PRO MATHEMATICA: Vol.VII, Nos. 13-14,1993

DIFERENCIABILIDAD DE LA RAÍZ DE PERRON-FROBENIUS DE MATRICES INNEGATIVAS E INDESCOMPONIBLES

Ramón **GARCÍA-COBIÁN***

RESUMEN

Luego de establecer el que las matrices innegativas e indescomponibles nxn forman un subconjunto abierto y denso en el espacio de las innegativas nxn , se demuestra la diferenciablidad de la función que a cada matriz tal le asigna su raíz de Perron - Frobenius.

* Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) Dpto. de Ciencias, Sec. Matemática.

Definición

Se dice que una matriz innegativa A, cuadrada nxn, es "**indescomponible**" si no hay ningún subconjunto propio, J, de $\mathbb{N}_n$[1], no vacío y tal que

$$\forall\, j \in J\ \forall\, i \in \mathbb{N}_n \setminus J,\quad a_{ij} = 0.$$

TEOREMA (de Perron-Frobenius)

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, con $n \geq 2$, innegativa e indescomponible, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(i) A tiene un valor propio positivo, $\lambda(A)$, llamado "**raíz de Perron-Frobenius de A**" tal que la ecuación característica de A tiene en $\lambda(A)$ una raíz simple, es decir, de multiplicidad 1; en consecuencia, hay un vector propio $x > 0$ a ella asociado, y cualquier otro que sea tal es múltiplo de x ;

(ii) el espectro de A, es decir, el conjunto de sus raíces características, se encuentra contenido en el círculo de centro en el 0 del plano complejo, y de radio igual a $\lambda(A)$, siendo $\lambda(A)$ el único valor propio innegativo;

(iii) para todo ρ de $\mathbb{R}$, si la matriz identidad nxn se denota por I_n, entonces $\exists(\rho I_n - A)^{-1} > 0 \Leftrightarrow \rho > \lambda(A)$.
(Ver, Nikaido, (1978), pp. 125 y 143).

1 $\mathbb{N}_n := \{h \in \mathbb{N} \mid h \leq n \wedge h \geq 1\}$

LEMA 1

El conjunto $\bar{J}_+(n.n)$ de todas las matrices innegativas e indescomponibles nxn es un subconjunto abierto y denso del espacio de todas las matrices innegativas nxn.

Demostración:

1° Es abierto.

Primero hay que notar que la definición de indescomponibilidad puede extenderse de modo natural al espacio de todas las matrices nxn ; en efecto, dígase que una matriz tal, A, es "*indescomponible*" si no hay ningún subconjunto propio y no vacío, J, de $\mathbb{N}_n$ tal que

$\forall j \in J\ \forall i \in \mathbb{N}_n \setminus J,\ a_{ij} = 0.$

Denótese el espacio de todas las matrices nxn por $\mathcal{M}(n,n)$, y el subconjunto de todas las matrices indecomponibles por Ind(n,n). Para poder hablar de abiertos en $\mathcal{M}(n.n)$ es preciso tener una topología en este espacio; esto se logra proveyéndole de una norma, como sigue. Se dirá que la norma de una matriz A es el número real $\|A\| := \max \{|a_{ij}|/(i,j)\in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n\}$. En seguida se genera una métrica en $\mathcal{M}(n.n)$ definiendo la distancia entre dos matrices cualesquiera, A y B, mediante: $d(A,B) := \|A-B\|$.

Si $A \in$ Ind(n,n), A no puede ser la matriz nula, pues de serlo ella sería obviamente descomponible (bastaría definir $J := \{1\}$, y así $\forall\ i > 1,\ a_{i1} = 0$). Luego, $\|A\| > 0$ y, además, para todo subconjunto propio y no vacío de $\mathbb{N}_n$, J, hay un $j_J \in J$ y un $i_J \in \mathbb{N}_n - J$ tales que $a_{i_J\, j_J} \neq 0$. Defínase ε mediante

