PRO MATHEMATICA: Vol.VII, Nos.13-14,1993

LAS ECUACIONES DE LONDON COMO CONSECUENCIA DE LAS CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD EN EL CALCULO VARIACIONAL

Francisco DE ZELA*

Resumen:

Se demuestra que las ecuaciones de London, introducidas en la Física para modelar el fenómeno de "superconductividad", son en realidad consecuencia de las condiciones de integrabilidad del problema variacional correspondiente.

* Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) Departamento de Ciencias, Sec. Física.

I. Introducción

En el lenguaje de los físicos, el término "fenomenología" se usa para describrir ese procedimiento hoy tan común de la investigación, que consiste en introducir de modo más o menos arbitrario nuevos términos a una ecuación o expresión conocida, a fin de dar cuenta mediante ellos de ciertos fenómenos observados que escapaban al rango de predicciones de la ecuación o expresión original.

Se habla entonces de "modelos", en contraposición a las "teorías", para remarcar su carácter restringido y seguramente provicional, el cual se espera superar en el marco de una teoría consistente, obtenida como ampliación de la original, si ello fuera necesario.

Uno de esos modelos es el de London, el cual da cuenta de algunos aspectos del fenómeno conocido como "superconductividad" [1]. Si bien se trata de un modelo ya bastante antiguo (data de 1935) e incluso obsoleto por no estar formulado en el marco de la mecánica cuántica [5], ha quedado sin embargo como ejemplo de procedimiento fenomenológico en la Física [6].

El propósito de este artículo es mostrar cómo en realidad el modelo de London estaba ya contenido en los principios básicos de la teoría que se supone sería necesario modificar,esto es, la teoría electrodinámica. En lugar de introducir ecuaciones adicionales, bastará analizar con cuidado las consecuencias matemáticas de haber asumido que una partícula cargada se mueve bajo la acción de un campo electromagnético a lo largo de una curva que le dé a la llamada "integral de acción" un valor extremal.

Este es el punto de partida para obtener las ecuaciones de movimiento, que no son otras que las de Euler-Lagrange, del Cálculo Variacional.

Siguiendo el camino trazado por los matemáticos al desarrollar dicho campo, se llega a las ecuaciones que en la física se introducen "fenomenológicamente" y no como consecuencia lógica de principios básicos.

II. El modelo de London

Existen ciertos materiales que al ser enfriados por debajo de una cierta temperatura crítica (Tc), dejan de ofrecer resistencia al paso de la corriente eléctrica: se vuelven "superconductores". Pero no sólo es el hecho de ser "conductores perfectos" lo que caracteriza a los superconductores; además muestran el llamado "efecto Meissner" [1]: no permiten la existencia de un campo magnético en su interior. Si este existía antes de que el material pase a ser superconductor, será expulsado del interior del mismo cuando la temperatura se lleve por debajo de Tc. Por supuesto, el campo magnético no pasa de un valor finito en el exterior del material a cero en el interior, sino que decae exponencialmente, siendo apreciable hasta una cierta "profundidad de penetración".

Para explicar estos fenómenos los hermanos London [2] introdujeron "fenomenológicamente" las ecuaciones

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} + c^2 \bar{\nabla}\rho = \frac{ne^2}{m} \bar{E} \qquad (1)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{j} = - \frac{ne^2}{mc} \bar{B} \qquad (2)$$

que nos dicen cómo se comportan los portadores de carga (electrones) del superconductor bajo la influencia del campo electromagnético descrito por $\bar{E}$ y $\bar{B}$. Los electrones vienen descritos por $\vec{j}$ y ρ, densidad de corriente y de carga, respectivamente, y que se relacionan con n (número de cargas por cm^3), m (masa de las cargas) y e (carga) de la manera habitual ($\bar{j} = \rho\bar{v}$, $\bar{v}$ = velocidad).

De (1) y (2) junto con las ecuaciones (de Maxwell) que rigen el comportamiento de $\bar{E}$ y $\bar{B}$, se obtienen como consecuencia los fenómenos experimentalmente observados, característicos de la superconductividad.

Como (1) y (2) fueron introducidas ex-profeso, se habla de "modelo". Queremos mostrar que en realidad dichas ecs. son consecuencias de la teoría.

III. Condiciones de integrabilidad y las ecuaciones de London

El principio básico de la teoría electromagnética es un principio variacional: la curva que una partícula cargada describe cuando es sujeta a la acción de un campo electromagnético dado, es aquella que da a la "integral de acción"

$$I = \int L \, d\tau \qquad (3)$$

un valor extremal [3,4]. El lagrangiano L está, en este caso, dado por

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = mc(\eta_{\mu\nu}\, x^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} + \frac{e}{c} A_\mu(x)\, \dot{x}^\mu \qquad (4)$$

$$(\mu, \nu = 0,1,2,3)$$

$$(\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1,$$

$$\eta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu)$$

y $A_\mu(x)$ es el cuadrivector que representa el campo electromagnético a través del tensor:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (5)$$

$(F_{0i} = E_i \; ; \; F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k \; ; \quad i,j,k = 1,2,3)$.

