

INTRODUCCION A UN CURSO DE TEORIA ERGODICA

Roberto MARKARIAN*

1. PRIMERAS PALABRAS

Estas notas pueden ser tomadas como una introducción elemental, en algunos casos intuitiva, a un primer curso de teoría ergódica. Los lectores habituales de esta revista pueden leer el texto de un tal curso en el trabajo de C. Gutierrez [Gutier]. Aunque en verdad, estas notas fueron pensadas, en primer lugar, para los alumnos del curso que yo dictara en Lima, en el marco del Convenio entre la Sociedad Brasileira de Matemática y la Sociedad Matemática Peruana, con el título "Introducción a la teoría ergódica de billares". El texto básico de este curso es [Mark1].

* Facultades de Ciencias e Ingeniería. Univ.de la República.
Dirección: Instituto de Matemática y Estadística
"Prof. Ing. Rafael Laguardia" (IMERL).
Fac. de Ingeniería CC. No.30. Montevideo - URUGUAY.
Correo Elect.: roma@imerl.edu.uy

Estas notas serán accesibles a quienes hayan estudiado cursos de nivel inicial de Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales y de Teoría de la Medida e Integración.

Agradecimientos. Este trabajo fue redactado en su totalidad durante mi estadía en Lima, en julio de 1993, financiado por el Centro Internacional de Física Teórica (ICTP, Trieste). Agradezco a los responsables del Convenio mencionado, en especial a César Camacho (IMPA, Río de Janeiro) y César Carranza (PUCP, Lima), y a los docentes y funcionarios de la Sección Matemática del Dpto. de Ciencias de la PUCP, por las condiciones de trabajo que me han brindado. Martha Canchari se encargó diligentemente de descifrar mis manuscritos.

2. LA HIPOTESIS ERGODICA

En un sentido muy amplio la teoría ergódica puede ser considerado como el estudio de las propiedades cualitativas de grupos de transformaciones en espacios con alguna estructura. Las transformaciones preservan esas estructuras (espacios de probabilidad, topológicos, variedades diferenciales).

El ejemplo típico de surgimiento de la teoría es el modelo de los gases de Boltzmann - Gibbs que nosotros representaremos simplícidamente suponiendo que las moléculas son k masas puntuales que se mueven en una región U acotada de \mathbb{R}^3 . Ellas chocan elásticamente entre si y con los bordes de U .

El estado del sistema está determinado si se conocen posiciones y velocidades de las partículas en un momento dado. Podemos suponer que el sistema transcurre en una región \tilde{U} acotada de \mathbb{R}^{6k} satisfaciendo las ecuaciones

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

donde $H = T + V$ es el hamiltoniano del sistema con T energía cinética y V energía potencial, q_i son las coordenadas espaciales y p_j las de las velocidades ($i, j = 1, 2, \dots, 3k$).

Este sistema se puede escribir como

$$\frac{du}{dt} = x(u) \quad (1)$$

con

$$x(q_i, p_j) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \quad i, j = 1, 2, \dots, 3k.$$

Este sistema autónomo tiene solución (que suponemos única) $T_t: \mathbb{R} \times \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$. Esto significa que si p es un punto del espacio de fase \tilde{U} en el instante $t = 0$, $T_t(p)$ indica el estado del sistema en el instante t , verificándose

$$\frac{d(T_t(p))}{dt} = x(T_t(p)) \quad T_0 = \text{Id} \quad T_{t+s} = T_t \circ T_s.$$

Como el hamiltoniano es constante a lo largo de las trayectorias (se dice que H es una integral primera del sistema (1)), cada superficie de energía $H^{-1}(e)$ es invariante por T_t y se tiene una acción de \mathbb{R} sobre la superficie de energía $H^{-1}(e)$. (En realidad estamos suponiendo que e es un valor regular de H por lo que $H^{-1}(e)$ es una subvariedad de codimensión uno en \tilde{U}). Llamaremos E a este conjunto acotado de \mathbb{R}^{6k} y resulta $T_t|_E$ diferenciable, si E lo es.

La teoría de la medida aparece con total naturalidad de la siguiente manera. El sistema considerado esta aislado, tiene energía constante; es por ello que podemos trabajar en $E = H^{-1}(e)$. Cabe esperar que el flujo T_t **preserve** la medida λ de Lebesgue sobre los borelianos de E : $\lambda(E) = \lambda(T_t(E))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y todo $B \in \mathcal{B}$ (conjuntos de Borel en E). Precisamente, el teorema de Liouville expresa que la anulación de la divergencia del campo X en cada punto de E es equivalente a esa propiedad de **invariancia** de la medida. Recordamos que si Y es un campo en \mathbb{R}^n , o sea

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n), \quad Y_j = Y_j(y_1, \dots, y_n)$$

entonces

$$\operatorname{div} Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}.$$

La palabra **ergódica** fue introducida por Boltzmann para describir una hipótesis que él debió agregar a su modelo para que este cumplierse una de las consecuencias más inmediatamente observables en los objetos físicos que intentaba explicar. Con cierta imprecisión, se puede decir que en un sistema aislado las "mediciones" (de la temperatura, por ejemplo) promediados en el espacio de fase o a lo largo de las trayectorias a partir de un estado inicial, deben ser iguales.

Si $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \lambda)$ es la función que se quiere medir, la media espacial es $\int f(y) d\lambda(y)$ y la media asintótica a lo largo de la trayectoria por $x = T_0(x)$ es

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(F_t(x)) dt.$$

Boltzmann esperaba que cada órbita $\{T_t(x): t \in \mathbb{R}\}$ "llenaría" todo el espacio de fase E . Llamó a esto **hipótesis ergódica** y mostró que traería como consecuencia la igualdad esperada:

$$\int_E f(y) d\lambda(y) = \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(F_t(x)) dt \quad (2)$$

para casi todo $x \in E$.

La palabra ergódica, introducida en ese contexto, y que luego fue ampliando su significado, hasta denominar una amplia rama de la matemática, proviene del griego: **ergon** (trabajo) y **odos** (paso, camino).

En realidad, la hipótesis ergódica es lógicamente contradictoria, con ese grado de generalidad. Y la igualdad (2) no se puede deducir de la mera densidad de cada órbita. Hoy se dice que el flujo T_t es **ergódico** si satisface directamente la igualdad (2) (Ver 5.2) y se demuestran otras equivalencias que se pueden ver en [Gutier] V.2 o en [Mark1] II.2 .

(Los capítulos I y III del viejo libro de Khinchin continúan siendo una excelente introducción para la comprensión de la importancia del "Problema ergódico" y las relaciones entre la física y la matemática [Khin]).

Tomando como referencia el sentido tan amplio con que comenzamos esta Sección, hoy se considera que la teoría ergódica describe el estudio cualitativo de las acciones de grupos en espacios de medida o, un poco más restringidamente, que estudia los sistemas dinámicos que preservan medida.

En este sentido los pasos principales antes de 1960 están relacionados con los nombres de:

Poincaré, Teorema de recurrencia, 1899, ver [Mark 1] I1 para su formulación original;

Von Neumann, Birkhoff, Khinchin, Teorema que asegura la existencia del segundo miembro de (2), para casi todo punto (inicios de la década del 30);

Kolmogorov, Definición de entropía (1958), generalizando conceptos introducidos, para teoría de la información, por Shannon (1948). Ver [Gutier] X - XI.

Más adelante veremos qué tipo de propiedades son las estudiadas; pero desde ya conviene aclarar que si bien la teoría ergódica "oficial" estudia los sistemas conservativos (que preservan medida), se han hecho fundamentales avances más recientes (digamos que en los últimos 20 años) en el estudio probabilístico de sistemas disipativos.

3. ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

A efecto de precisar el lenguaje que utilizáramos y utilizaremos, damos aquí algunas definiciones y resultados de uso corriente.

Si X es cualquier espacio, \mathcal{A}_0 es un álgebra de conjuntos de X si

- i) $x \in \mathcal{A}_0$;
- ii) $A, B \in \mathcal{A}_0$ implica $A \cup B \in \mathcal{A}_0$
- iii) $A \in \mathcal{A}$ implica $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}_0$

\mathcal{A} es un σ -álgebra de conjuntos de X si, además, $A_i \in \mathcal{A}$ $i = 1, 2, \dots$ implica

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Dada cualquier familia \mathcal{A}_0 de conjuntos de X se denomina σ -álgebra generada por \mathcal{A}_0 al menor σ -álgebra que la contiene (que contiene todos sus elementos).

μ es una medida sobre el álgebra \mathcal{A}_0 si es una función a valores no negativos definido para cada elemento de \mathcal{A}_0 tal que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{para } A_i \in \mathcal{A}_0,$$

$$\bigcup A_i \in \mathcal{A}_0, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Si $\mu(X) < \infty$ se dice que la medida es finita y siempre se puede **normalizar**, definiendo una nueva medida por

$$\nu(A) = \mu(A) / \mu(X) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{A}_0.$$

Si \mathcal{A} es un σ -álgebra de conjuntos de X y μ es una medida en \mathcal{A} tal que $\mu(X) = 1$, se dice que (X, \mathcal{A}, μ) es un **espacio de probabilidad**.

Obsérvese que todos los resultados para espacios con medidas finitas se expresan en espacios de probabilidad, vía la normalización de la medida. El siguiente teorema indica que se puede trabajar inicialmente en un álgebra (que en general es una estructura más simple).

