PRO MATHEMATICA: Vol. VII, Nos. 13-14, 1993

UN ENFOQUE CONTEMPORANEO DE LA PROGRAMACION DINAMICA

Hugo R. **ÑOPO AGUILAR***

El presente artículo es un resumen del trabajo realizado con la finalidad de obtener el Bachillerato en Matemáticas en la P.U.C.P., basado en la presentación que hacen Nancy Stokey y Robert Lucas en "Recursive methods in economic dynamics" (Harvard U.P. 1989).

* Bachiller en Matemáticas (PUCP)
Egresado en Ingeniería de Sistemas (UNI)
Estudiante de maestría en el IMPA, BRASIL.

Se estudia el problema:

$$(\mathrm{PS})\ldots\ldots \quad \operatorname*{Sup}_{(x_{t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t} F(x_t, x_{t+1})$$

$$\text{s.a.:} \quad x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \qquad t=0,1,2,\ldots$$

$$\text{dado } x_0 \in X.$$

Sin recurrir a la ecuación de Euler, sino mas bien asociándolo a la ecuación funcional:

$$(\mathrm{EF})\ldots\ldots \quad v(x) = \operatorname*{Sup}_{y\in\Gamma(x)} [F(x,y)+\beta v(y)] \qquad \forall x \in X.$$

La relación existente entre las soluciones de estos problemas (bajo ciertas condiciones que estableceremos oportunamente) es:

1.- La solución v de (EF) evaluada en x_0 (estado inicial) es igual al supremo de (PS); y

2.- La sucesión $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ alcanza el supremo en (PS) si y sólo si:

$$v(x_t) = F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1}) \quad t=0,1,2,\ldots \quad \text{----(1)}$$

En lo que sigue daremos precisamente las condiciones bajo las cuales se cumplen estas afirmaciones.

Empecemos con algunas definiciones y la notación a utilizar:

Definición 1: X es el "<u>conjunto factible</u>", esto es, el conjunto de posibles valores para la variable de estado x (por ahora no asumimos restricciones para X).

Definición 2: $\Gamma: X \longrightarrow X$ es la "<u>correspondencia de factibilidad</u>", esto es, $\forall x \in X$ $\Gamma(x)$ es el conjunto de valores posibles para la variable de estado en el siguiente período (si la del presente período es x).

Definición 3: $F: \text{graf}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la "<u>función de retorno</u>" en un período.

Definición 4: $\beta \geq 0$ es el "<u>factor de descuento</u>" (estacionario).

Definición 5: Una sucesión $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ en X se llama un "<u>plan</u>".

Definición 6: Dado $x_0 \in X$, $\Pi(x_0) = \{\underset{\sim}{x} \equiv (x_t)_{t=0}^{\infty} \,/\, x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ $t=0,1,2,\ldots\}$ es conocido como el "<u>conjunto de planes factibles</u>" desde x_0.

Asunción (a): $\Gamma(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in X$ (esto implicará que $\Pi(x_0) \neq \emptyset$ $\forall x_0 \in X$, es decir, para cualquier estado inicial x_0, siempre será posible encontrar planes factibles).

Asunción (b): Todos los planes factibles pueden ser evaluados, esto es, $\forall x_0 \in X$ $\wedge$ $\forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)$, existe

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ (aunque este límite pueda ser infinitamente grande).

Definición 7: Dado $x_0 \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n : \Pi(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$u_n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

es la "suma parcial de los retornos del período 0 al n" para el plan factible $\underset{\sim}{x}$ desde x_0.

Definición 8: Bajo lo asumido previamente en (a) y (b) podemos definir $u : \Pi(x_0) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ t.q. $u(\underset{\sim}{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underset{\sim}{x})$.

Definición 9: La "Función Suprema": $v^* : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ t.q. $v^*(x_0) = \sup_{\underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)} u(\underset{\sim}{x})$ está bien definida, puesto que $\Pi(x_0) \neq \emptyset$ $\forall x_0 \in X$ y $u(\underset{\sim}{x})$ está bien definida $\forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)$.

Esto es, fijados X, Γ, F y β, la Función Suprema hace corresponder a cada problema (PS) su valor optimal.