$\varepsilon := \min\{|a_{i_J\ j_J}| \ / \ \Phi \neq J \subsetneq \mathbb{N}_n\}$. Se sigue que cualquier otra matriz A'; tal que $\|A - A'\| < \varepsilon$, es también idescomponible, pues $\forall\ J \subsetneq \mathbb{N}_n$, no vacío, el elemento $a'_{i_J\ j_J} \neq 0$. Así, $\mathrm{Ind}(n.n)$ es abierto en $\mathcal{M}(n,n)$. Finalmente, si se denota por $\overline{\mathrm{Ind}}_+(n,n)$ el conjunto de las matrices nxn innegativas e indescomponibles, es claro que $\overline{\mathrm{Ind}}_+(n,n) = \mathrm{Ind}(n,n) \cap \overline{\mathcal{M}}_+(n,n)$ donde $\overline{\mathcal{M}}_+(n,n)$ denota el conjunto de las matrices nxn innegativas; y como ya se probó que $\mathrm{Ind}(n,n)$ es un abierto de $\mathcal{M}(n,n)$, resulta que $\overline{\mathrm{Ind}}_+(n,n)$ es un abierto de $\overline{\mathcal{M}}_+(n,n)$.

2° Es denso

lo que hay que probar es que en $\overline{\mathcal{M}}_+(n,n)$, las matrices indescomponibles se encuentran "por doquier", es decir, en cualquier vecindad, W, de cualquier matriz Q, de $\overline{\mathcal{M}}_+(n,n)$, sea ésta descomponible o indescomponible, y por pequeña que sea aquella vecindad; en cualquier caso habrá una matriz innegativa e indescomponible en dicha vecindad. Pero esto es inmediato, si se tiene en cuenta que toda matriz estrictamente positiva, es decir, carente de elementos nulos ó negativos, es indescomponible; pues en caso que Q sea indescomponible, resulta trivialmente cierta la afirmación, ya que la misma Q se encuentra en todas sus vecindades; y en caso que Q sea indescomponible, entonces $\exists\ \delta > 0,\ B(Q,\ \delta) \cap \overline{\mathcal{M}}_+(n,n) \subseteq W$ (aquí $B(Q,\delta)$ denota a "la bola abierta" de centro Q y de radio δ). Ahora bien, basta con definir Q' como $Q + E$, donde E es una matriz $n \times n$ todos cuyos elementos valen $\delta/2$; puede verse fácilmente que $Q' \in B(Q, \delta) \cap \bar{\mathcal{M}}_+(n,n)$, y, en consecuencia, a la vecindad arbitraria W. Además, Q' es estrictatamente positiva, y, por lo tanto, indescomponible.

■

LEMA 2

(i) El espectro de una matriz depende continuamente de ésta, es decir, que si $\sigma(A)$ es el conjunto de las raíces características de la matriz A, entonces para cualquier vecindad U de $\sigma(A)$ en el plano complejo $\mathbb{C}$, hay una vecindad, V, de A en $\mathcal{M}(n,n)$ tal que para toda A' de V, se tiene que $\sigma(A') \subseteq U$. Además,

(ii) si $\lambda_0 \in \sigma(A)$ y para cierto positivo ε, la bola abierta de centro en λ y de radio ε, $B(\lambda,\varepsilon)$, contiene de $\sigma(A)$ sólo a λ_0 ; entonces la suma de los órdenes de multiplicidad de las raíces características de cualquier matriz A' de V, que se encuentren en $B(\lambda,\varepsilon)$, es igual al orden de multiplicidad de λ_0 .

(Ver Glazman y Liubitch (1972), pp. 121-122).

Observación

En ciertos casos, la raíz de Perron-Frobenius puede, por así decir, "desaparecer súbitamente" a partir de alguna matriz innegativa. Por ejemplo si

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\sigma(A) = \{1\}$ y 1 es un valor propio de multiplicidad igual a 2, que resulta ser $\lambda(A)$; pero, para cualquier ε positivo, la matriz

$A_\varepsilon := \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, que dista de A sólo en ε , ya no tiene raíz de Perron-Frobenius, pues $\sigma(A_\varepsilon) = \{1 + i\varepsilon, 1-i\varepsilon\}$, y, como se ve, no hay ninguna raíz característica real. Nótese, sin embargo, que esto no contradice en modo alguno al lema 2, sino que se ajusta a él. El que algo como esto no pueda ocurrir con matrices innegativas e indescomponibles es consecuencia del lema siguiente.

