideal primo}}} P.$$

Para mostrar a outra inclusão, vamos mostrar que se $u \in R$ não é nilpotente então existe um ideal primo em R que <u>não</u> contém u.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os ideais I que não contém nenhuma potência de u. Como u não é nilpotente, o ideal (0) não contém nenhuma potência de u e, portanto, $\mathcal{F}$ não é vazio. Para $A, B \in \mathcal{F}$, considere a seguinte ordem parcial

$$A \geq B \Leftrightarrow A \supseteq B.$$

Segue-se que $\mathcal{F}$ com esta ordem é indutivo.

Seja $\mathcal{I}$ o elemento maximal de $\mathcal{F}$ dado pelo Lema de Zorn. Temos que $u \notin \mathcal{I}$ e afirmamos que $\mathcal{I}$ é um ideal primo em R. Com efeito, sejam $x,y \in R$ tais que $x,y \notin \mathcal{F}$. Então $\mathcal{I} + (x) > \mathcal{I}$ e daí existe m tal que $u^m \in \mathcal{I} + (x)$. De forma análoga, existe n tal que $u^n \in \mathcal{I} + (y)$. Assim, $u^m u^n = u^{m+n} \in \mathcal{I} + (xy)$ e, como $u^{m+n} \notin \mathcal{I}$, segue-se que $xy \notin I$, mostrando que $\mathcal{I}$ é um ideal primo. ■

Lema 1 *Seja R um anel com unidade e u um elemento nilpotente em R. Então 1-u é um elemento invertível em R.*

Demonstração:

Seja $n \in \mathbf{Z}_+$ tal que $u^n = 0$. Então

$$(1-u)(1+u+\ldots+u^{n-1}) =$$
$$1+u+\ldots+u^{n-1} - u - \ldots - u^{n-1} - u^n = 1$$

e portanto $1-u$ é um elemento invertível em R. ■

Proposição 2 *Seja R um anel com unidade e* $f(X) \in R[X]$, $f(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n$. *Então* $f(X)$ *é invetível em* $R[X]$ *se e somente se* a_0 *é invertível e* $a_1, \ldots, a_n$ *são nilpotentes em R.*

Demonstração: ($\Rightarrow$)

Seja $g(X) \in R[X]$, $g(X) = b_0 + \ldots + b_m X^m$, tal que $f(X)g(X) = 1$. Então:

$$\begin{cases} c_0 & := a_0b_0 = 1 \\ c_1 & := a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ & \vdots \\ c_{n+m} & := a_nb_m = 0 \end{cases}$$

de onde obtemos que a_0 e b_0 são elementos invertíveis em R.

Vamos mostrar que a_n é nilpotente em R. Temos dois casos:

$$\begin{cases} m \leq n \\ n < m. \end{cases} \quad \text{ou}$$

Queremos considerar um índice r tomando os valores $0,1,\ldots,m$. No primeiro caso, para todo $0 \leq r \leq m$:

$$c_{m+n-r} = a_nb_{m-r} + a_{n-1}b_{m-r+1} + \ldots + a_{n-r}b_m = 0. \quad (1)$$

No segundo caso podemos ter $0 \leq n < r \leq m$, e, daí,

$$c_{m+n-r} = a_nb_{m-r} + a_{n-1}b_{m-r+1} + \ldots + a_0b_{m+n-r} = 0. \quad (2)$$

Afirmamos que $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$, para todo $0 \leq r \leq m$. Com efeito, para $r = 0$, $a_nb_m = c_{n+m} = 0$. Suponhamos, por indução, que a afirmação seja válida para cada $1,2,\ldots, r-1$. Novamente temos que considerar dois casos (note que sempre $r \leq m$):

- $r \leq n$:
  Neste caso vale a equação (1). Multiplicando-a por a_n^r, vem

$$0 = a_n^{r+1}b_{m-r} +$$

$$\underbrace{a_{n-1}(a_n^r b_{m-(r-1)})+\ldots+a_{n-r+1}a_n^{r-2}(a_n^2 b_{m-1})+a_{n-r}a_n^{r-1}(a_n b_m)}_{\text{cada parcela é igual a 0 pela hipótese de indução}}$$

Logo, neste caso, nossa afirmação vale.