Teorema de Extensión (Hahn - Kolmogorov). Sea \mathcal{A}_0 un álgebra de conjuntos de X y $\nu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0,1]$ una medida de probabilidad. Entonces existe una única medida μ definida sobre el σ -álgebra \mathcal{A} generado por \mathcal{A}_0 tal que $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}_0$ (μ es una extensión de ν : $\mu|_{\mathcal{A}_0} = \nu$)

Las relaciones entre las estructuras de medida y las estructuras topológicas de un espacio comienzan definiendo \mathcal{B} , los conjuntos de Borel como el σ -álgebra generado por los abiertos. En el caso de \mathbb{R} (o \mathbb{R}^n) alcanza con tomar en primer lugar el álgebra de las uniones finitas de intervalos (o productos de intervalos).

Relaciones más profundas vienen dadas, para espacios métricos separables, a través de los teoremas de Lusin. Un espacio topológico es separable si existe un conjunto numerable, denso en el espacio.

Teorema (Lusin). Sean X e Y espacios métricos separables, \mathcal{B} los borelianos de X y (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $A \in \mathcal{B}$ existe $K \subset A$, compacto, tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Si $f: X \rightarrow Y$ es medible (respecto de los Borelianos de ambos espacios) existe K_1 compacto, tal que $\mu(K_1) > 1 - \varepsilon$ y f restringida a K_1 es continua.

A partir de aquí (X, \mathcal{A}, μ) será un espacio de probabilidad.

Consideremos ahora flujos T o transformaciones S medibles sobre X ; esto es $T: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $S: X \rightarrow X$ tales que

$$T_t(A) = T(t, A) \in \mathcal{A}, \quad S^{-1}A \in \mathcal{A}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}$.

Si $T_0(x) = x$ y $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x))$, o sea si $T_0 = \text{Id}$ y $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ se dice que T es una acción del grupo de los reales sobre X (siempre escribiremos la variable "temporal" como subíndice). Las soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas, $\dot{u} = X(u)$, verifican esas propiedades.

$S: X \rightarrow X$, **si es invertible**, siempre define una acción del grupo de los enteros sobre X a través de las siguientes relaciones

$$\tilde{S}: \mathbb{Z} \times X \rightarrow, \quad \tilde{S}(n, \chi) = S^n(\chi),$$

que verifica

$$S^0 = \text{Id}, \quad S^{n+m} = S^n \circ S^m.$$

Con esas aclaraciones diremos que T_t y S son **sistemas dinámicos** con parámetros continuos o discretos, respectivamente. En general **no** supondremos que S sea invertible. Obviamente que, si se habla del sistema dinámico S , se supone que lo es.

Decimos que T_t (respectivamente S) **preserva** la medida μ , o que μ es **invariante** por $T_t(S)$ si

$$\mu(T_t(A)) = \mu(A) \quad (\text{respect. } \mu(S^{-1}(A)) = \mu(A))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A}$. Se suele decir que S que preserva medida es un **endomorfismo** de (X, \mathcal{A}, μ) y si es invertible, que es un **automorfismo**.

Ya hemos visto que T_t es **ergódico** si para cada $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ se satisface (2). En el caso de una transformación S que preserva medida, decimos que es **ergódica** si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(x)) = \int f d\mu \quad \text{para } \mu\text{-c. t. } x \in X.$$

4. BILLARES

El estudio de billares está directamente relacionado con la hipótesis ergódica. Intentaremos explicar esta relación.

Sea Q una región cerrada, acotada y conexa del plano, con frontera $\partial Q = \bigcup_{i=1}^k \partial Q_i$. Cada ∂Q_i es una curva de clase C^3 (3 derivadas continuas), sin curvatura nula; o un segmento de recta. Cada trozo de arco ∂Q_i se dirá **focalizador** o **dispersor** según se vea, desde dentro de Q , como una circunferencia desde dentro, o desde fuera (concavidad hacia dentro o hacia afuera del billar). ∂Q_i es **neutro** si es un segmento de recta.

Un punto material se mueve sin rozamiento en Q chocando elásticamente sobre ∂Q . Por tanto la energía es constante y se puede considerar que la velocidad tiene módulo 1. En la figura 1 se ve que, si

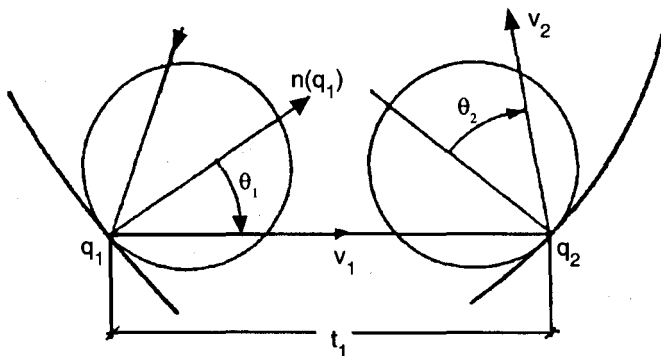


FIGURA 1: TRANSFORMACION DE BILLAR

$x_1 = (q_1, v_1)$ su imagen es $x_2 = (q_2, v_2)$, y definimos la transformación de billar por $Sx_1 = x_2$. Obsérvese que Sx_1 puede no estar definido, si $q_2 \in \partial Q_i \cap \partial Q_j$.

La manera más simple de parametrizar el espacio de fase es medir la longitud de arcos s de ∂Q y considerar los ángulos θ que forma la normal $n(q)$ a ∂Q en q , con el vector de salida (los ángulos de entrada y salida son los mismos). Si L es la longitud total de ∂Q resulta que el espacio de fase es el rectángulo $[0, L] \times [-\pi/2, \pi/2]$ al que hay que sacarle las verticales que corresponden a los vértices $\partial Q_i \cap \partial Q_j$. Sea \mathcal{R} lo que resulta.

Ya antes de 1930 George D. Birkhoff había probado que $d\mu = d\theta ds \cos \theta$ era la medida invariante para S , que se normaliza dividiendo por $2L$. S es invertible si se sacan de \mathcal{R} las trayectorias que salen o entran en $\partial Q_i \cap \partial Q_j$, o son tangentes ($\theta = \pm \pi/2$). Resultan así S y S^{-1} de clase C^2 (S es un difeomorfismo de clase C^2).

Hecha la descripción de qué es un billar plano, veamos cómo se llegó al estudio de sus propiedades ergódicas.

Poco antes de 1950 el físico soviético N. S. Krylov observó, comparando el movimiento de las bolas de gases con los flujos geodésicos en variedades de curvatura negativa, que el modelo de Boltzmann-Gibbs era naturalmente ergódico; o sea que la hipótesis ergódica no debería agregarse, sino que resultaba del propio modelo.

En 1963 Ya. G. Sinai publicó un trabajo en que aquellas conjeturas de Krylov toman forma matemática; pero no es sino en 1970 que se publica la primera prueba de que el modelo más simplificado derivado de la mecánica estadística, genera una transformación S , ergódica [Sinai1].

El modelo de billar plano estudiado por Sinai consistía en un cuadrado al que se le coloca una circunferencia centrada. Q es la superficie simétrica que queda entre el cuadrado y la circunferencia; y los bordes son neutro o dispersor. Es la presencia de este borde dispersor el que genera el carácter desordenado del sistema.

Este es un modelo simplificado de los gases si se considera que el choque de las moléculas esféricas se puede analizar como la de una partícula material moviéndose en una región de \mathbb{R}^d (d suficientemente grande), con bordes dispersores. (Ver [CoFoSi] ch 6). El caso estudiado por Sinai correspondía a dos bolas en el plano, tomando una de ellas fija.

Trabajos posteriores del mismo Sinai y miembros de su Escuela (Bunimovich, Chernov, Krámli, Simányi, Szász) parecen estar permitiendo **demostrar** la hipótesis ergódica en toda su complejidad.

Por otro lado, otros matemáticos optamos por estudiar qué otras curvas permitían construir billares planos cuya transformación S es ergódica. En este sentido, hemos obtenido resultados, además de los antes nombrados, Wojtkowski, Donnay, Markarian. Existe una amplia descripción de billares planos ergódicos. Ver [Mark1] IV.5, [CheMar], y Sección 8 de este trabajo.

5. PROPIEDADES ESTADISTICAS

Un enfoque más actual acerca del objeto de la teoría ergódica que abarca la definición dada al final de la Sección 2 es el dado por Sinai en su pequeño hermoso libro de Conferencias en Princeton [Sinai2]. La teoría ergódica consiste en el **estudio de las propiedades estadísticas de grupos de transformaciones de objetos no aleatorios.**

O sea que la definición destaca que se estudian propiedades estadísticas (del tipo que se explicitarán más abajo) pero de objetos cuya estructura no es aleatoria. Por el contrario, en general, son determinísticos, desde que son soluciones de ecuaciones diferenciales o elementos semejantes. Se conoce la evolución de cada punto del espacio en que se trabaja, pero el comportamiento global sólo es describible probabilísticamente.

Para uniformizar el tratamiento consideremos que el espacio en que trabajamos es un espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) y que $S: X \rightarrow X$ es medible, no necesariamente invertible. Si S es invertible genera un sistema dinámico con variable discreta; la traducción de las definiciones y teoremas para el caso continuo es, en general, inmediata; y cuando no lo sea tanto, las escribiremos explícitamente.