LEMA 3

Hay una función cuyo dominio es el conjunto de las matrices innegativas e indescomponibles, que a cada matriz tal le asigna su raíz de Perron-Frobenius, y esta función es diferenciable.

Demostración:

Primero, hay que notar que para cualquier matriz innegativa e idescomponible, A, existe su raíz de Perron-Frobenius, $\lambda(A)$, según el teorema PF, y es de multiplicidad 1. Luego, por la segunda parte del lema 2, toda matriz bastante cercana a A tiene también una raíz característica de multiplicidad 1 arbitrariamente cerca de $\lambda(A)$; más precisamente, si $\varepsilon > 0$ es tal que $B(\lambda(A),\varepsilon) \cap \sigma(a) = \{\lambda(A)\}$, entonces hay un $\delta > 0$ tal que

$\forall A' \in \mathcal{M}(n,n)$, $(\|A' - A\| < \delta \Rightarrow (\exists \alpha' \in \sigma(A')$, $B(\lambda(A),\varepsilon) \cap \sigma(A') = \{\alpha'\}) \wedge$ multiplicidad $(\alpha') = 1)$.

Ahora bien, α' podría no ser $\lambda(A')$, salvo que A' también fuese innegativa e indescomponible, en cuyo caso sí se tendría que $\alpha' = \lambda(A')$. Por el lema 1, se tiene que si A' está en la vecindad

$B(A,\delta) \cap \mathrm{Ind}_+(n,n)$ de A en $\overline{\mathrm{Ind}_+}(n.n)$, entonces A' tiene raíz de Perron-Frobenius, $\lambda(A')$, en $B(\lambda(A),\varepsilon)$. Así se demuestra que hay una función $\lambda\colon \mathrm{Ind}_+(n,n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, que a cada matriz innegativa e indescomponible asocia su raíz de Perron-Frobenius, y que dicha función es continua.

En segundo lugar, hay que establecer la diferenciabilidad de la función λ . Para esto, sea $A \in \overline{\mathrm{Ind}}_+(n,n)$; entonces, si los elementos de A se denotan por a_{ij}, ha de tenerse que $\lambda(A)$ es solución de la ecuación $0 = \det (A - x\, I_n)$, es decir, $0 = \det (A - \lambda(A)\, I_n)$. Como es fácil de verificar, la función $F: \mathbb{R}^{n^2} x \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que $(A,x) \mapsto \det(A-x\, I_n)$ es diferenciable, pues es polinomial. Luego, si $A \in \overline{\mathrm{Ind}}_+(n,n)$, se cumple que $F(A,\lambda(A)) = 0$. Ahora, por el teorema de la función implícita[2], hay vecindades respectivas de A y de $\lambda(A)$, U y V, y hay una función diferenciable $\psi: U \longrightarrow V$ tal que $\forall\, A'$ de U, $F(A', \psi(A')) = 0$. Esto muestra que el número real positivo $\psi(A')$ es una raíz característica de A' si $V \subseteq \mathbb{R}_+$, cosa siempre posible. Finalmente, basta notar que si A' es innegativa e indescomponible, por lo dicho antes, $\psi(A')$ tiene que ser $\lambda(A')$, es decir, $\psi \mid U \cap \overline{\mathrm{Ind}}_+(n,n) = \lambda|_U$, y de la diferenciabilidad de ψ se sigue la de λ. ■

Teorema

Para matrices cuadradas innegativas e indescomponibles, la raíz de Perron-Frobenius está dada por una función diferenciable de los coeficientes de la matriz.

La demostración se sigue del lema 3.

2 Ver Benavie, (1973), p.28 .

Referencias

[1] *Benavie, A. (1973)*
Técnicas matemáticas del análisis económico, Prentice Hall, Madrid.

[2] *Glazman, I.* y *Y. Liubitch (1973)*
Analyse linéaire dans les espaces de dimensions finies, MIR, Moscú.

[3] *Nikaido, H (1978)*
Métodos matemáticos del análisis económico moderno, Vicens-Vives, Barcelona.