Pro Mathematica: Vol VIII, Nos. 15-16, 1994

EL PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES

Holger **G. *Valqui***

Un ejemplo del carácter esencialmente experimental de la actividad matemática.

La Matemática suele ser presentada como una ciencia lógico-deductiva, abstracta, precisa y rigurosa. Posiblemente dichos calificativos pueden ser bien aplicados a ciertos aspectos de la Matemática; sin embargo, aquellos calificativos suelen ser usados con una connotación ingenuamente exagerada. Ver, por ejemplo, [3].

Desgraciadamente, y por muy variadas razones, dicha imagen mítica es tesoneramente cultivada por quienes se dedican casi exclusivamente a la enseñanza de la Matemática. Tanto es así que la "enseñanza" de esta ciencia es convertida en un verdadero proceso de domesticación matemática: el alumno debe memorizar docenas o cientos de teoremas y "aprender"sus demostraciones; igualmente debe tratar de dominar variadas técnicas que le permitan "resolver" gran número de problemas típicos. Todo ello, supuestamente, dentro del (equivocado) espíritu mencionado al comienzo de esta nota.

Profesor Principal de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI)

Diferente es el testimonio de los matemáticos activos en la construcción, reconstrucción, ampliación, crítica y retoque de la estructura matemática, y en el análisis de los problemas que desafían la potencia y elasticidad de dicha estructura. Quizás una afirmación del matemático L. Schwartz - ocurrida en una de sus conferencias ofrecidas en su visita a la UNI en la década del 60- pueda resumir significativamente mi argumentación: "La Teoría de Distribuciones (Funciones Generalizadas) la creé propiamente en una noche...", añadiendo, luego de una calculada pausa, "... después de trabajar cinco años en el asunto".

Considero que es importantísimo destacar el soporte experimental de la Matemática. Con tal fin he elegido exponer el llamado Problema de los Cuatro Colores, cuyo planteamiento es tan elemental, que está al alcance de un niño de siete años (que posea cierta experiencia en el coloreado de mapas), pero cuya solución ha exigido más de un siglo de experimentación por parte de calificados matemáticos y de numerosos aficionados atraídos por la sencillez del enunciado del problema. La solución del problema se obtuvo como resultado del trabajo interactivo entre matemáticos y computadoras, que tuvo lugar entre el año 1972 hasta mediados de 1976.

La historia comienza propiamente en 1852, cuando un alumno del matemático de Morgan le presentó una pregunta -que le había sido planteada a aquél- acerca de la posibilidad de demostrar matemáticamente lo que los cartógrafos ya conocían por la vía experimental: Todo mapa, sobre un plano o sobre una esfera (la Tierra), puede ser bien coloreado con sólo cuatro colores. En tal sentido es necesario aclarar lo siguiente:

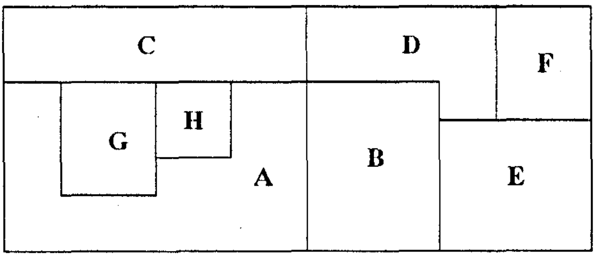


Fig. 1

A1) Dos países vecinos por una frontera común, como es el caso de los países **A** y **B**, deben ser pintados con colores diferentes.

A2) Dos países que no poseen una frontera común, por ejemplo **A** y **E**, o dos países que sólo tienen uno o varios puntos en común, por ejemplo **A** y **D**, pueden ser pintados del mismo color.

A3) Si el mapa en consideración se encuentra sobre un plano (mapa planar), entonces la zona exterior al mapa debe ser considerada como un país suplementario -o como un océano- al que, por lo tanto, se le debe asignar un cierto color, distinto al color dado a cada uno de los países del borde.