Describiremos cinco propiedades estadísticas que son de interés para la teoría ergódica. En un sentido amplio, a medida que avancemos ellos serán cada vez más restrictivas o sea que, en general, las primeras se deducen de las posteriores (usaremos algunas expresiones comunes en teoría de probabilidad, y que pueden ser tomadas como definiciones para quienes no estén habituados a ellas).

5.1 S preserva la medida μ

Dado que S es medible, cualquier función medible $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ genera una sucesión de **variables aleatorias** $F_n = f \circ S^n$ y como S preserva medida $\{F_n\}_{-\infty}^{\infty}$ es un **proceso estacionario**. El operador adjunto U_S actúa en el espacio de las funciones medibles: $U_S(f) = f \circ S$ y la invariancia de μ por S es equivalente a

$$\int f d\mu = \int U_S f d\mu \text{ para toda función en } \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Obsérvese que si f_A es la función característica de $A \in \mathcal{A}$ ($f_A(x) = 1$ para $x \in A$, $f_A(x) = 0$ por $x \in A^c = X \setminus A$) entonces

$$U_S f_A = f_{S^{-1}A}.$$

Los dos resultados fundamentales de las transformaciones que preservan medida son el Teorema de recurrencia de Poincaré (en su versión probabilística) y el Teorema de Birkhoff-Khinchin. Demostraciones de los dos teoremas se pueden encontrar en cualquiera de los textos indicados en la bibliografía.

Teorema de recurrencia de Poincaré. Sean (X, \mathcal{A}, μ) espacio de probabilidad y $S: X \rightarrow X$ que preserva μ . Entonces para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(\{x \in A: S^k x \in A \text{ para infinitos valores de } k \geq 0\}) = \mu(A).$$

El teorema expresa que casi todos los puntos de A regresan infinitas veces a A por iteraciones de S.

Naturalmente que los valores de k para los que $S^k x \in A$, dependen de x , y nada se dice sobre el "tiempo de retorno" o sea cómo crecen tales k al avanzar t en el tiempo.

Precisamente esta indeterminación es la que explica la **paradoja de Zermelo**. Considérese una caja con forma de paralelepípedo (una sala común de clases, por ejemplo). En el modelo de los gases estudiados en la Sección 2, sea el conjunto A de los estados cuyas posiciones están en una de las mitades de la caja. Recuérdese que cada estado son las posiciones y velocidades de las k partículas y que el sistema transcurre en la superficie de energía constante $E = H^{-1}(e)$, siendo la medida de Lebesgue λ invariante por el flujo. El teorema de recurrencia dice que el sistema vuelve infinitas veces a A ; esto significa que infinitas veces en el tiempo todas las moléculas estarán en una de las mitades de la sala. La paradoja consiste en que esto no se observa nunca, porque en ese caso en la otra mitad no se podría respirar!

La explicación es que el ciclo de Poincaré, o sea el tiempo medio en que cierta posición inicial de A , vuelve a estar en A es superior a la supuesta duración de la Galaxia. Para dar alguna aproximación cuantitativa, resulta que $\lambda(A) \approx \exp(-cN)$ con c constante y N el Número de Avogadro, o sea el número de moléculas por cm^3 , a presión normal. El tiempo de retorno promedio para cada regreso es del orden de $[\lambda(A)]^{-1}$; pero $N \approx 10^{23}$ por lo que dicho tiempo es del orden $\exp(c \cdot 10^{23})!$

El siguiente resultado indica un tipo habitual de aplicaciones del teorema de recurrencia.

Corolario: En las condiciones del Teorema de Recurrencia, sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, medible, $|f(x)| > 0$ para μ -c.t. $x \in X$. Entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f(S^i(x))| = +\infty \quad \mu\text{-c.t. } x \in X.$$

Dem.: Aplíquese el teorema de recurrencia a cada conjunto

$$A_n = \{y \in X: |f(y)| > 1/n\}.$$

Resulta

$$\sum |f(S^i(y))| = +\infty \quad \mu\text{-c.t. } y \in A_n, \quad y \quad \mu(X \setminus \cup A_n) = 0 \quad \blacksquare$$

El teorema que sigue indica cuál es el orden de esa divergencia a infinito, para funciones integrables.

Teorema de Birkhoff-Khinchin. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad y $S: X \rightarrow X$ que preserva μ . Entonces para cada $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ se verifica

a) Existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i x)$ para μ -c.t. $x \in X$. Cuando exista lo llamaremos $\tilde{f}(x)$.

$$b) \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu), \quad \tilde{f} \circ S = \tilde{f}, \quad \int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$$

El teorema admite alguna generalidad mayor, pero este enunciado expresa sus elementos fundamentales:

a) Que si una transformación preserva medida existen las medias temporales μ -casi todo punto (el hecho de que el resultado es **casi** todo punto y no **para todo** punto es frecuentemente olvidado por los físicos y simuladores numéricos).

- b) Que el límite es también integrable, que es invariante a lo largo de las trayectorias $(\tilde{f}(S^n x) = \tilde{f}(x) \quad \forall n \geq 0)$ y que su integral da la media espacial de f .

El hecho de que puedan tomarse promedios en el tiempo indica el carácter **estacionario** del sistema (no cambia con el tiempo). Frecuentemente sucede que un sistema se acerca a un régimen estacionario a medida que avanza el tiempo. Entonces resulta natural estudiar ese régimen con la ayuda de la correspondiente medida invariante.

En el caso de un flujo T_t (sistema dinámico con parámetro continuo) que preserve μ , la **media de Birkhoff** es μ -c.t. $x \in X$

$$\tilde{f}(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_{\pm t} x) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(T_t x) dt,$$

o sea que se puede promediar hacia el "futuro" o hacia el "pasado".

5.2 S es ergódica

$S: X \rightarrow X$ que preserve medida μ es ergódica si para toda $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ su correspondiente media de Birkhoff es constante μ -c.t.p. En ese caso, por el resultado b) del Teorema de Birkhoff-Khinchin, la constante vale $\int f d\mu$

Dos conjuntos son **iguales modulo cero** ($A = B \pmod{0}$) si $\mu(A \Delta B) = 0$ donde

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

o sea si son iguales a menos de conjuntos de medida nula. $A \in \mathcal{A}$ es **invariante** por S , si $S^{-1}A = A \pmod{0}$.

En este caso, existe $A_1 \subset A$, $\mu(A_1) = \mu(A)$ tal que $S^{-1}A_1 = A_1$. Alcanza con tomar

$$B = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^{-k}A \quad \text{y} \quad A_1 = B \cap S^{-1}B.$$

Lema. S es ergódica si y solo si, todo conjunto invariante por A tiene medida cero o uno.

Dem.: Sea S ergódica y $A \in \mathcal{A}$ tal que $S^{-1}A = A \pmod{0}$. Entonces, para casi todo punto

$$\tilde{f}_A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_A(S^i x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_{S^{-i}A}(x),$$

es constante.

Si $\mu(A) = 0$ no hay nada que probar y si $\mu(A) > 0$, sea $x \in A$, donde esté definido la media de Birkhoff y resultará $\tilde{f}_A(x) = 1$ en un conjunto de puntos de medida positiva; entonces la constante es 1. Pero esa constante es $\int f_A d\mu = \mu(A)$.

Inversamente, supongamos que $S^{-1}A = A \pmod{0}$ implica $\mu(A) = 0$ ó 1; y sea \tilde{f} la media de Birkhoff de cualquier función $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$; definimos

$$E_a^b = \{x: a \leq \tilde{f}(x) \leq b\}.$$

Esos conjuntos son medibles y $S^{-1}(E_a^b) = E_a^b \pmod{0}$ porque $\tilde{f} \circ S = \tilde{f}$. Entonces

$$\mu(E_a^b) = 0 \quad \text{ó} \quad 1 \quad \text{para todo} \quad a \leq b.$$

Esto implica que \tilde{f} es constante porque para algun E_a^b es $f(E_a^b) = 1$ y por un proceso de bipartición se llega a

$$\mu(E_c^c) = 1 \quad \blacksquare$$

Obsérvese que probada esta equivalencia resulta que la ergodicidad es una propiedad de indescomponibilidad de X en conjuntos invariantes.

5.3 S es mezcladora

$S: X \rightarrow X$ que preserve medida es mezcladora (mixing) si para todas $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \circ S^{-k}$ y g son estadísticamente independientes, para k grande; esto significa que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f(S^k(x)) g(x) d\mu(x) = \int f d\mu \int g d\mu.$$

Si $f = f_A$ y $g = f_B$ resulta

$$f_A \circ S^k = f_{S^{-k}A}$$

y la igualdad se transforma en

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(S^{-k}A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B) \quad (3)$$

para todo $A, B \in \mathcal{A}$.

En realidad esta igualdad es equivalente a la anterior tal como se deduce luego de aproximar las funciones f y g de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, por funciones simples

del tipo $\sum_{i=1}^m a_i f_{A_i}$.

La última igualdad se puede interpretar como si, para k grande

$$\frac{\mu(S^{-k}A \cap B)}{\mu(B)} \approx \frac{\mu(A)}{\mu(X)} ;$$

o sea que la proporción de $S^{-k}A$ que esta en B (medida condicional de $S^{-k}A$ en B) es la misma que la proporción de A en el total. Esto significa que luego de muchas iteraciones, para cualquier B , la proporción de A que cayó en B es aproximadamente igual a la cantidad original de A .