- $n < r$:
  Aqui vale a equação (2). Multiplicando-a também por a_n^r, temos:

$$0 = a_n^{r+1}b_{m-r}+\underbrace{a_{n-1}(a_n^r b_{m-(r-1)})+\ldots+a_0 a_n^n(a_n^{r-n+1}b_{m+n-r})}_{\text{cada parcela é igual a 0 pela hipótese de indução}}$$

  Portanto, também neste caso, nossa afirmação é válida.

Assim, para $r = m$, temos que $a^{m+1}b_0 = 0$. Como b_0 é um elemento invertível, a_n é nilpotente em R.

Decorre então que a_nX^n é nilpotente em $R[X]$. Pelo Lema 1, vem que $f_1(X) := f(X)-a_nX^n$ é um elemento invertível em $R[X]$. Repetindo o que fizemos para $f_1(X)$, concluímos que a_{n-1} é nilpotente e, da mesma forma, que $a_{n-2},\ldots,a_1$ também o são.

($\Leftarrow$)

De $a_1,\ldots,a_n$ nilpotentes em R vem que $a_1X,\ldots,a_nX^n$ são nilpotentes em $R[X]$. Notando que a_0 é invertível em $R[X]$ e aplicando sucessivamente o Lema 1, obtemos que $a_0 + a_1X, a_0 + a_1X + a_2X^2,\ldots,a_0 + a_1X +\ldots+ a_nX^n = f(X)$ são elementos invertíveis em $\mathbf{R}[X]$. ■

Corolário 2 *Seja R um anel reduzido. Se $f(\underline{X}) \in R[\underline{X}]$ é um invertível em $R[\underline{X}]$, então $f = f(\underline{X}) \in R^*$, isto é, f é um elemento invertível em R.*

Denotaremos por $\underline{X}$ a n-upla $X_1,\ldots,X_n$ e por $\underline{Y}$ a n-upla $Y_1,\ldots,Y_n$.

Seja R um anel e $f(\underline{X}) \in R[\underline{X}]$ um polinômio em n variáveis. Os *polinômios-face* ou as *faces* de f são os polinômios $f_{(i)} \in R[X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_n]$ dados por

$f_{(i)}(X_1,..,\hat{X}_i,..,X_n):=f(X_1,..,X_{i-1},0,X_{i+1},..,X_n)$,

onde $\hat{X}_i$ indica a supressão da variável X_i.

Un *R-automorfismo* $F = (f_1,\ldots,f_n)\colon R[\underline{X}] \longrightarrow R[\underline{X}]$, $f_1,\ldots,f_n \in R[\underline{X}]$ é um automorfismo em $R[\underline{X}]$ que preserva o anel de base R, isto é, $F|_R = id$. Se $h(X_1,\ldots,X_n)$ é um polinômio em $R[\underline{X}]$, então aplicar F em h significa substituir cada uma das indeterminadas X_i pelos polinômios $f_i(\underline{X})$. Mais explicitamente:

$F(h(X_1,\ldots,X_n)) = h(f_1(\underline{X}),\ldots,f_n(\underline{X})) \in R[\underline{X}]$.

As *faces* do R-automorfismo F são os polinômios $f_{i(j)}$.

2 O TEOREMA

O objetivo destas notas é mostrar que um R-automorfismo em $R[\underline{X}]$ é determinado unicamente pelas suas faces. Mais precisamente:

Teorema 1 (Wei Li [1]) *Seja R um anel reduzido, comutativo e com unidade. Sejan $F = (f_1,\ldots,f_n)$, $F' = (f'_1,\ldots,f'_n)\colon R[\underline{X}] \longrightarrow R[\underline{X}]$ R-automorfismos, com $n \geq 2$. Se F e F' tem as mesmas faces, isto é, $f_{i(j)} = f'_{i(j)}$ para todo i,j, então $F = F'$.*

Em outras palavras, este teorema nos diz que dados os n^2 polinômios $f_{i(j)}$, se existir um R-automorfismo F tal que suas faces sejam exatamente estes polinômios, então ele é o único com esta propiedade. Mais ainda, se R é um corpo, então é possível reconstruir F a partir dos $f_{i(j)}$ e a reconstrução é efetiva(pode ser realizada num número finito de passos). O artigo de Kwieciński[5] mostra como fasê-lo.