A4) Se trata de colorear, según las especificaciones anteriores, cualquier mapa hipotético, que podría estar constituído por tres o cuatro países, o por algunos billones de países.

A5) Una cosa es demostrar la posibilidad de poder pintar cualquier mapa planar con sólo cuatro colores; otra cosa es construir técnicas de coloreado que permitan pintar con sólo cuatro colores cualquier mapa dado. En este sentido, si el mapa es complicado y de muchos países, puede resultar sumamente difícil, con la sólo guía del "buen criterio", pintarlo bien con menos de siete u ocho colores.

A6) Por razones de comodidad puede resultar más conveniente asignar a cada país un número en vez de un color. Aquí usaremos los números **1,2,3,4,5**.

A7) Como un pequeño desafío se ofrecen, a los interesados, en la Figura 2, dos mapas que deberían ser pintados con sólo cuatro colores, respetando las especificaciones mencionadas anteriormente.

A continuación presento algunas consideraciones que deben facilitar la comprensión de algunas de las características del problema:

2a) Llamaremos Región a una parte conexa de un mapa (es decir, una región no posee subpartes, alguna de ellas aislada de las otras); entonces debe notarse que existen regiones constituídas por cuatro países mutuamente vecinos y que, por lo tanto, deben recibir cuatro colores diferentes. Es decir, para poder pintar un mapa cualquiera (de más de 3 países) resulta necesario disponer de, por lo menos cuatro colores diferentes. El problema se reduce entonces a verificar si dichos cuatro colores son suficientes para un buen coloreado.

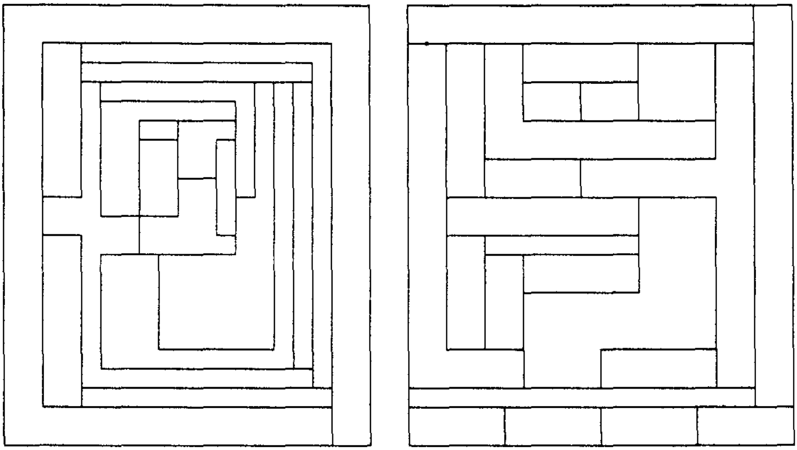


Fig.2 Ensaye pintar cada uno de los mapas usando sólo cuatro colores. Tenga en cuenta que el "océano" exterior también debe recibir un color.

2b) La necesidad de un mínimo de cuatro colores no proviene de la existencia de regiones constituída por cuatro países mutuamente vecinos. La región mostrada en la Fig. 3b no posee subregiones constituídas por cuatro países mutuamente vecinos, pero requiere ser pintada con, por lo menos, cuatro colores diferentes.

2c) Ni sobre el plano, ni sobre la esfera se pueden construir regiones constituídas por cinco países mutuamente vecinos; pero ello no implica -como equivocadamente han supuesto algunos "solucionadores" del problema- que no sea necesario recurrir a cinco colores para pintar ciertos mapas.

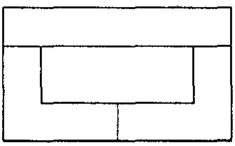


Fig.3a Región constituída por cuatro países mutuamente vecinos. Se requiere cuatro colores.

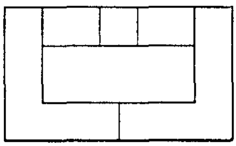


Fig.3b Región que no contiene cuatro países mutuamente vecinos, pero que no puede ser pintada con menos de cuatro colores.