Lema. Si S es mezcladora es ergódica.

Dem.: Sea $B = A^c$ en (3) y $S^{-1}A = A$. Entonces

$$\mu(S^{-k}A \cap A^c) \rightarrow \mu(A) \mu(A^c);$$

pero

$$\mu(S^{-k}A \cap A^c) = \mu(A \cap A^c) = 0$$

por lo que $\mu(A) \mu(A^c) = 0$ y uno de los dos es cero, por lo que el otro es 1 y resulta S ergódica. ■

Sea ahora S mezcladora respecto a μ , $\rho: X \rightarrow [0, \infty]$, $\int \rho d\mu = 1$ y $d\nu_0 = \rho d\mu$. Entonces ν_0 es absolutamente continua respecto a μ (esto significa que si $\mu(A) = 0$ entonces $\nu_0(A) = 0$, y se representa por $\nu_0 \ll \mu$). Los físicos dicen que ν_0 es una medida de no equilibrio. Definimos nuevas medidas por

$$\nu_n(B) = \nu_0(S^{-n} B) \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Ninguna de estas medidas tiene por que ser mezcladora, pero

$$\int_{\mathbf{x}} f d\nu_n = \int_{\mathbf{x}} f \rho \circ S^n d\mu \rightarrow \int f d\mu \int \rho d\mu = \int f d\mu.$$

Esto significa que la distribución de no equilibrio tiende a la de equilibrio. Esta propiedad no se cumple si S es sólo ergódica.

Luego se verá que existen transformaciones ergódicas no mezcladoras.

5.4 S satisface un teorema del límite central

Cabe preguntarse cuál es el modo con que las medias parciales de Birkhoff se acercan a su límite \tilde{f} . Los teoremas del límite central dicen que existe $\sigma > 0$ tal que

$$\mu(\{x: \frac{\sqrt{n}}{\sigma} [\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(x)) - \tilde{f}(x)] < \alpha\}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2} d\mu$$

o sea que la sucesión

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} f \circ S^i - n\tilde{f}}{\sigma \sqrt{n}}$$

converge en distribución, respecto a μ , a la distribución normal estandar.

Si esa convergencia se satisface para un número "suficientemente grande" de funciones f (por ejemplo, todas las funciones Hölder-Continuas) se dice que el sistema satisface un teorema del límite central. En este caso, para tales funciones, la diferencia

$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i x) - \tilde{f}(x)$ es del orden de $n^{-1/2}$, pero no es

posible escribir el siguiente termino asintóticamente; sólo tiene una distribución límite.

5.5 Decaimiento de la correlación

Se trata de conocer la velocidad de convergencia en el límite que define la propiedad mezclador. Ver (3).

En general se buscan relaciones del tipo

$$|\int f(S^k x)g(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x) \int g(x)d\mu(x)| \leq C(f.g)q^{-k\alpha}$$

donde $C(f.g)$ es una constante que depende de f, g ; $q > 1$ y $\alpha > 0$ son constantes.

Se dice que S satisface la propiedad de **decaimiento exponencial** si esa desigualdad se cumple para "un número grande" de funciones f y g , con $\alpha = 1$.

Si el decaimiento de la correlación es del tipo indicado al principio, con cualquier $\alpha > 0$, resulta que existe, finito

$$\sigma^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} [\int f_0 S^k f d\mu - (\int f d\mu)^2].$$

Si $\sigma > 0$ y la velocidad de convergencia es suficientemente grande (α no próximo a cero), en general se

pueden probar teoremas del límite central. Si las clases de funciones para las que valen estas propiedades de decaimiento son muy generales, se pueden deducir las propiedades anteriores 5.2 y 5.3 .

6. EJEMPLOS EN EL TORO \mathbb{T}^2

Daremos aquí ejemplos de flujos y automorfismos con propiedades ergódicas en el toro de dimensión 2, aunque podría hacerse en \mathbb{T}^n , $n \geq 2$.

6.1 El toro

Si $\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ es la circunferencia de radio 1 en el plano, consideraremos $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ y $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, la proyección canónica definida por

$$\Pi(x_1, x_2) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}).$$

Entonces

$$\Pi(x_1 + k_1, x_2 + k_2) = \Pi(x_1, x_2) \quad \text{si } k_1, k_2 \in \mathbb{Z},$$

por lo que el toro también se puede obtener como las clases de equivalencia en \mathbb{R}^2 dado por $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si y solo si $x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$. A partir de aquí $k \in \mathbb{Z}^2$ denominará parejas ordenadas de enteros por lo que $z \sim \tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ si y solo si $z - \tilde{z} \in \mathbb{Z}^2$. Entonces Π puede también ser considerada como la proyección de \mathbb{R}^2 al grupo cociente

$$\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2.$$

Obsérvese que si $K = [0,1) \times [0,1)$ y $K_1 \subset K$, entonces $\Pi|_{K_1}$ es un difeomorfismo y toda función diferenciable en \mathbb{T}^2 tiene asociado una función diferenciable en \mathbb{R}^2 de período $(1,1)$. Inversamente dada $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para cada $z \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}^2$, existe $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^2$ que satisface

$$\tilde{\psi}(z+k) = \tilde{\psi}(z) + \tilde{k},$$

entonces existe una única

$$\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \text{ tal que } \Pi \circ \tilde{\psi} = \psi \circ \Pi.$$

En efecto, esa relación define una función sobre \mathbb{T}^2 porque si $\tilde{z} = z+k$, resulta

$$\Pi(\tilde{\psi}(\tilde{z})) = \Pi(\tilde{\psi}(z)) \quad \text{y} \quad \Pi(\tilde{z}) = \Pi(z)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^2$, $z \in \mathbb{R}^2$.

6.2 Medida y distancia en el toro

La medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 se define por extensión (Hahn-Kolmogorov) al σ -álgebra de los borelianos de la medida definida en el álgebra de las uniones finitas de "rectángulos" $J_1 \times J_2$ donde J_1, J_2 son segmentos en \mathbb{T}^1 y

$$\lambda(J_1 \times J_2) = \frac{\text{long } J_1 \cdot \text{long } J_2}{4 \pi^2}$$

(por detalles, ver por ej. [Mark 1] I.1).

Si $K_1 \subset K$ entonces $\lambda(K_1) = \lambda(\Pi(K_1))$ donde en el miembro de la izquierda λ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 , y en el de la derecha, en \mathbb{T}^2 .

\mathbb{T}^2 se transforma en un espacio métrico si se define $d(p_1, p_2) = \min \|z_1 - z_2\|$ con la norma usual de \mathbb{R}^2 y $\Pi(z_1) = p_1$.

6.3 Base de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$

Lema. a) Si $\psi_k(z) = e^{2\pi i \langle k, z \rangle}$ es la base de Fourier usual en K , $\langle k, z \rangle = k_1 x_1 + k_2 x_2$, $k \in \mathbb{Z}^2$, entonces $\psi_k: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\tilde{\psi}_k = \psi_k \circ \Pi$ es una base de Fourier y

b) Si $\tilde{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una matriz con coeficientes en \mathbb{Z} entonces $A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $\Pi \circ \tilde{A} = A \circ \Pi$, satisface $\psi_k \circ A = \psi_{\hat{A}k}$ donde \hat{A} es la matriz adjunta de A .

Se dice que A es una transformación lineal en el toro.

Dem.:

a) ψ_k esta bien definida porque para todo $z \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}^2$ resultan

$$\tilde{\psi}_k(z+k) = \tilde{\psi}_k(z) \quad \text{y} \quad \Pi(z+k) = \Pi(z).$$

Dado que Π preserva la medida de Lebesgue en $K \subset \mathbb{R}^2$ y \mathbb{T}^2 resulta que si $\varphi_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$,

$$\int \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, d\lambda = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1 \circ \Pi, \varphi_2 \circ \Pi \rangle,$$

donde el segundo producto interno es en $\mathcal{L}^2(K, \mathcal{B}, \lambda)$.

Por tanto $\{\psi_k\}$ constituye un sistema ortonormal por serlo $\{\tilde{\psi}_k\}$.

Además, si $0 = \langle \varphi, \psi_k \rangle = \langle \varphi \circ \Pi, \psi_k \circ \Pi \rangle$, resulta $\varphi \circ \Pi = 0$ por ser $\tilde{\psi}_k$ base de $\mathcal{L}^2(K, \mathcal{B}, \lambda)$; y entonces $\varphi = 0$ por ser Π sobreyectiva;

b) A está bien definida porque $\tilde{A}(z+k) = \tilde{A}(z) + \tilde{k}$ para $\tilde{A}(k) = \tilde{k} \in \mathbb{Z}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} (\psi_k \circ A \circ \Pi)(z) &= (\psi_k \circ \Pi \circ \tilde{A})(z) = \\ &= \tilde{\psi}_k \circ A(z) = e^{2\pi i \langle k, A(z) \rangle} = \\ &= e^{2\pi i \langle \hat{A}k, z \rangle} = \tilde{\psi}_{\hat{A}k}(z) = \psi_{\hat{A}k} \circ \Pi(z) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.4 Ecuaciones diferenciales en el toro.