De esta definición se sigue que:

(I)... Si $|v^*(x_0)| < +\infty$ entonces

$$v^*(x_0) \geq u(\underset{\sim}{x}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0) \qquad \text{----(2)}$$

y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)$ tal que

$$v^*(x_0) \leq u(\underset{\sim}{x}) + \varepsilon \qquad \text{----(3)}$$

(II)... Si $v^*(x_0) = +\infty$

$$\exists (\underset{\sim}{x}^k)_{k=0}^{\infty} \text{ en } \Pi(x_0) \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} u(\underset{\sim}{x}^k) = +\infty$$

(III)...Si $\upsilon^*(x_0)=-\infty$

$$u(\underset{\sim}{x})=-\infty \quad \forall \underset{\sim}{x}\in\Pi(x_0).$$

Lo que buscamos es relacionar la Función Suprema υ^* con la(s) solucion(es) υ de (EF).

Es importante recalcar que, tal como ha sido definida, υ^* es única; mientras que (EF) podría tener ninguna, una o muchas soluciones.

Diremos que υ^* satisface (EF) si se cumple:

(I)... Si $|\upsilon^*(x_0)|<+\infty$

$$\upsilon^*(x_0)\geq F(x_0,y)+\beta\upsilon^*(y) \quad \forall y\in\Gamma(x_0) \qquad \text{----(4)}$$

y $\forall\varepsilon>0$, $\exists y\in\Gamma(x_0)$ tal que

$$\upsilon^*(x_0)\leq F(x_0,y)+\beta\upsilon^*(y)+\varepsilon \qquad \text{----(5)}$$

(II)... Si $\upsilon^*(x_0)=+\infty$

$\exists(y^k)_{k=0}^{\infty}$ en $\Gamma(x_0)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} [F(x_0,y^k)+\beta\upsilon^*(y^k)]=+\infty \qquad \text{----(6)}$$

(III)...Si $\upsilon^*(x_0)=-\infty$

$$F(x_0,y)+\beta\upsilon^*(y)=-\infty \quad \forall y\in\Gamma(x_0) \qquad \text{----(7)}$$

Teorema 1.- $\forall x_0 \in X \ \wedge \ \forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0) \quad u(\underset{\sim}{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underset{\sim}{x}')$ siendo $\underset{\sim}{x}' = (x_t)_{t=1}^{\infty}$.

Demostración.-

$$u(\underset{\sim}{x}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = F(x_0, x_1) + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_{t+1}, x_{t+2})$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underset{\sim}{x}') \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.- Bajo los supuestos (a) y (b), v^* satisface (EF).

Demostración.-

Si $\beta=0$ el resultado es trivial, así que supongamos $\beta>0$ y tomemos $x_0 \in X$.

Tenemos tres casos:

(I)... Si $|v^*(x_0)| < +\infty$.

Debemos probar que se cumplen (4) y (5).

Veamos que (4) es cierta:

Sean: $x_1 \in \Gamma(x_0) \wedge \varepsilon > 0$ cualesquiera; entonces

$$\exists \underset{\sim}{x}' \in \Pi(x_1) \quad \text{tq} \quad v^*(x_1) \le u(\underset{\sim}{x}') + \varepsilon \qquad \ldots (*)$$

pero $\underset{\sim}{x} = (x_t)_{t=0}^{\infty} \in \Pi(x_0)$, entonces

$$v^*(x_0) \ge u(\underset{\sim}{x}) \qquad (\ \ldots\text{por } (2)) \qquad \text{y}$$

$\vartheta^*(x_0) \geq F(x_0,x_1)+\beta u(\underset{\sim}{x}')$ (...por el Teorema 1),

luego

$$\vartheta^*(x_0) \geq F(x_0,x_1)+\beta\vartheta^*(x_1)-\beta\varepsilon \quad (\text{...por } (*)),$$

y como $\varepsilon>0$ es arbitrario

$$\therefore \Rightarrow \vartheta^*(x_0) \geq F(x_0,x_1)+\beta\vartheta^*(x_1) \qquad \forall x_1\in\Gamma(x_0).$$

Veamos que (5) es cierta:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists \underset{\sim}{x}\in\Pi(x_0)$ tq $\vartheta^*(x_0) \leq u(\underset{\sim}{x})+\varepsilon$,

$\vartheta^*(x_0) \leq F(x_0,x_1)+\beta u(\underset{\sim}{x}')+\varepsilon$ (...por el Teorema 1),

luego

$$\vartheta^*(x_0) \leq F(x_0,x_1)+\beta\vartheta^*(x_1)+\varepsilon$$

y como $x_1\in\Gamma(x_0)$ queda establecido (5).