Aparentemente de Morgan debió reconocer su incapacidad para demostrar la corrección o falsedad de la conjetura de los Cuatro Colores, y planteó el problema a otros matemáticos. Uno de ellos fue A. Cayley quien, luego de agotar sus esfuerzos presentó el problema, en 1878, a consideración de la Sociedad Matemática de Londres. Según los archivos del caso, antes de transcurrir un año, el abogado y miembro de la Sociedad, A.B. Kempe, publicó un artículo en el que demostraba la validez de la conjetura en el sentido afirmativo. El trabajo de Kempe se reducía a demostrar que la existencia de un mapa necesariamente pentacromático implicaba una contradicción. A continuación desarrollamos dicho argumento:

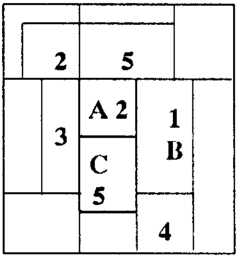


Fig.4a El mapa M^0 posee n^0 países y exige cinco colores. Sólo se muestra el coloreado de ciertos países.

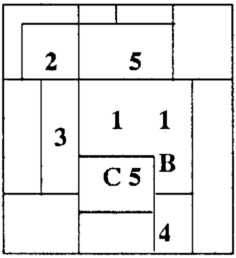


Fig.4b M^{00} posee sólo n^0-1 países; luego puede ser recoloreado con sólo 4 colores.

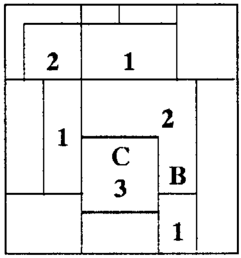


Fig.4c M^{00} ha sido repintado con sólo 4 colores. El país suprimido puede reaparecer con el color 4 ó con el 5.

3a) Supongamos que para pintar un mapa cualquiera fuesen necesarios (por lo menos) cinco colores.

3b) Es fácil ver que la exigencia anterior no es válida para un mapa constituído por un número pequeño de países, por ejemplo, tres o cuatro países. Es decir, la exigencia de los cinco colores sería válida sólo para mapas constituídos por un número de países que no sea inferior a un cierto número mínimo n°, a partir del cual ya aparecen (o pueden aparecer?) mapas que requieren cinco colores.

3c) Entonces, un mapa constituído por menos de n° países, debería poder ser pintado con menos de cinco colores.

3d) Sea M° un mapa constituído por n° países y que requiere ser pintado con cinco colores.

3e) Supongamos que M^o posea un país que, sin modificar los colores de los países restantes, pueda ser anexado a uno de los países que le son vecinos. En el mapa de la Fig. 4a es posible anexar el país **A** al **B**; pero, sin modificar los colores de los países vecinos, no se puede anexar **A** al **C**.

3f) El mapa reducido, M^{oo}, obtenido al haber anexado **A** al **B**, posee sólo n^o -1 países y, por lo tanto, puede ser pintado con sólo cuatro colores. Para el ejemplo considerado, la Fig. 4c muestra una posible recoloración de M^{oo}.

3g) Ahora supongamos que exista una forma de recolorear M^{oo} (con sólo cuatro colores), de manera que el espacio correspondiente al país anteriormente suprimido quede rodeado por países de sólo dos o tres colores diferentes. Entonces el país suprimido puede reaparecer asignándosele el cuarto color.

3h) Como consecuencia de lo anterior deduciríamos que, en verdad, M^{oo} no requerería cinco colores, ya que hemos podido colorearlo con sólo cuatro.

3i) Bajo las dos suposiciones anteriores (la existencia en M^o de un país anexable, y la posibilidad de recolorear M^{oo} de manera que el "rastro" de dicho país quede rodeado por vecinos con sólo 2 ó 3 colores diferentes) se puede ver que la existencia de M^o ha producido una contradicción. Entonces, M^o no podría existir. (Excepto para los mapas en los que no se cumplan las mencionadas condiciones).