Si \tilde{X} es un campo vectorial continuo en \mathbb{R}^2 con período $(1,1)$, es inmediato ver que queda definido un campo X en el toro y podemos considerar la ecuación autónoma

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{T}^2 \quad (4)$$

Si $z = z(t)$ es solución de $\dot{z} = \tilde{X}(z)$, también lo es $z(t) + k$ con $k \in \mathbb{Z}^2$. Entonces las soluciones de (4) se obtienen por $x(t) = \Pi(z(t))$, donde $z(t)$ son las soluciones en \mathbb{R}^2 .

Una curva $\Pi \circ \tilde{P}(t)$, $t \in [a, b]$ es cerrada en el toro si y solo si $P(b) = P(a) + k$ con $k \in \mathbb{Z}^2$.

Consideremos $X = \omega = (1, a)$ campo constante en el toro; las soluciones de $\dot{x} = X$ son curvas proyección por Π de las rectas

$z(t) = z_0 + \omega t$ ($x_1 = x_{10} + t$, $x_2 = x_{20} + at$), en el plano. Por tanto, si $a = p/q \in \mathbb{Q}$ las soluciones son periódicas de período q porque

$$z(q) = (x_{10}+q, x_{20}+p) = z(0) + k \text{ con } k = (q, p) \in \mathbb{Z}^2.$$

Es sabido que si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se tiene el flujo irracional en el toro, cuyas trayectorias son todas densas.

6.5 Flujos y rotaciones irracionales

Teorema. *El flujo irracional en el toro es ergódico.*

Dem.: Para cada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$ definimos

$$f(T, x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\Pi(z + \omega t)) dt \text{ con } x = \Pi(z).$$

Debemos probar que

$$\int f d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \int f(T, x) d\lambda \text{ para } \lambda\text{-casi todo } x \in \mathbb{T}^2.$$

Probémoslo en primer lugar para $f = \psi_k$. En este caso, para $k = (0, 0)$ resulta

$$\psi_0 = 1 = \int \psi_0 d\lambda = \psi_0(T, x) \text{ para todo } T > 0 \text{ y } x \in \mathbb{T}^2$$

Obsérvese que

$$\int_{\mathbb{T}^2} f d\lambda = \int_K \tilde{f} d\lambda = \int_K \tilde{f} dx_1 dx_2, \text{ donde } f \circ \Pi = \tilde{f}.$$

Entonces, para $k \neq (0,0)$

$$\int \psi_k d\lambda = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_2 = 0;$$

por otra parte

$$\psi_k(T, x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle k, z_0 + \omega t \rangle} dt = \frac{e^{2\pi i \langle k, z_0 \rangle}}{T 2\pi i \langle -k, \omega \rangle} (e^{2\pi i \langle k, \omega \rangle T} - 1)$$

y como $e^{2\pi i \langle k, \omega \rangle T}$ esta acotado resulta

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \psi_k(T, x_0) = 0.$$

Obsérvese que el hecho de ser α irracional se ha usado para garantizar que $\langle k, \omega \rangle \neq 0$ para todo $(0,0) \neq k \in \mathbb{Z}^2$. Entonces la igualdad de las medias temporales y espaciales se cumple para cualquier combinación lineal de ψ_k .

Sea ahora cualquier $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$. Dado $\varepsilon > 0$, existen dos funciones continuas P, Q tales que

$$P(x) \leq f(x) \leq Q(x), \quad \int |P-Q| d\lambda < \varepsilon$$

y combinaciones lineales p, q , de ψ_k tales que

$|P(x) - p(x)| < \varepsilon$ y $|Q(x) - q(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$. Sean p_0, q_0, f_0 las medias espaciales respectivas; ellas verifican $p_0 - \varepsilon \leq f_0 \leq q_0 + \varepsilon$. Igualmente tendremos que $p(T, x) - \varepsilon \leq f(T, x) \leq q(T, x) + \varepsilon$ para todo

T y todo $x \in \mathbb{T}^2$; pero para T suficientemente grande

$|p(T,x) - p_0| \leq \varepsilon$ y $q(T,x) - q_0 \leq \varepsilon$. Para esos T resultará

$$|f(T,z) - f_0| \leq 6\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Por los mismos procedimientos utilizados en el teorema anterior se demuestra que las rotaciones irracionales en la circunferencia son ergódicas.

Sea $\Pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$ definida por $p = \Pi(x) = e^{2\pi i x}$ y $S_\omega(p) = \Pi(x+\omega)$. Obsérvese que esa función está bien definida, constituye la rotación de ángulo $2\pi\omega$ de cada punto $p \in \mathbb{T}^1$, y que preserva la medida de Lebesgue (longitudes) en \mathbb{T}^1 . Para probar que si $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces S_ω es ergódica, en la demostración del teorema anterior sólo hay que modificar las partes referidas a las medias temporales

$$\psi_k(n,p) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_k(S_\omega^i p).$$

Resulta $\psi_0(n,p) = 1$, $\psi_k(n,p) = \frac{e^{2\pi i x}}{n} \frac{e^{2\pi i k \omega n}}{1 - e^{2\pi i k \omega}}$ y

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_k(n,p) = 0$ si $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $p \in \mathbb{T}^1$, porque $k\omega$ es irracional. Esta observación, muestra la igualdad de las medias espaciales y temporales para combinaciones lineales de ψ_k . El proceso de aproximación es formalmente el mismo.

Sin embargo, es simple probar que las rotaciones **no** son mixing. Lo probaremos para valores de ω en el

intervalo $0 < \omega < 1/2$. Si A y B son arcos de longitud $\Pi\omega$, cada vez que $S_{\omega}^{-n} A \cap B \neq \emptyset$ resultará

$S_{\omega}^{-n-1} A \cap B = \emptyset$. Por tanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(S_{\omega}^{-n} A \cap B)$ si existe es cero, mientras que $\lambda(A)\lambda(B) = \omega^2/4 \neq 0$.

Así, mientras que toda transformación mixing es ergódica, tenemos en ejemplo muy simple de transformación ergódica, no mixing.

6.6 Transformaciones lineales en \mathbb{T}^2

Ya hemos visto que si $\hat{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene coeficientes enteros, $\hat{A}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$, entonces existe una transformación $A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $\Pi \circ \tilde{A} = A \circ \Pi$. Se dice que A es lineal y que \tilde{A} es su levantamiento. Si $\det \tilde{A} = \pm 1$ entonces la medida de Lebesgue es invariante por A (Ver por ej., [Mark1]I.4.2).

Obsérvese también que si $\det \tilde{A} = \pm 1$, resulta que la inversa \tilde{A}^{-1} también tiene coeficientes enteros, y en este caso también existe la inversa $A^{-1}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. En este caso A es un difeomorfismo del toro y estamos interesados en estudiar tales transformaciones cuando \tilde{A} tiene valores propios que no son raíces de la unidad y direcciones propias irracionales. En este caso se tiene un **difeomorfismo lineal de Anosov**: Su ejemplo estandar está dada por la matriz $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En esta sección restringiremos nuestro estudio al automorfismo lineal del toro definido por esta \tilde{A} ,

aunque sus propiedades son generalizables a todas las que cumplen las hipótesis indicadas arriba.

Los valores propios de \tilde{A} son

$$\mu, \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad 0 < \lambda < 1 < \mu$$

y sus direcciones propias están respectivamente dadas por

$$(1, m_{\mu, \lambda}), \quad m_{\mu, \lambda} = \frac{\pm \sqrt{5} - 1}{2}.$$

Proposición.

- a) $\Pi(0,0) = (1,1)$ es el único punto fijo de $A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$
- b) $\Pi(x_1, x_2)$ con $x_i \in \mathbb{Q}$ son sus únicos puntos periódicos.

Dem.:

a) $A(1,1) = A\Pi(0,0) = \Pi\hat{A}(0,0) = \Pi(0,0) = (1,1).$

Inversamente si $A\Pi(x_1, x_2) = \Pi(x_1, x_2)$ resulta

$$\hat{A}(x_1, x_2) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2) \quad k_i \in \mathbb{Z},$$

por lo que

$$(\hat{A} - \hat{I})(x_1, x_2) = (k_1, k_2);$$

pero

$$(\hat{A} - \hat{I})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo que $(x_1, x_2) = (\hat{A} - \hat{I})^{-1} (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ y
 $\Pi(x_1, x_2) = (1, 1)$

b) Sean $x_1 = \frac{k}{n}$, $x_2 = \frac{m}{n}$. Entonces

$\hat{A}(x_1, x_2) = \frac{1}{n} \hat{A}(k, m)$, y $A\Pi(x_1, x_2)$ tiene un k representante en K de la forma $(k_1/n, k_2/n)$; pero estos son finitos por lo que para alguna potencia A^r ese representante deberá repetirse y $A^r\Pi(x_1, x_2) = \Pi(x_1, x_2)$.