(II)... Si $\vartheta^*(x_0)=+\infty$

$\Rightarrow \exists(\underset{\sim}{x}^k)_{k=0}^{\infty}$ en $\Pi(x_0)$ tq $\lim\limits_{k\to\infty} u(\underset{\sim}{x}^k)=+\infty$;

como $x_1^k\in\Gamma(x_0)$ $\forall k\in\mathbb{Z}_+$ y además:

$u(\underset{\sim}{x}^k)=F(x_0,x_1^k)+\beta u(\underset{\sim}{x}'^k) \leq F(x_0,x_1^k)+\beta\vartheta^*(x_1^k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}_+$

$\Rightarrow$ la sucesión $(x_1^k)_{k=0}^{\infty}$ en $\Gamma(x_0)$ satisface (6).

(III)...Si $\vartheta^*(x_0)=-\infty$

$u(\underset{\sim}{x})=F(x_0,x_1)+\beta u(\underset{\sim}{x}')=-\infty$ $\quad\forall\underset{\sim}{x}\in\Pi(x_0)$

y como F es de valor real ($\neq\pm\infty$)

$\Rightarrow u(\underset{\sim}{x}')=-\infty$ $\quad\forall x_1\in\Gamma(x_0) \wedge \underset{\sim}{x}'\in\Pi(x_1)$

$\vartheta^*(x_1)=-\infty$ $\quad\forall x_1\in\Gamma(x_0)$, y como $\beta>0$, queda satisfecha (7). ■

Con este teorema hemos probado que la Función Suprema, definida a partir de (PS), es solución de (EF). Veremos ahora que condición adicional se requiere para asegurar que una solución de (EF) coincida con la Función Suprema.

Teorema 3.- Si υ es solución de (EF) y satisface:

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n \upsilon(x_n)=0 \quad \forall \underset{\sim}{x}\in\Pi(x_0) \wedge \forall x_0\in X \qquad \text{----(8)}$$

entonces $\upsilon=\upsilon^*$.

Demostración.-

Si se cumple (8), υ no puede tomar los valores $+\infty$ ó $-\infty$, por lo tanto, es suficiente probar que υ satisface (2) y (3).

(2):

Se tiene:

$$\upsilon(x_0)\geq F(x_0,x_1)+\beta\upsilon(x_1) \quad \forall x_0\in X, \ \forall x_1\in\Gamma(x_0)$$

$$\upsilon(x_0)\geq F(x_0,x_1)+\beta F(x_1,x_2)+\beta^2\upsilon(x_2)=u_1(\underset{\sim}{x})+\beta^2\upsilon(x_2)$$

$$\ldots$$

$$\upsilon(x_0)\geq u_n(\underset{\sim}{x})+\beta^{n+1}\upsilon(x_{n+1})$$

tomando límite $n\to\infty$:

$\upsilon(x_0)\geq u(\underset{\sim}{x})$; pues por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} \beta^n\upsilon(x_n)=0$.

(3):

Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Elijamos una sucesión $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1}\delta_n \le \varepsilon/2 \quad \wedge \quad \delta_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(por ejemplo, podría tomarse la sucesión en la que $\delta_n = \varepsilon\beta^{1-n}(1/2)^{n+1}$).

Por (5), uno puede elegir $x_1 \in \Gamma(x_0)$ tal que:

$$v(x_0) \le F(x_0, x_1) + \beta v(x_1) + \delta_1,$$

$x_2 \in \Gamma(x_1)$ tal que:

$$v(x_1) \le F(x_1, x_2) + \beta v(x_2) + \delta_2$$

y así sucesivamente, de lo que resulta $\underset{\sim}{x} = (x_0, x_1, \ldots) \in \Pi(x_0)$ tal que:

$$v(x_0) \le u_n(\underset{\sim}{x}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) + (\delta_1 + \beta^1\delta_2 + \ldots + \beta^n\delta_{n+1})$$

$$v(x_0) \le u_n(\underset{\sim}{x}) + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) + \varepsilon/2 \qquad n=1,2,3,\ldots$$

A partir de cierto N suficientemente grande se tendrá que:

$$\beta^{N+1} v(x_{N+1}) < \varepsilon/2$$

De donde: $\quad v(x_0) \le u_N(\underset{\sim}{x}) + \varepsilon \qquad$ ■

Una consecuencia inmediata de este teorema es que (EF) no puede tener más de una solución que satisfaga (8).