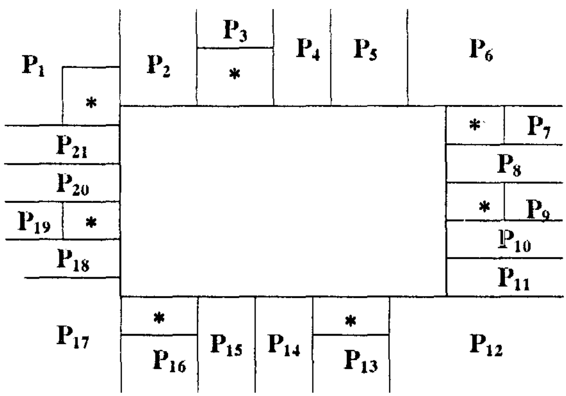
3j) Es decir, no existiría un país que necesite ser pintado con por lo menos cinco colores. Bastarían cuatro colores.

Así A.B. Kempe redujo su demostración a la verificación de las dos mencionadas suposiciones. Para ello, primeramente definió un mapa normal, Mn, que es un mapa en el que no existe un país que encierre totalmente a otros, ni existe ningún punto en el que concurran más de tres países. Luego demostró que todo mapa es normalizable, en el sentido que todo mapa puede ser convertido en un mapa normal, por medio del mecanismo de añadir algunas nuevas fronteras, sin necesidad de incrementar el número de colores empleados en el pintado del mapa original. Después de ésto, y sin perder generalidad, todas las operaciones y demostraciones del caso se pueden realizar considerando sólo mapas normales.

Veamos cómo normalizar una región en la que existe un punto donde concurren m países. Como ilustración mostramos un ejemplo con m=21.

El procedimiento es el siguiente: Alrededor del punto en consideración trazamos una circunferencia (o un rectángulo), de manera que, ahora, la región ha quedado constituida por m+1 países. Luego, de entre los países que rodean al rectángulo en consideración, elegimos un conjunto de ellos que posean un mismo color. Suponiendo que, por ejemplo, los países P_1, P_3, P_7, P_9, P_{13}, P_{16} y P_{19} posean todos el mismo color c1, los aislaremos del país-rectángulo, creando los correspondientes países intermedios (con "estrella"), como se muestra. Ahora la región es normal, aunque posee m+1+7 países.

Por supuesto que ahora podemos pintar al país central con el color c1. Cada país "estrella" posee cuatro vecinos, dos de los cuales son del color c1; los otros dos tendrán los colores c2 y c3, que eventualmente pueden coincidir, donde $c1, c2, c3 \in \{1,2,3,4,5,\ldots\}$. Entonces, cada país "estrella" puede tomar el color c4. Es decir, la región ha sido normalizada, sin que se haya incrementado el número de colores.



En la siguiente etapa, Kempe demostró que en todo Mn existen necesariamente países con menos de seis vecinos. Como tal hecho constituye un punto clave en la argumentación de Kempe, presentamos aquí la correspondiente demostración.

Sea p el número de países que constituyen un cierto Mn, incluyendo el país suplementario exterior; sea f el número de fronteras entre dichos países (teniendo presente que dos países vecinos pueden tener más de una frontera común, como en el caso mostrado en la esquina superior izquierda), v el número de vértices en el que concurren tres países (no existe otro tipo de vértice, ya que se trata de un mapa normal); entonces, de acuerdo a la fórmula de Euler para poliedros (un mapa normal, en el plano complementado con el "océano", constituye topológicamente un poliedro), deberá cumplirse que $p + v = f + 2$.