Inversamente, si $A^r\Pi(x_1, x_2) = \Pi(x_1, x_2)$ resulta

$$\hat{A}^r(x_1, x_2) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2) \text{ con } k_i \in \mathbb{Z}$$

y

$$(\hat{A} - \hat{I})(x_1, x_2) = (k_1, k_2).$$

Nuevamente $(\hat{A}^r - \hat{I})^{-1}$ existe y ahora tiene coeficientes racionales por lo que

$$(\hat{A} - \hat{I})^{-1} (k_1, k_2) = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2,$$

como queríamos probar. ■

6.7 Conjuntos estables e inestables.

Si X es un espacio métrico con distancia d y $f: X \rightarrow X$, una función invertible, definimos **conjuntos estables e inestables de f por p** :

$$W^s(p) = \{q: d(f^n p, f^n q) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(p) = \{p: d(f^n p, f^n q) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow -\infty\}$$

Llamaremos **conjuntos invariantes** a cualesquiera de ellos dos, en parte por satisfacer las siguientes propiedades, cuya prueba queda como ejercicio:

- a) $f W^s(p) = W^s(f(p))$, $f^{-1} W^u(p) = W^u(f^{-1}p)$
- b) Si $f^N(p) = p$ (p periódico de período N), entonces $f^{\pm N}(W^{s,u}(p)) = W^{s,u}(p)$
- c) $q \in W^{s,u}(p) \Leftrightarrow p \in W^{s,u}(q)$;
 $q \in W^{s,u}(p)$, $q' \in W^{s,u}(q) \Rightarrow q' \in W^{s,u}(p)$
- d) Si p es asintóticamente estable (Liapunov) entonces $W^s(p)$ contiene un entorno de p y $W^s(p)$ se denomina **cuenca de atracción** de p .

Proposición. La imagen por $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ de la recta $z(t) = (x_{10}, x_{20}) + t(1, m_\lambda)$ está contenida en el conjunto estable de A por $p = \Pi(x_{10}, x_{20})$. De igual manera $\Pi(\{x_{10}, x_{20}\} + t(1, m_\mu): t \in \mathbb{R}) \subset W^u(p)$.

Dem.: Se debe probar que

$$d(A^n \Pi(z(t)), A^n p) \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow +\infty.$$

Por la definición de distancia en el toro alcanza con probar que $\|\hat{A}^n z(t) - \tilde{A}(x_{10}, x_{20})\| \rightarrow 0$. Esa norma por la linealidad de \hat{A}^n , es igual a $\|t \hat{A}^n(1, m_\lambda)\| = |t| \lambda^n \|(1, m_\lambda)\|$ que tiende a cero exponencialmente $\forall t \in \mathbb{R}$ porque $0 < \lambda < 1$. ■

Corolario:

- a) $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son densos en \mathbb{T}^2 para todo $p \in \mathbb{T}^2$
- b) $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ para todo $p, q \in \mathbb{T}^2$.

6.8 Mixing topológico

Si X es un espacio topológico, diremos que el homeomorfismo, $f: X \rightarrow X$ es **topológicamente mixing** si para cada pareja de abiertos U, V existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n U \cap V \neq \emptyset \text{ para } n \geq N.$$

El siguiente resultado relaciona el mixing topológico con el mixing en medida, visto anteriormente.

Lema. Sea (X, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad en que X es topológico, \mathcal{B} son sus borelianos y $\mu(U) > 0$ para todo abierto $U \subset X$. Entonces, si el homeomorfismo $f: X \rightarrow X$ es μ mixing, es topológicamente mixing.

Dem.: Dados los abiertos U, V , por ser μ -mixing, resulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(f^{-n} U \cap V) = \mu(U) \mu(V) > 0 \Rightarrow \mu(f^{-n} U \cap V) > 0$$

para $n \geq N \Rightarrow U \cap f^n V \neq \emptyset$ para $n \geq N$. ■

Enunciaremos ahora un resultado que da condiciones suficientes para el **caos topológico**, en términos de puntos periódicos y conjuntos invariantes. Sean X y f como en la definición de mixing topológico. Entonces $p \in X$ es **no errante** si para cada entorno U de p y cada $n > 0$ existe $N \geq n$ tal que $f^N U \cap U \neq \emptyset$. Llamaremos $\Omega = \Omega(f)$ al **conjunto de los puntos no errantes de f** . $\text{Per}(f)$ será el conjunto de los **puntos periódicos de f** . Un conjunto C es **residual** en X si existen A_i , abiertos densos en X , $i \in \mathbb{N}$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subset C.$$

No daremos la demostración del teorema, por escapar al contenido y dimensiones de estas notas, pero su conocimiento y comprensión son fundamentales para entender el origen del caos en estructuras topológicas (obsérvese que no usamos estructuras diferenciables).

Teorema. (Condiciones suficientes para el caos topológico). Sea X un espacio métrico, conexo con infinitos puntos y $f: X \rightarrow X$, un homeomorfismo (función continua con inversa continua) que satisface

- i) $\text{Per}(f)$ es denso en X ;
- ii) existe un cubrimiento de X por abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que si $p, q \in U_\alpha$ entonces

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset.$$

Entonces

- 1) $\Omega = X$;
- 2) $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son densos en X para todo $p \in \text{Per}(f)$
- 3) f es topológicamente mixing;
- 4) Dados V_1, V_2, \dots, V_k abiertos, existe una trayectoria periódica que pasa por todos ellos;
- 5) Hay puntos periódicos con período arbitrariamente grande;
- 6) Si X tiene base numerable (un conjunto numerable de abiertos tales que cualquier abierto contiene uno de ellos) entonces existe un conjunto residual de puntos con trayectoria densa.

Obsérvese que como consecuencia de las proposiciones en 6.6 y 6.7 el automorfismo lineal $A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$

definido por $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es topológicamente mixing,

tiene puntos periódicos de período arbitrariamente grande y un conjunto residual de órbitas densas.

Probaremos ahora que es λ -mixing y relacionaremos esto con la existencia de variedades invariantes densas.

6.9 Los Automorfismos lineales de Anosov son mixing

Teorema. Sea el espacio de probabilidad $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$.

A: $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, definida por $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, es mixing.

Dem.: Demostraremos que $\langle f \circ A^n, g \rangle \rightarrow \langle f, 1 \rangle \langle g, 1 \rangle$ para toda $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$; el producto interno es en este espacio. Nos restringiremos a probarlo para elemento de la base ortonormal de Fourier (ver 6.3). El caso general se prueba por aproximación por combinaciones lineales de elementos de esa base, como se hizo en 6.5.

Si $f = \psi_0 = 1$, el resultado es trivial.

Si $f = \psi_k$ $k \neq (0,0)$ resulta $\psi_k \circ A^n = \psi_{\hat{A}^n k}$ (6.3.b)

Pero $\{\hat{A}^n k\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene todos sus elementos distintos porque si se repitiera resultaría $\hat{A}^n k = k$ para algún n y \hat{A}^n tendría valor propio 1 por lo que \hat{A} tendría valor propio una raíz n -ésima de la unidad, y eso no sucede. Entonces $\langle \psi_k \circ A^n, \psi_j \rangle = 0$ a partir de algún n , para toda pareja $k \neq 0, j \in \mathbb{Z}^2$. Naturalmente que $\langle \psi_k, 1 \rangle = 0$ y tenemos

$$\langle \psi_k \circ A^n, \psi_j \rangle \rightarrow \langle \psi_k, 1 \rangle \langle \psi_j, 1 \rangle.$$

Obsérvese que los valores de la sucesión para n grande, y del limite, son siempre cero excepto el caso

$k = j = (0,0)$. ■

6.10 Observación hiperbólica

En 6.7 se demostró que para cada punto del toro hay una dirección en que A^n ($n > 0$) expande y otro en que contrae (los puntos se alejan o se acercan al ser iterados). En realidad no hemos probado que los puntos de $W^u(p)$ se separan al iterar hacia el futuro, pero, con el mismo formalismo de 6.7 se prueba que los puntos de las rectas de dirección $(1, m_\mu)$ son "separados" en factor μ^n al cabo de $n > 0$ iteraciones. Obsérvese que esta "separación" no es propiamente en el toro, donde todas las distancias son finitas, sino en "longitud" sobre $W^u(p)$.

Todo ese comportamiento es típico de la **dinámica hiperbólica** en que las **foliaciones** $W^s(p)$, $W^u(p)$ son densas.

El proceso de mezclado se explica así. Sea la imagen de un conjunto $\hat{D} \subset \mathbb{R}^2$ por \hat{A}^n . Esta aplicación es hiperbólica, producto de una contracción de razón λ^n en la dirección $(1, m_\lambda)$ por una dilatación de razón μ^n en la dirección $(1, m_\mu)$. Por tanto la imagen de \hat{D} por \hat{A}^n es una banda larga y estrecha, estirándose a lo largo de la segunda dirección propia, que tiene pendiente irracional. Entonces $\Pi(\hat{A}^n \hat{D})$ está uniformemente distribuido en el toro y corta todo conjunto $E \subset \mathbb{T}^2$. Continuando este tipo de razonamiento se prueba la propiedad de mixing, por un camino "más dinámico".

7. SENSIBILIDAD RESPECTO DE LAS CONDICIONES INICIALES. EXPONENTES DE LIAPUNOV. ENTROPIA

El ejemplo del automorfismo lineal del toro muestra que las evoluciones muy diferentes de puntos muy próximos está en la base de los fenómenos caóticos, desordenados, de sistemas dinámicos. Por ello, un elemento esencial para el estudio de la dinámica de un sistema físico, matemático o de simulación, es la separación en el tiempo de dos puntos infinitesimalmente próximos en un instante $t = 0$.