A condição de que R seja reduzido é, num certo sentido, a melhor possível, como será mostrado através de um exemplo ao fim destas notas.

Para provarmos o teorema necessitamos de um lema, o qual é devido, com ligeiras mdificações, a um dado por van den Essen, em [2].

Lema 2 (van den Essen[2]) *Seja* $F=(f_1,\ldots,f_n):R[\underline{X}]\to R[\underline{X}]$ *um* R*-automorfismo e* $G=(g_1,\ldots,g_n)$ *o seu inverso. Sejam*

$$I:=(Y_1 - f_1(\underline{X}),\ldots,Y_n - f_n(\underline{X}))R[\underline{X},\underline{Y}],$$
$$J:=(X_1 - g_1(\underline{Y}),\ldots,X_n - g_n(\underline{Y}))R[\underline{X},\underline{Y}].$$

Então $I=J$.

Demonstração

De $G=F^{-1}$, temos que $g_i(f_1(\underline{X}),\ldots,f_n(\underline{X})) = X_i$.

Escrevemos $f_i = f_i(\underline{X})$. Então, para cada $i = 1,\ldots,n$, temos:

$$g_i(Y_1,\ldots,Y_n) = \sum \text{cte}.Y_1^{\alpha_1}\ldots Y_n^{\alpha_n}.$$

Escrevendo $Y_j = (Y_j - f_j) + f_j$, segue-se que

$$g_i(Y_1,\dots,Y_n) = g_i((Y_1-f_1)+f_1,\dots,(Y_n-f_n)+f_n)$$
$$= \sum \text{cte.}((Y_1-f_1)+f_1)^{\alpha_1}\dots((Y_n-f_n)+f_n)^{\alpha_n})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\underline{X},\underline{Y})(Y_j-f_j)+ \underbrace{\sum \text{cte.}f_1^{\alpha_1}\dots f_n^{\alpha_n}}_{g_i(f_1,\dots,f_n)}$$

com $a_{ij}(\underline{X},\underline{Y})\in R[\underline{X},\underline{Y}]$. A última expressão foi obtida agrupando-se os termos que contém (Y_j-f_j) e os que contém potências do tipo $f_1^{\alpha_1}\dots f_n^{\alpha_n}$(usando o binômio de Newton; note que estamos trabalhando em anéis comutativos).Daí:

$$g_i(Y_1,\dots,Y_n)-g_i(f_i(\underline{X}),\dots,f_n(\underline{X})) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\underline{X},\underline{Y})(Y_j-f_j(\underline{X}))\in I$$

Como $g_i(f_1(\underline{X}),\dots,f_n(\underline{X}))=X_i$, vem que $X_i-g_i(Y_1,\dots,Y_n)\in I$, $i=1,\dots,n$. Logo $J \subseteq I$.

De forma análoga, obtemos $I \subseteq J$. Portanto, $I = J$. ■

Demonstração do teorema:

Sejam $G = (g_1,\dots,g_n)$, $G' = (g_1',\dots,g_n')$ os R-automorfismos inversos de F e F' respectivamente. Pelo lema 2,

$$I:=(Y_1-f_1(\underline{X}),\dots,Y_n-f_n(\underline{X}))R[\underline{X},\underline{Y}] =$$
$$(X_1-g_1(\underline{Y}),\dots,X_n-g_n(\underline{Y}))R[\underline{X},\underline{Y}] =: J.$$