Teorema 4.- Sean X, Γ, F y β tal como se han asumido, $\underset{\sim}{x}^* \in \Pi(x_0)$ un plan factible que alcanza el supremo en (PS) para el estado inicial x_0, entonces:

$$v^*(x_t^*)=F(x_t^*, x_{t+1}^*)+\beta v^*(x_{t+1}^*) \quad \forall t \in \mathbb{N} \qquad \text{----(9)}$$

Demostración.-

Como $\underset{\sim}{x}^*$ alcanza el supremo:

$$v^*(x_0^*)=u(\underset{\sim}{x}^*)=F(x_0, x_1^*)+\beta u(\underset{\sim}{x}^{*\prime}) \qquad \text{----(10)}$$

$$\Rightarrow v^*(x_0^*) \geq u(\underset{\sim}{x})=F(x_0, x_1)+\beta u(\underset{\sim}{x}') \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0),$$

si en particular tomamos un plan tal que $x_1=x_1^*$, como $(x_1^*, x_2, x_3, \ldots) \in \Pi(x_1^*)$, entonces:

$$(x_0, x_1^*, x_2, x_3, \ldots) \in \Pi(x_0)$$

y por lo tanto:

$$u(\underset{\sim}{x}^{*\prime}) \geq u(\underset{\sim}{x}') \quad \forall \underset{\sim}{x}' \in \Pi(x_1^*),$$

de lo que se sigue:

$$u(\underset{\sim}{x}^{*\prime})=v^*(x_1^*).$$

En (10): $v^*(x_0^*)=F(x_0, x_1^*)+\beta v^*(x_1^*)$ (el resultado es cierto para $t=0$).

Procediendo de la misma manera podemos demostrar el resultado para todo t entero positivo ∎

Teorema 5.- Sea $\underset{\sim}{x}^*\in\Pi(x_0)$ un plan factible desde x_0 que satisface (9) y además:

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Sup}\, \beta^t v^*(x_t^*) \leq 0 \qquad \text{----(11)}$$

entonces $\underset{\sim}{x}^*$ alcanza el supremo en (PS) para el estado inicial x_0.

Demostración.-

$$v^*(x_0^*)=F(x_0^*,x_1^*)+\beta v^*(x_1^*)$$

$$v^*(x_0^*)=F(x_0^*,x_1^*)+\beta F(x_1^*,x_2^*)+\beta^2 v^*(x_2^*)$$

$$v^*(x_0^*)= \quad \ldots$$

$$v^*(x_0^*)=u_n(\underset{\sim}{x}^*)+\beta^{n+1} v^*(x_{n+1}^*) \qquad n=1,2,3,\ldots$$

tomando límites y usando (11):

$$v^*(x_0^*)\leq u(\underset{\sim}{x}^*)$$

y como $\underset{\sim}{x}^*\in\Pi(x_0^*)$ tenemos que $u(\underset{\sim}{x}^*)\leq v^*(x_0^*)$

$$\therefore \quad u(\underset{\sim}{x}^*)=v^*(x_0^*) \qquad \blacksquare$$

Asunción (c): $X\subseteq\mathbb{R}^1$ es convexo y $\Gamma:X\longrightarrow X$ es una correspondencia continua y de valores compactos no vacíos.

Asunción (d): F está acotada y es continua; β es positivo y estrictamente menor que 1.

Observamos que $(c)\wedge(d)\Rightarrow(a)\wedge(b)$.

Definición 10: La correspondencia $G:X\longrightarrow X$ t.q. $G(x)\subseteq\Gamma(x)$ $\forall x\in X$ se llama una "<u>correspondencia de política</u>", o simplemente una "<u>política</u>".