7.1 Sensibilidad respecto de las condiciones iniciales

Consideremos un sistema a tiempo discreto, o sea en el que se realizan mediciones cada cierta unidad de tiempo $n = 0, 1, \dots$, a valores en \mathbb{R} ,

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

La separación δx_0 de dos puntos x_0, \tilde{x}_0 luego de un tiempo N es, si se supone f derivable,

$$x_N - \tilde{x}_N = f^N(x_0) - f^N(\tilde{x}_0) \approx \left| \frac{d}{dx} (f^N)(x_0) \right| [x_0 - \tilde{x}_0].$$

Entonces, por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} (f^N)(x) = \frac{d}{dx} f(x_{N-1}) \cdot \frac{d}{dx} f(x_{N-2}) \dots \frac{d}{dx} f(x_0).$$

En el caso en que $x \in \mathbb{R}^d$ las derivadas $\frac{d}{dx} f$ deben ser reemplazadas por las matrices jacobianas f'_{x_j} .

Si los factores en la expresión de la regla de la cadena fueran todos comparables (por ej., si f es lineal), sucede que $\frac{df^N}{dx}$ crece o decrece exponencialmente con N , y por lo tanto también lo hace la distancia $x_N - \tilde{x}_N$. Así se puede definir la media de crecimiento (o decrecimiento) como

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \|(f^N)'_{x_0}\| \delta x_0 \quad \text{y} \quad x_N - \tilde{x}_N \approx e^{\lambda N} \delta x_0.$$

Por el Teorema de Oseledets (ver [Mark1] III.2 o [Mañe] IV.10.) este límite existe por casi todo x_0 (con respecto a cualquier probabilidad μ invariante por f).

La media de expansión (o contracción) depende de la dirección de la perturbación inicial δx_0 , así como de x_0 . Sin embargo, si μ es ergódica el λ más grande (respecto de la perturbación inicial δx_0) es independiente de x_0 , para μ -casi todo x_0 . Este número se llama el mayor **exponente de Liapunov** (o **exponente característico**) de f respecto de μ .

Muchas direcciones pueden producir el más grande exponente de Liapunov λ_1 , pero otros pueden producir otros exponentes de Liapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s(x_0)$.

Los exponentes de Liapunov y otros números relacionados con ellas dan muy buenos datos sobre la **producción de información** del sistema en un sentido que se verá de inmediato.

Ellos están relacionados con cuán excitable o cuán caótico es el sistema. El número de grados de libertad también juega su papel, y aún más depende de la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales.

7.2 Un ejemplo

Veamos con un ejemplo bien conocido y simple cómo la **entropía** (producción de información) se relaciona con la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales.

Sean $f(x) = 2x \pmod{1}$ $f: [0,1) \rightarrow [0,1)$ y λ la medida de Lebesgue en $[0,1)$. λ es invariante por f .

Si $\Sigma^+ = \{\theta: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}\}$ es el conjunto de las sucesiones con valores 0,1 ; para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $\mu(\{\theta: \theta(j) = 0\}) = 1/2$. Entonces queda definida una medida en Σ^+ tal que

$$\mu(\{\theta: \theta(j_1) = 0 \text{ ó } 1, j_1 < j_2 \dots < j_m\}) = 1/2^m.$$

La transformación $\sigma: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ definida por $\sigma(\theta)(j) = \theta(j+1)$ es μ -invariante. Obsérvese que σ no es inyectiva. Se dice que es un **desplazamiento (shift)**.

Si $I_0 = [0, 1/2)$, $I_1 = [1/2, 1)$, definimos

$F: [0,1) \rightarrow \Sigma^+$, invertible casi todo punto por

$F(x) = \theta$ tal que $\theta(n) = j$ si $f^n x \in I_j$. Esta F preserva las medidas μ y λ ; o sea $\lambda(F^{-1}(A)) = \mu(A) \forall A$ en el σ -álgebra generado por los conjuntos indicados de Σ^+ . Obsérvese que

$$G(\theta) = \prod_{m=0}^{\infty} f^{-m}(\bar{I}_{\theta(m)})$$

define la función inversa de $F|_{\Lambda}$ para

$$\Lambda = \prod_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I_0 \cup I_1).$$

Además $\sigma \circ F = F \circ f$.

Un simple cálculo muestra que para esta f , $\lambda_1 = \log 2$. Veremos en qué sentido ese número indica la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales.

Supongamos que un aparato de medida -muy grosero- sólo distingue que un punto está en I_0 o en I_1 . Sin embargo, si a partir de x_0 vamos haciendo sucesivas mediciones al avanzar el tiempo, iremos obteniendo los elementos de $F(x_0)$, por lo que iremos ganando información. Cambios en las condiciones iniciales serán inobservables en las primeras iteraciones (porque x_N y \tilde{x}_N están en el mismo I_j), pero serán observables más adelante; se está produciendo información al avanzar en el tiempo. Dar condiciones iniciales distintas, indistinguibles en el experimento, se vuelven distinguibles después de tiempo finito.

7.3 Entropía métrica

La tasa media de creación de información $h_\mu(f)$ es la **entropía métrica** o **invariante de Kolmogorov-Sinai**. Si la medida es ergódica para f ella está relacionado directamente con la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales. En este caso la entropía se puede acotar en términos de los exponentes de Liapunov (desigualdad de Ruelle) :

$$h_\mu(f) \leq \Sigma \text{ (exp. característicos positivos).}$$

En muchos casos (no en todos) se satisface la **igualdad de Pesin**.

Si los sistemas son **disipativos** (no preservan medida) la entropía métrica es diferente de la entropía termodinámica.

Sea, en general, $f: X \rightarrow X$ que preserva una medida μ del espacio de probabilidad (X, \mathcal{A}, μ) . \mathcal{P} es una

partición de X si

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{A}; \quad A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow \mu(A \cap B) = 0 \quad \text{y} \quad \mu\left(X \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P\right) = 0.$$

Supongamos que para un cierto aparato es indistinguible la pertenencia de dos puntos a una misma $P \in \mathcal{P}$. Por tanto, para el sistema definido por las iteraciones de f , la creación de información a partir de x se da por el conocimiento del elemento de \mathcal{P} en el que esta $f^n(x)$.

Si $\mathcal{P}(x)$ es el elemento (átomo) de \mathcal{P} al que pertenece x , se define

$$\mathcal{P}_n(x) = \{y: T^j y \in \mathcal{P}(T^j x), \quad 0 \leq j \leq n\} = \bigcap_{j=0}^n T^{-j}(\mathcal{P}(T^j x)),$$

o sea el conjunto de puntos que son indistinguibles de x al cabo de n iteraciones.

Cabe preveer que si $n \rightarrow +\infty \quad \mu(\mathcal{P}_n(x)) \rightarrow 0$. Eso es cierto si f y sus iteraciones son ergódicas: Ver [Mañé] IV.1.1. El estudio de esa convergencia lleva naturalmente a considerar el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}_n(x)).$$

La existencia de ese límite μ -c.t. $x \in X$ cuando $\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P) < \infty$ es el contenido sustancial del T. de Shannon-Mc Millan-Breiman ([Mañé] IV. 1.2-3).

Entonces, se define la entropía de f con respecto a \mathcal{P} en x como el opuesto del valor de ese límite; $h(f, \mathcal{P}, x)$ existe c.t. $x \in X$ y es \mathcal{L}^1 . La media espacial

$$h(f, \mathcal{P}) = \int h(f, \mathcal{P}, x) d\mu(x)$$

es la entropía de f respecto a \mathcal{P} .

(Quiénes quieran estudiar la definición de la entropía de Kolmogorov, pueden consultar, además del mencionado libro de Mañé, [Gutier] § 10).

Por último, definimos la **entropía de f con respecto a μ** como

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ particiones finitas de } X\},$$

que así resulta una estimación "en media" de la complejidad del sistema.

En este sentido mayor entropía significa que promedialmente $\mu(\mathcal{P}_n(x))$ tiende más rápidamente a cero y por tanto el sistema es más **complejo, desordenado o caótico**.

Un simple cálculo muestra que en el ejemplo estudiado en el intervalo $[0,1)$, resulta

$$h_\lambda(f, \mathcal{P}) = \log 2, \text{ si } \mathcal{P} = \{I_0, I_1\}.$$

Que ése es el valor de $h_\lambda(f)$, se deduce del Teorema de Kolmogorov-Sinai. Este teorema permite evitar el cálculo del supremo usando particiones especiales llamadas **f -generadoras**. Ver [Mañé]IV.4; [Gutier] §11.

7.4 Exponentes de Liapunov no nulos

Si bien la expresión sensibilidad respecto de las condiciones iniciales no tiene un significado cuantitativo preciso, nosotros de alguna manera lo hemos identificado con los exponentes de Liapunov.

En esta introducción no queremos pasar a un grado mayor de precisión, pero por lo ya indicado en 7.1 se deduce que el espacio tangente a la variedad en la que se trabaja (\mathbb{R}^d , si el espacio fuera \mathbb{R}^d) se puede descomponer en suma directa de subespacios $E_i(x)$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'_x e_i\| = \lambda_i(x) \quad \text{para todo } e_i \in E_i(x).$$

Esta descomposición fue la que hicimos para cada punto del toro y el automorfismo lineal definido por

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso los subespacios están dados por las direcciones propias y los exponentes de Liapunov son $\log \mu > 0 > \log \lambda$, cuya suma da cero. Los automorfismos lineales de Anosov tienen hiperbolicidad muy uniforme porque la expansión y la contracción son constantes en cada punto, al igual que los ángulos entre los subespacios estables e inestables.