$p = 17 + 1 = 18$
$f = 48 \quad v = 32$

$p_2 = 2 \quad p_3 = 0$
$p_4 = 5 \quad p_5 = 5$
$p_6 = 3 \quad p_7 = 0$
$p_8 = 1 \quad p_9 = 1$
$p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0$
$p_{12} = 1 \quad p_{13} = 0$

$p + v = f + 2 = 50$
$\sum k\, p_k = 96$

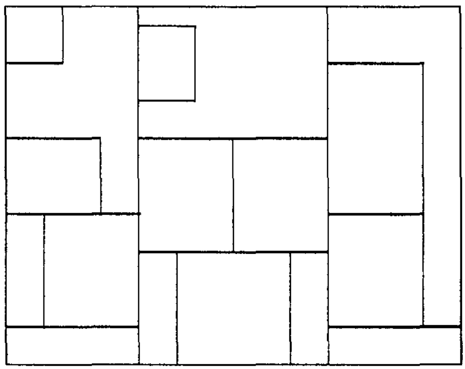


Fig. 5 Ejemplo de un Mn con p=18 países, f=48 fronteras y v=32 vértices. En él existen inevitablemente países con menos de seis vecinos.

Por otra parte, si p_k es el número de países que poseen k vértices (y, desde luego, también k fronteras), entonces $svf = \sum k\, p_k$, con k=2...p, es la suma de todos los vértices (y la suma de todas las fronteras) que poseen todos los países del mapa en consideración. Ahora, teniendo presente que las fronteras son contadas dos veces (pues cada frontera pertenece a dos países) y los vértices han sido contados tres veces (pues cada vértice pertenece a tres países de un Mn), podemos escribir,

$$svf = 2\,f = 3\,v \qquad\qquad p = \sum_{k=2} p_k$$

Reemplazando en la fórmula de Euler,

$$\sum_{k=2} p_k + (1/3) \sum_{k=2} k\, p_k = (1/2) \sum_{k=2} k\, p_k + 2$$

de donde,

$$\sum_{k=2} (6 - k)\, p_k = 12$$

y también,

$$4\, p_2 + 3\, p_3 + 2\, p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k=7} (k - 6)\, p_k = 12$$

donde vemos que es imposible que simultáneamente se anulen p_2, p_3, p_4 y p_5. Es decir, en todo mapa normal -y por lo tanto, en cada mapa- existen necesariamente países con dos, tres, cuatro o cinco vecinos.

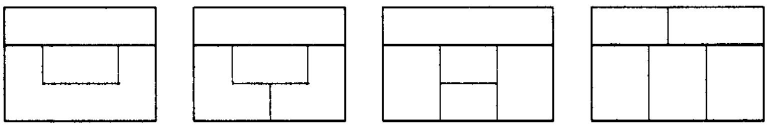


Fig.6 Regiones donde aparecen países con dos, tres, cuatro o cinco vecinos.

En el caso de países con dos o tres vecinos se pueden anexar dichos países a cualquiera de sus vecinos. Posteriormente al recolorear el correspondiente mapa M^{oo}, dichos países reaparecerán rodeados por vecinos que poseen no más de tres colores distintos.

Para el caso en el que exista algún país con cuatro vecinos, $P_4 \neq 0$, él reaparecerá en M^{oo} rodeado por cuatro países. Si, por lo menos dos de ellos poseen el mismo color, no existe mayor dificultad para asignarle un color al país que reaparece. Si, en cambio, los cuatro vecinos poseen colores distintos, entonces surge la necesidad de investigar si es posible recolorear M^{oo} de manera que dos de dichos vecinos adquieran el mismo color. Kempe demostró que tal cosa era siempre posible.

Por último, en el caso que exista algún país con cinco vecinos, $P_5 \neq 0$, Kempe demostró que el correspondiente mapa también era coloreable con sólo cuatro colores. Con ello había demostrado afirmativamente la conjetura de los cuatro colores.

Unos años más tarde, en 1890, P.J.Heawood encontró que la demostración de Kempe para el caso $P_5 \neq 0$ era incorrecta y mostró que el procedimiento correcto debía ser harto laborioso. También demostró que cinco colores eran suficientes para pintar cualquier mapa sobre un plano o sobre una esfera; además demostró que para pintar bien un mapa sobre una superficie toroidal (por ejemplo, la superficie de una cámara lisa, sin válvula ni costuras), donde pueden existir siete países mutuamente vecinos, era necesario y suficiente disponer de siete colores.