Así planteado,el problema es "relativista", mientras que las ecuaciones de London son no-relativistas; es decir, valen para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz (las cargas en el superconductor se mueven con velocidades bajas frente a $c = 300{,}000$ Km(seg).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema(3) son

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = - \frac{e}{mc^2} \eta^{\nu\sigma} F_{\sigma\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad (6)$$

donde hemos elegido el parámetro τ de nuestra curva extremal, de tal modo que se cumple que

$$\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1 \qquad (7)$$

a lo largo de ella. Esto es siempre posible, pues nuestro lagrangiano L es homogéneo de primer orden en $\dot{x}^\mu$.

Poniendo $x^0 = ct$, nuestro cuadrivector "velocidad" es

$$\dot{x}^\mu = \gamma(1, \bar{v}/c) \qquad (8)$$

donde

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt} \quad ; \quad \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) \quad ; \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

De aquí se ve que para el límite $v^2/c^2 \ll 1$ las ecuaciones de Euler se reducen en el caso $\nu = 1,2,3$ a

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left(\bar{E} + \frac{\bar{v}}{c}\bar{B}\right) \qquad (9)$$

que es la conocida ecuación de Lorentz; mientras que la ecuación para $\nu = 0$ es consecuencia de las otras tres, dado que L es homogéneo.

Ahora bien, la ecuación de Euler-Lagrange no representa sino una de los tres posibles caminos que llevan a resolver el problema variacional.Ella es consecuencia de exigir las condiciones de integrabilidad

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^\mu\ \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^\nu\ \partial x^\mu} \qquad (10)$$

a la función $S = S(x^\mu)$, solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$H(x^\mu,\ \partial_\mu S) = 0 \qquad (11)$$

A su vez, esta ecuación se obtiene en el marco de la formulación de Carathéodory del Cálculo variacional, a partir de la construcción de un campo de "curvas optimales" (aquellas que hacen I extremal) representado por

$$v^\mu = v^\mu(x^\nu).$$

Es a partir de este campo que se introduce $S(x^\mu)$, la cual cumple

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \frac{\partial L(x^\nu, v^\nu(x^\tau))}{\partial v^\mu} \qquad (12)$$

Si restringimos nuestras condiciones a un dominio simplemente conexo (y ello es necesario en el Cálculo Variacional), entonces las condicones de integrabilidad se expresan por

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial L}{\partial v^{\nu}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial L}{\partial v^{\mu}}\right) = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

en todo el dominio (x^{μ}).

Pero de aquí sigue que

$$\partial_{\mu} v_{\nu} - \partial_{\nu} v_{\mu} + \frac{e}{mc^{2}} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

sobre cada curva extremal $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$.

Para ver que de aquí obtenemos las ecuaciones de London, en el límite $v^2/c^2 \ll 1$, multiplicamos (14) por ne y ponemos $j_{\mu} = ne\, v_{\mu}$ (densidad de corriente):

$$\partial_{\mu} j_{\nu} - \partial_{\nu} j_{\mu} + \frac{ne^{2}}{mc^{2}} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) = 0 \qquad \textbf{(15)}$$

Como $A_{\mu} = (\phi, -\bar{A})$ en la notación tridimensional usual en física:

$$\partial_{i} j_{k} - \partial_{k} j_{i} = -\left(\frac{ne^{2}}{mc}\right)(\partial_{i} A_{k} - \partial_{k} A_{i}) \qquad i,k = 1,2,3$$

que en notación vectorial se lee

$$\bar{\nabla} \times \bar{j} = - \frac{ne^2}{mc} \bar{\nabla} \times \bar{A} = - \frac{ne^2}{mc} \bar{B}$$

la cual, como vemos, no es otra que la ecuación de London (2).

Poniendo luego $\mu = 0$, $\nu = k = 1,2,3$ en (15) obtenemos la otra ecuación de London:

$$\partial_0 j_k - \partial_k j_0 = \frac{ne^2}{mc^2} (\partial_k A_0 - \partial_0 A_k) = \frac{ne^2}{mc^2} F_{k0}$$

dado que luego de multiplicarla por $-c^2$ y con $j_0 = \rho$ se tiene efectivamente

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} + c^2 \bar{\nabla} \rho = \frac{ne^2}{m} \bar{E}.$$

IV. Conclusiones

Hemos visto entonces cómo las ecuaciones "fenomenológicas" de London no son otra cosa que la expresión de las condiciones de integrabilidad requeridas para que nuestro problema variacional tenga solución. Expresión que se obtiene al llevar dichas condiciones al límite de bajas velocidades ($v^2/c^2 \ll 1$). Es seguramente por haber planteado este límite y no las ecuaciones completas, que su verdadera naturaleza permaneció oculta. En el marco de la teoría exacta, su significado aparece claro, desde el punto de vista matemático.

Desde el punto de vista físico, lo anterior da lugar a una discusión de mayores alcances pero que escapa al marco del presente artículo.

Referencias

[1] *W. Meissner, R. Ochsenfeld*
Naturwissenschaften **21**, 787 (1933)

[2] *F. London, H. London*
Proc. Roy. Soc. (London) **A149**, 71 (1935)

[3] *C. Carathéodory*
Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, Leipzig, Berlin (1935)

[4] *H. Rund*
The Hamilton - Jacobi Theory in the Calculus of Variations, R. E. Krieger Pub. Co. Huntington, N.Y. 1973.

[5] *J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer*
Phys. Rev. **108,** 1175 (1957)

[6] *C. Kittel*
Quantun Theory of Solids. New York: John Wiley (1963).