Sejam

$$\begin{aligned} I_1 &:= (Y_1-f_{1(1)},\dots,Y_n-f_{n(1)})R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}], \\ J_1 &:= (g_1(\underline{Y}),X_2-g_2(\underline{Y}),\dots,X_n-g_n(\underline{Y}))R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}], \end{aligned} \qquad (3)$$

os ideais obtidos fazendo-se $X_1=0$. Afirmamos que $I_1=J_1$. Com efeito, seja $\Pi_{(1)}:R[\underline{X},\underline{Y}] \longrightarrow R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}]$ a projeção que faz as associações

$$
\begin{aligned}
X_1 &\longmapsto 0,\\
X_i &\longmapsto X_i,\ \ i=2,\dots,n,\\
Y_j &\longmapsto Y_j,\ \ j=1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

$\Pi_{(1)}$ é um homomorfismo sobrejetor. Logo, se $H = (h_1,\dots,h_n)R[\underline{X},\underline{Y}]$ é um ideal em $R[\underline{X},\underline{Y}]$, com $h_1,\dots,h_n \in R[\underline{X},\underline{Y}]$, então

$$\Pi_{(1)}(H) = (\Pi_{(1)}(h_1),\dots,\Pi_{(1)}(h_n))R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}].$$

Assim, $\Pi_{(1)}(I)=I_1$ e $\Pi_{(1)}(J)=J_1$. Como $I=J$, então $I_1=J_1$, o que mostra que nossa afirmação é verdadeira.

Similarmente

$$
\begin{aligned}
&(Y_1-f'_{1(1)},\dots,Y_n-f'_{n(1)})R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}] = \\
&(g'_1(\underline{Y}),X_2-g'_2(\underline{Y}),\dots,X_n-g'_n(\underline{Y}))R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}], \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Por hipótese, $f_{i(1)} = f'_{i(1)}$, para todo i. Portanto, de (3) e (4),

$$
\begin{aligned}
&(g_1(\underline{Y}),X_2-g_2(\underline{Y}),\dots,X_n-g_n(\underline{Y}))R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}] = \\
&(g'_1(\underline{Y}),X_2-g'_2(\underline{Y}),\dots,X_n-g'_n(\underline{Y}))R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}].
\end{aligned}
$$

Logo podemos escrever

$$g_1(\underline{Y}) = u_1g'_1(\underline{Y}) + \sum_{i=2}^{n} u_i(X_i-g'_i(\underline{Y})),$$

onde $u_i \in R[X_2,\dots,X_n,\underline{Y}]$.

Fazendo a substituição

$$
\begin{aligned}
X_i &\longmapsto g'_i(\underline{Y}), &\quad i=2,\dots,n\\
Y_j &\longmapsto Y_j, &\quad j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

obtemos

$$g_1(\underline{Y})=a_1(\underline{Y})g'_1(\underline{Y}),$$

onde $a_1 = a_1(\underline{Y}) \in R[\underline{Y}]$ (as variáveis X_i presentes em u_1 foram substituídas pelos polinômios $g'_i(\underline{Y})$ que possue somente variáveis em $\underline{Y}$).

De maneira análoga concluímos que

$$g'_1(\underline{Y})=b_1(\underline{Y})g_1(\underline{Y}),$$

com $b_1=b_1(\underline{Y}) \in R[\underline{Y}]$. Então

$$g_1(\underline{Y})=a_1b_1g_1(\underline{Y}) \Rightarrow (1-a_1b_1)g_1(\underline{Y}) = 0. \tag{5}$$

Fazendo a substituição

$$Y_i \longmapsto f_i(\underline{Y}), \quad i=1,\ldots,n$$

em (5) e escrevendo $f_i=f_i(\underline{Y})$, temos que

$$(1-a_1(f_1,\ldots,f_n)b_1(f_1,\ldots,f_n))g_1(f_1,\ldots,f_n) = 0 \Rightarrow$$
$$(1-\tilde{a}_1\tilde{b}_1)Y_1 = 0 \Rightarrow \tilde{a}_1\tilde{b}_1= 1,$$

onde $\tilde{a}_1=a_1(f_1(\underline{Y}),\ldots,f_n(\underline{Y}))$ *e* $\tilde{b}_1=b_1(f_1(\underline{Y}),\ldots,f_n(\underline{Y}))$. Então $\tilde{a}_1$ é um elemento invertível em $R[\underline{Y}]$. Como R é reduzido, temos, pelo Corolário 2 que $\tilde{a}_1$ é um elemento invertível em R.