Definición 11: Si G es uni-valuada (i.e. $G(x)$ es un conjunto unitario $\forall x\in X$), será llamada "<u>función de política</u>" y se denotará por g.

Definición 12: Si $\underset{\sim}{x}=(x_0,x_1,\ldots)$ satisface $x_{t+1}\in G(x_t)$ $\forall t=0,1,2,\ldots$, diremos que $\underset{\sim}{x}$ es "<u>generado</u>" desde x_0 por G.

Definición 13: Dada una solución continua, ϑ, de (EF), la correspondencia $G^*:X\longrightarrow X$ t.q. $x\to\{y\in\Gamma(x)/\vartheta(x) = F(x,y)+\beta\vartheta(y)\}$ se llama una "<u>política óptima</u>".

Definición 14: Definamos un operador T sobre $C^0(X)$ (el espacio de las funciones continuas de X en X con la norma del supremo) por $(Tf)_{(x)}=\underset{y\in\Gamma(x)}{\operatorname{Sup}}[F(x,y)+\beta f(y)]$.

Un corolario inmediato de esta definición es que ϑ (solución de (EF)) es punto fijo de T.

Teorema 6.-

(i) $T(C^0(X))\subseteq C^0(X)$.

(ii) T tiene un único punto fijo $\vartheta\in C^0(X)$ y

(iii) $\forall\vartheta_0\in C^0(X),\ \|T^n\vartheta_0-\vartheta\|\leq\beta^n\|\vartheta_0-\vartheta\|$ $n=0,1,2,3,..$

Además, dada ϑ, la correspondencia de política óptima definida a partir de ella es de valores compactos y semicontinua superior (s.c.s.).

Demostración.-

Para cada $f\in C^0(X)$ y $x\in X$, $(Tf)_{(x)}$ se halla maximizando una función continua sobre un conjunto compacto $(\Gamma(x))$. $\therefore$ este máximo se alcanza en $\Gamma(x)$. Además, F y f acotadas implica Tf acotada.

Por otro lado, F y f continuas, Γ continua y de valores compactos implican (por el Teorema del Máximo [1]) que Tf es continua.

$$\therefore\ T(C^0(X))\subseteq C^0(X).$$

Además, vemos que T satisface las condiciones de Blackwell para una contracción (a saber: $\forall f,g\in C^0(X)$, $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in X$ implica $Tf(x)\leq Tg(x)$ $\forall x\in X$; y además $\exists\beta\in]0,1[/(T(f+a))_{(x)}\leq(Tf)_{(x)}+\beta a$ $\forall a\geq0$, $\forall x\in X$), por lo tanto T es una contracción. Como $C^0(X)$ es un espacio de Banach [2], se sigue del Teorema de la Contracción que $\exists!\vartheta\in C(X)/\vartheta$ es punto fijo para T y

$$\forall\vartheta_0\in C(X),\ |T^n\vartheta_0-\vartheta|\leq\beta^n|\vartheta_0-\vartheta| \qquad n=0,1,2,...$$

Aplicando el Teorema del Máximo a (EF) concluimos que la correspondencia de política óptima es de valores compactos y s.c.s. ■

Asunción (e): $\forall y \in \mathbb{R}^{l}$, $F(\cdot, y)$ es estrictamente creciente en cada uno de sus primeros l argumentos.

Asunción (f): Γ es monótona $(x \leq x' \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(x'))$.

Teorema 7.- Si υ es la única solución de (EF), es estrictamente creciente.

Demostración.-

Sean:

$C'(X) = \{f \in C^{0}(X) / f \text{ es no-decreciente}\}$

$C''(X) = \{f \in C^{0}(X) / f \text{ es estrictamente creciente}\}$

Sea $f \in C'(X)$

$$(Tf)_{(x)} = \operatorname*{Max}_{y \in \Gamma(x)} [F(x,y) + \beta f(y)]$$

Como $F(\cdot, y)$ es estrictamente creciente y $x \leq x' \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(x') \Rightarrow Tf$ es estrictamente creciente.