Llamaremos **región de Pesin** al conjunto de los puntos en que los exponentes de Liapunov son todos distintos de cero: $\{x \in X: \lambda_i(x) \neq 0 \forall i\} = \Sigma(f)$. Si $\mu(\Sigma(f)) = 1$ diremos que el sistema es **no-uniformemente hiperbólico**. La diferencia principal con el ejemplo del toro es que tanto los exponentes como los ángulos entre los subespacios $E_i(x)$ pueden acercarse a cero.

Aún así, se pueden construir conjuntos estables e inestables, locales ("pequeños"), la entropía es positiva y, en muchos casos, se puede probar que los sistemas son mixing, y verifican otras de las propiedades vistas en la sección 5. Por todo ello el estudio de los exponentes de Liapunov y, en particular, su no

anulación, podría incluirse entre las propiedades estadísticas que son objetos de estudio de la teoría Ergódica.

La caracterización de sistemas dinámicos con exponentes de Liapunov no nulos por medio de otras herramientas, "más analíticas" (formas cuadráticas) y el uso de estas caracterizaciones para deducir otras propiedades estadísticas constituye el centro del trabajo de investigación del autor de estas notas.

8. ALGO MÁS SOBRE BILLARES

En esta última sección indicaremos cuáles son las propiedades estadísticas probadas para distintos tipos de billares planos. A efectos de no complicar la presentación daremos la descripción de las formas más representativas de cada tipo. Una revisión bibliográfica bastante completa hasta 1992 se encuentra en [Mark1]; por trabajos posteriores, ver [Mark2].

La presentación formal de la transformación de billar y de la medida invariante utilizada, se encuentra en la sección 4. Por tanto aquí nos restringimos a la descripción de la "mesa" Q del billar.

En ningún caso son admitidos billares que tengan un conjunto de μ -medida positiva (en el espacio de fase) de trayectorias que sólo rebotan en bordes neutros (curvatura nula). En particular se descartan los billares poligonales de los cuales se sabe que tienen exponentes de Liapunov y entropía nulos, aunque "muchos" de ellos son ergódicos.

También se supondrá que el ángulo entre dos trozos adyacentes de la frontera es

- i) mayor que 0 si ambas son dispersores;
- ii) mayor o igual que $\pi/2$ si uno es dispersor y el otro no;

- iii) mayor o igual que Π si uno es focalizador y el otro neutro; y
- iv) mayor que Π si ambos son focalizadores.

En todos los casos en que se ha probado que son mixing, también se ha probado una propiedad más fuerte (K-sistema) que no hemos definido en esta Introducción y que de figurar en la sección 5 debería aparecer como un ramal 5.3.b .

8.1 Billares dispersores (y semidispersores).

Fueron los originalmente estudiados en [Sinai1]. Sus trozos de frontera pueden ser dispersores o neutros. Se ha probado que verifican todas las propiedades estadísticas indicadas en 5; el decaimiento de la correlación es subexponencial con $\alpha = 1/2$, aunque se presume que ese resultado se pueda mejorar, al menos en algunos casos.

También son “de Bernoulli”, propiedad estadística aún más “fuerte” que la de ser K-sistemas.

8.2 Billares con arcos de circunferencia

Son llamadas de Bunimovich y su ejemplo más típico es el stadium (fig. 2, con $a = 1$). Se pueden colocar arcos de hasta media circunferencia (siempre que los

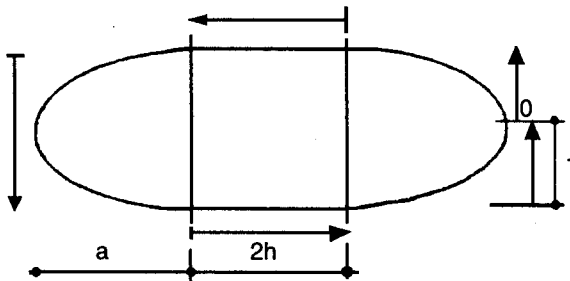


FIGURA 2: STADIUM ELIPTICO

círculos correspondientes no contengan otros trozos de la frontera) y segmentos de recta. Se ha probado que son mixing, y en el caso del stadium, también se han probado las propiedades 5.4 y 5.5 con $\alpha = 1/2$.

8.3 Billares con otros tipos de arcos focalizadores

Fueron estudiados inicialmente por Wojtkowski, quien probó que algunos de ellos tenían región de Pesin de medida total. Si $R(s)$ es el radio de curvatura en relación a la longitud de arco s , pueden formar parte de estos billares arcos que verifican o bien

$$d^2R/ds^2 < 0 \quad \text{o bien} \quad d^2(R^{1/3})/ds^2 > 0.$$

En los del primer tipo se incluyen la cardioide, epicicloides, cicloides. Arcos de elipse próximos a los vértices verifican una u otra condición: si la elipse esta dada por

$$x = a \cos t, \quad y = \text{sent}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 1),$$

los "buenos" arcos de elipse están definidos por

$$\text{sen}^2 t \leq \frac{1}{1 + a^2} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Se ha demostrado que los billares que tienen arcos de frontera neutros, dispersores y focalizadores que verifican $d^2R/ds^2 < 0$, estando las componentes no adyacentes "suficientemente" separadas, son mixing y existen buenas presunciones que se probará que el billar en la cardioide (de ecuación

$P(t) = 0 + (1 - \cos t) e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en coordenadas polares) verifica las propiedades 5.4 y 5.5 (ver [Mark3]).

8.4 Billares con arcos elípticos

Donnay y Bunimovich estudiaron otros tipos de arcos (que llamaron **absolutamente focalizadores**) que pueden formar parte de billares con región de Pesin de medida total. Esto incluye la media elipse que resulta de cortar a lo largo del eje menor (de longitud 2), si el semieje mayor está entre 1 y $\sqrt{2}$.

Entonces se puede construir el stadium elíptico de la fig. 2, que tiene región de Pesin de medida uno si $h > h(a)$. Por procedimientos de simulación se han hallado las aproximaciones para $h(a)$ que se indican en la tabla ($h(a) \rightarrow +\infty$ cuando $a \rightarrow \sqrt{2}$). Es de esperar que se pruebe que estos billares son mixing para valores $h > h(a)$, $1 < a < \sqrt{2}$.

a	$h(a)$
1	0
1,1	0,46
1,2	0,7
1,3	1,4
1,4	7
1,41	11

8.5 Entropía

Sinai y Chernov demostraron fórmulas relativamente sencillas para la entropía de billares semidispersores y de Bunimovich. Esas fórmulas fueron extendidas para billares con hiperbolicidad no uniforme, en [CheMar].

En este caso los conjuntos estables e inestables de la transformación S , del billar, están definidos para casi todos los puntos de \mathcal{R} , y son curvas (quizás muy cortas). La entropía está dada por la fórmula

$$h_{\mu}(S) = \int_{\mathcal{R}} \log|1 + k(x) t(x)| d\mu(x)$$

donde $t(x)$ es la distancia (tiempo) entre el rebote en x y el siguiente; y $k(x)$ es un valor directamente relacionado con la curvatura de la variedad inestable, que depende de las curvaturas de la frontera y los tiempos entre rebotes, en "el pasado" de x ($S^{-n}x$, $n \geq 0$).

BIBLIOGRAFIA:

- [CheMar]** Chernov, N. & Markarian, R. (1992), Entropy of non-uniformly hyperbolic plane billiards. Bol. Soc. Bras.Mat 23 121-135.
- [CoFoSi]** Cornfeld, I.P.; Fomin, S.V. & Sinai, Ya.G (1982), Ergodic Theory (Berlin, Heidelberg, New York: Springer).
- [Gutier]** Gutierrez, C. (1992), Introducción a la teoría ergódica. Pro Mathematica Vol VI, 3-102.
- [Khin]** Khinchin, A.I. (1949), Mathematical Foundations of Statistical Mechanics (New York: Dover).
- [Mañé]** Mañé, R. (1983), Introdução à Teoria Ergódica (Rio de Janeiro: IMPA). English Ed. (1987). Ergodic Theory and Differentiable dynamics (Berlín, Heidelberg, New York: Springer).
- [Mark1]** Markarian, R. (1993), Introduction to the ergodic theory of plane billiards. Dynamical Systems, Santiago de Chile 1990. Edited by R. Bamón, R. Labarca, J. Lewowicz and J. Palis (Harlow, Longman) pp. 327-439.

- [Mark2]** Markarian, R. (1993), New Ergodic Billiards: exact results. Nonlinearity.
- [Mark3]** Markarian, R. (1993), Statistical Properties of Dynamical Systems with singularities [pre print].
- [Sinai1]** Sinai, Ya.G. (1970), Dynamical Systems with elastic reflections. Russian Math. Surveys 25: 1, 137-189.
- [Sinai2]** Sinai, Ya.G. (1976), Introduction to ergodic theory (Princeton: Princeton University).
- [Walt]** Walters, P. (1982), An Introduction to Ergodic Theory (Berlin, Heidelberg, New York: Springer).