Como $\tilde{a}_1=F(a_1) \in R^*$, temos que $G(F(a_1))=a_1$ R^* (pois G é um R-automorfismo), ou seja, a_1 é um elemento invertível em R.

Procedendo de maneira análoga, obtemos:

$$g_2(\underline{Y}) = a_2g'_2(\underline{Y}),$$
$$\vdots$$
$$g_n(\underline{Y}) = a_ng'_n(\underline{Y}),$$

onde $a_2,\ldots,a_n$ são elementos invertíveis de R. Então, para cada $i=1,\ldots,n$, temos

$$f_i(a_1g'_1,\ldots,a_ng'_n) = f_i(g_1,\ldots,g_n) = X_i = f'_i(g'_1,\ldots,g'_n).$$

Aplicando F' (isto é, fazendo $X_i \longmapsto f'_i$), vem

$$f_i(a_1g'_1(F'(\underline{X})),\ldots,a_ng'_n(F'(\underline{X}))) = $$
$$f'_i(g'_1(F'(\underline{Y})),\ldots,g'_n(F'(\underline{X})))$$
$$\Rightarrow \quad f_i(a_1X_1,\ldots,a_nX_n) = f'_i(X_1,\ldots,X_n),\ i=1,\ldots,n. \qquad (6)$$

Para um dado i fixo, queremos mostrar que $a_i=1$. Vamos assumir, por um momento, que R é um domínio.

Cada polinômio $h \in R[\underline{X}]$ pode ser visto como um elemento do anel de polinômios $R[X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_n][X_i]$ e daí ser escrito como

$$h(X_i) = c_0+c_1X_i+\ldots+c_mX_i^m,$$

onde $c_0,\ldots,c_n \in R[X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_n]$. Dito isso, afirmamos que existe j, $1\leq j\leq n$, tal que o coeficiente c_1 de X_i em f_j possui termo constante não nulo. De fato, suponhamos que isso não aconteça. Ora, se p, q são polinômios sem termos constantes e r é um polinômio qualquer, então $p+q$ e $p.r$ são polinômios sem termos constantes. Então, para todo $h\in R[X_1,..,X_n]$, a imagen de h por F, $h(f_1(\underline{X}),\ldots,f_n(\underline{X}))$, é tal que o coeficiente de X_i é um polinômio em $R[X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_n]$ sem termo constante. Isso significa que não existe $h \in R[\underline{X}]$ tal que $F(h)=X_i$, o que contradiz o fato de que F é sobrejetiva. Logo, nossa afirmação vale.

Agora, para um $k \neq i$ qualquer (que existe pois $n \geq 2$),

$$0 \neq f_j(\ldots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \ldots) = f'_j(\ldots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \ldots).$$

($f_{j(k)}$ é não nulo porque o coeficiente X_i de f_j possui termo constante não nulo).
Da equação (6) temos também que

$$f_j(\ldots, a_{k-1}X_{k-1}, 0, a_{k+1}X_{k+1}, \ldots) = f'_j(\ldots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \ldots)$$

Comparando os coeficientes de X_i, considerando que R é um domínio e como escolhemos f_j tal que o coeficiente de X_i em f_j é não nulo, vem que $a_i=1$.