O sea $Tf \in C''(X)$, con esto hemos probado que

$$T(C'(X)) \subseteq C''(X).$$

Por otro lado: $C'(X)$ es subconjunto cerrado del espacio métrico completo $C^{0}(X)$ y como $\upsilon \in C'(X)$ (puesto que la correspondencia de factibilidad Γ es monótona y

$F(\cdot,y)$ es estrictamente creciente $\forall y\in\mathbb{R}^l$), el punto fijo de T está en C''(X) [3], entonces (por el Teorema 6) $v\in C''(X)$ ■

Asunción (g): F es cóncava y $\forall y\in\mathbb{R}^l$ $F(\cdot,y)$ es estrictamente cóncava.

Asunción (h): Γ es convexa (esto es, $\forall r\in[0,1],\forall x,x'\in X$ se cumple: $y\in\Gamma(x)\wedge y'\in\Gamma(x') \Rightarrow ry+(1-r)y'\in\Gamma(rx+(1-r)x')$).

Teorema 8.- Bajo los supuestos (c),(d),(g) y (h), toda solución v de (EF) es estrictamente cóncava y la correspondencia de política asociada es una función continua.

Demostración.-

Sean:

$C^*(X)=\{f\in C^0(X)/f$ es acotada y débilmente cóncava$\}$

$C^{**}(X)=\{f\in C^*(X)/f$ es estrictamente cóncava$\}$

Tomemos $f\in C^*(X)$, $x_0\neq x_1$, $\theta\in]0,1[$, $x_\theta=\theta x_0+(1-\theta)x_1$, $y_i\in\Gamma(x_i)$ $i=0,1$ tal que $(Tf)_{(x_i)}=F(x_i,y_i)+\beta f(y_i)$; entonces, como Γ es convexa: $y_\theta=\theta y_0+(1-\theta)y_1\in\Gamma(x_\theta)$; luego, $(Tf)_{(x_\theta)}\geq F(x_\theta,y_\theta)+\beta f(y_\theta)$ puesto que $y_\theta\in\Gamma(x_\theta)$; pero el lado derecho de la inecuación es mayor que $\theta[F(x_0,y_0)+\beta f(y_0)]+(1-\theta)[F(x_1,y_1)+\beta f(y_1)]$ puesto que F y f son concavas; entonces:

$$(Tf)_{(x_\theta)}>\theta(Tf)_{(x_0)}+(1-\theta)(Tf)_{(x_1)} \quad .$$

Así, Tf es estrictamente cóncava, o sea: $T(C^*(X))\subseteq C^{**}(X)$. Puesto que $C^*(X)$ es un subconjunto cerrado del espacio métrico completo $C^0(X)$[1] y como υ es cóncava, tenemos que es estrictamente cóncava ($\upsilon\in C^{**}(X)$).

Por otro lado, como F es cóncava y $\Gamma(x)$ es convexo $\forall x\in X$, se sigue que el máximo alcanzado en $\sup_{y\in\Gamma(x)} [F(x,y)+\beta f(y)]$. es en un único punto, entonces G es una función que además es continua (puesto que es s.c.s. [4]). ■

Teorema 9.- Bajo los supuestos (c),(d),(g) y (h), siendo υ solución de (EF) y g su correspondencia (función) de política óptima. Si se toma $\upsilon_0\in C^*(X)$ y definimos $\{(\upsilon_n,g_n)\}$ por:

$$\upsilon_{n+1}=T\upsilon_n \qquad \text{y}$$

$$g_n(x)=\underset{y\in\Gamma(x)}{\operatorname{argmax}}[F(x,y)+\beta\upsilon_n(y)] \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

entonces $g_n\to g$ puntualmente. Además, si X es compacto, la convergencia es uniforme.

1 En efecto, sea (f_k) una sucesión en $C^*(X)$ que converge (con la norma del supremo) hacia f; veremos que f es acotada y cóncava.

$\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbb{N},(k>K\Rightarrow \|f-f_k\|<\varepsilon)$; entonces, si γ es cota de f_{k+1}, $\gamma+\varepsilon$ lo es de f; además

$\forall\theta\in[0,1],\forall x,y\in X,\ f_k(\theta x+(1-\theta)y)\geq\theta f_k(x)+(1-\theta)f_k(y)$,

tomando límites a ambos miembros comprobamos la concavidad de f.