Voltemos ao caso em que R é um anel reduzido. Seja P um ideal primo em R. Então $\bar{R}:=R/P$ é um domínio. Seja $\overline{a_i}$ a classe de equivalência de a_i e $\bar{f}_i$ e $\bar{f}'_i$ os polinômios correspondentes a f_i e f'_i em $\bar{R}[\underline{X}]$ respectivamente.Então $\bar{F}$ e $\bar{F}'$ tem as mesmas faces, e, como $\bar{R}$ é um domínio, concluímos, pelo que fizemos acima, que $\overline{a_i}=\bar{1}$, $i=1,\ldots,n$, isto é, $a_i-1 \in P$. Como P é um ideal primo arbitrário, temos que

$$a_i - 1 \in \bigcap_{\substack{P \subset R \\ \text{ideal primo}}} P = \sqrt{(0)} = \{0\},$$

pelo Corolário 1. Logo $a_i=1$ para cada i e, conseqüentemente, o teorema está provado. ■

3 EXEMPLOS

Exemplo 1.

Mostraremos agora que se R não for reduzido, o Teorema não vale em geral.

Seja $a \in R$ tal que $a^2=0$, $a \neq 0$. Então $F:=(f_1, f_2)$

$$f_1(X_1,X_2) := X_1+aX_1X_2$$
$$f_2(X_1,X_2) := X_2$$

define um R-automorfismo em $R[X_1,X_2]$, cuja inversa $G=(g_1,g_2)$ é

$$g_1(X_1,X_2) := X_1-aX_1X_2$$
$$g_2(X_1,X_2) := X_2.$$

Note que se a^2 fosse diferente de 0, F não seria um R-automorfismo. As faces de F são:

$$f_{1(1)}=0, \qquad f_{2(1)}=X_2,$$
$$f_{1(2)}=X_1, \qquad f_{2(2)}=0.$$

Observe que $\tilde{F}:=(\tilde{f_1},\tilde{f_2})$ dado por $\tilde{f_1}:=X_1$, $\tilde{f_2}:=X_2$ é um R-automorfismo distinto de F com as mesmas faces.

Exemplo 2.
Quando definimos as faces de um polinômio, o fizemos "zerando"apenas uma de suas coordenadas e exigindo $n\geq 2$. Assim, a cada polinômio em $R[X_1,...,X_n]$ temos n faces associadas. Poderíamos pensar em definir"faces duplas", "zerando" duas de suas coordenadas, (e exigindo, é claro, $n\geq 3$). De modo geral, definimos as k-faces de un polinômio em $R[X_1,...,X_n]$, com $n \geq k + 1$, como sendo os polinômios definidos"zerando-se" k de suas coordenadas. Temos, então, $\binom{n}{k}$ faces associadas.

O seguinte exemplo mostra que para k-faces, $k > 1$, $n \geq k + 1$, $F:=(f_1,...,f_n)$ o teorema não vale:

$$f_1(X_1,...,X_n) := X_1+aX_2...X_n$$
$$f_2(X_1,...,X_n) := X_2$$
$$\vdots$$
$$f_n(X_1,...,X_n) := X_n.$$

As k-faces de F são:

$$f_{i(i_1,\ldots,i_k)} = \begin{cases} X_i, & \text{se } i \notin \{i_1,\ldots,i_k\} \\ 0, & \text{se } i \in \{i_1,\ldots,i_k\} \end{cases}$$

O R-automorfismo $\tilde{F} := (\tilde{f_1},\ldots,\tilde{f_n})$ dado por:

$$\tilde{f_i}(X_1,\ldots,X_n) := X_i, \quad i=1,\ldots,n$$

é evidentemente distinto de F e possui as mesmas k-faces.

Referências

[1] W.Li, *On a problem about face polynomials,* Journal of Pure and Applied Algebra, 60(1989) 269-272.

[2] A. van den Essen, *A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse,* Communications in Algebra, 18(10), 3183-3186 (1990).

[3] J.H. Mckay and S.S.-S. Wang, *On the inversion formula for two polynomials in two variables,* Journal of Pure and Applied Algebra, 52(1988) 103-119.

[4] P.R.Halmos,*Naive Set Theory,*D.Van Nostrand Company, Inc., 1960.

[5] M. Kwiecińhski, *Automorphisms from face polynomials via two Gröbner Bases,* Journal of Pure and Applied Algebra, 82(1992) 65-70.