Demostración.-

Por el teorema anterior tenemos que $\upsilon\in C^{**}(X)$ y $T(C^{*}(X))\subseteq C^{**}(X)$; por hipótesis $\upsilon_0\in C^{*}(X)$, entonces

$$\upsilon_n\in C^{**}(X) \quad n=1,2,3,\ldots$$

Definamos: $$f_n(x,y)=F(x,y)+\beta\upsilon_n(y) \quad n=1,2,3,\ldots$$
$$f(x,y)=F(x,y)+\beta\upsilon(y)$$

y como F es cóncava, se tiene que $f_n\in C^{**}(X)$ $n=1,2,\ldots$ y $f\in C^{**}(X)$, entonces $g_n\to g$ puntualmente y la convergencia es uniforme si X es compacto [5] ■

Teorema 10.- Sean: $X\subseteq\mathbb{R}^l$ convexo, $V:X\longrightarrow\mathbb{R}$ cóncava, $x_0\in\mathrm{int}X$ y D vecindad de x_0. Si existe $W:D\longrightarrow\mathbb{R}$ cóncava y diferenciable tal que:

$$W(x_0)=V(x_0) \wedge W(x)\leq V(x) \quad \forall x\in D,$$

entonces V es diferenciable en x_0 y además:

$$V_i(x_0)=W_i(x_0) \quad i=1,2,\ldots,l.$$

(mediante el subíndice i estamos denotando a la aplicación derivada parcial con respecto a la i-ésima componente).

Demostración.-

Cualquier subgradiente p de V en x_0 debe satisfacer:

$$p.(x-x_0)\geq V(x)-V(x_0) \quad \forall x\in D$$

Pero $\quad V(x)-V(x_0)\geq W(x)-W(x_0) \quad \forall x\in D$

$$\Rightarrow p.(x-x_0)\geq W(x)-W(x_0) \qquad \forall x\in D$$

Como W es diferenciable en x_0, p es único; y como cualquier función cóncava con un único subgradiente en un punto interior es diferenciable en ese punto [6]

$$\Rightarrow V \text{ es diferenciable en } x_0 \qquad \blacksquare$$

Por último veamos algo acerca de la diferenciabilidad de ω (solución de (EF)), para lo cual necesitamos de un supuesto adicional.

Asunción (i): F es continuamente diferenciable en el interior de Γ.

Teorema 11.- Si se cumplen los supuestos (c), (d), (g), (h) e (i), siendo ω y g como antes, $x_0\in\text{int}X \wedge g(x_0)\in\text{int}\Gamma(x_0)$, se tiene que ω es continuamente diferenciable en x_0 y sus derivadas son:

$$\omega_i(x_0)=F_i(x_0,g(x_0)) \qquad i=1,2,\ldots,l.$$

Demostración.-

Como $g(x_0)\in\text{int}\Gamma(x_0)$ y la correspondencia Γ es continua, se sigue que $g(x_0)\in\text{int}\Gamma(x)$ $\forall x\in D$ (D vecindad de x_0), definamos $W:D\longrightarrow\mathbb{R}$ t.q.

$$W(x) = F[x,g(x_0)]+\beta\omega[g(x_0)],$$

así W es diferenciable y cóncava (puesto que F lo es).

Además $g(x_0)\in\Gamma(x)$ $\forall x\in D$, entonces

$$W(x)\leq \underset{y\in\Gamma(x)}{\mathrm{Max}}[F(x,y)+\beta\upsilon(y)]=\upsilon(x)\quad \forall x\in D \text{ y } W(x_0)=\upsilon(x_0).$$

De esta manera, υ y W satisfacen las hipótesis del teorema anterior, de lo que se concluye que la tesis es cierta. ■

REFERENCIAS.

[1] Stokey, Nancy & Robert Lucas Jr., "Recursive methods in economic dynamics", Harvard U.P. (1989), pag. 159.

[2] Lima, Elon L., "Elementos de topología geral", Editora da Univ. de Sao Paulo (1970), pag. 159.

[3] Stokey., op. cit., pag. 52.

[4] Aubin, Jean Pierre, "Differential inclutions. Set valued maps and viability theory", Springer Verlag (1984), pag 41.

[5] Stokey., op. cit., pag. 64.

[6] Rockafellar, R. Tyrrell, "Convex analysis", Princeton U.P. (1972), pag. 242.