Posteriormente, otros matemáticos se ocuparon del problema, sea para complementar el trabajo de Kempe, sea desarrollando otros métodos de demostración. En 1913 ya se había demostrado que $n^o > 22$ y en 1950 se llegó a $n^o > 36$ (es decir, cualquier mapa con menos de 36 países puede ser bien coloreado con sólo cuatro colores).

A partir de 1936 el matemático H.Heesch comenzó a trabajar en el problema; en 1950 estimaba que sería necesario analizar unas 10 000 configuraciones de regiones reducibles para poder obtener conclusiones definitivas. Heesch creó nuevos métodos para atacar el problema (entre ellos, el grafo dual de un mapa y el llamado proceso de descarga de vecindades), recurriendo inclusive al auxilio de computadoras (de ese tiempo!), pero sin poder alcanzar el objetivo propuesto.

En 1972, los matemáticos K.Appel y U.Haken, siguiendo las sendas trazadas por Kempe y Heesch atacaron el problema dispuestos a servirse significativamente de las ventajas que se obtienen del uso de las computadoras. En un largo proceso de interacción, entre matemáticos que planeaban ciertos experimentos y computadoras que los realizaban, proporcionando de esta manera información para que los matemáticos prepararan nuevos experimentos, la Conjetura de los Cuatro Colores quedó, por fin, demostrada afirmativamente en Junio de 1976.

En tal trabajo que les había tomado cuatro años, los matemáticos Appel y Haken habían analizado manualmente miles de situaciones diferentes (lo cual les permitía preparar los experimentos que deberían realizar las computadoras) y usado unas 1200 horas de tres computadoras.

Después de más de un siglo de experimentación, los matemáticos habían logrado demostrar la validez de una conjetura "casi evidente"; pero, habían tenido que recurrir a herramientas que se salen de los marcos convencionales. Los matemáticos que deseen o necesiten verificar la demostración de Appel y Haken no lo pueden hacer sin el auxilio de la computadora. Por tal razón algunos matemáticos opinan que la validez de la demostración debe ser mantenida en suspenso, hasta que se construya una demostración convencional, o una demostración convencionalmente verificable.

Pero, como manifiestan Appel y Haken, quizá sea ésta la única manera de demostrar la conjetura de los Cuatro Colores, y de demostrar otras conjeturas matemáticas aún pendientes, o que surjan en el futuro. Si ello fuese así, las computadoras habrían abierto nuevos senderos en las argumentaciones y demostraciones matemáticas, lo que permitiría a los matemáticos alcanzar ciertas regiones (de la estructura formal del pensamiento matemático) antes inaccesibles para ellos.

Más de un siglo de experimentación alrededor de un problema cartográfico concreto, de demostraciones ilusorias (no sólo por parte de aficionados ilusos, sino también por parte de ilustres matemáticos), de ensayos y errores, en un esfuerzo inductivo por plantear y resolver múltiples problemas conexos; y una demostración que no puede ser fácilmente aceptada por todo el mundo matemático; ni, de hecho, cualquier matemático, a pesar de poseer toda la información básica sobre el tema, puede verificar la validez de aquélla. Sin embargo, para muchos, lamentablemente, la Matemática seguirá siendo sólo el epílogo (o la punta del iceberg) del trabajo de los matemáticos.

Finalmente, quiero dejar escrito que la experimentación matemática no es (necesariamente) una actividad de alto nivel, sino una actividad en la que precisamente debería insistirse y que debería fomentarse desde los niveles más elementales, en vez de crear en los niños y en los jóvenes, amargura y resentimiento contra lo que (explicablemente) les resulta ininteligible.

Lectura Recomendada:

[1] *K.Appel, W.Haken*: La Solución del Problema del Mapa de los Cuatro Colores. Traducción del Scientific American, 1978 (mes?).

[2] *H.M. Riekert, W.F. Riekert*: Die Lösung des Vierfarben-Problems. Bild der Wissenschaft 7/1977.

[3] *H.G. Valqui*: Rigor, abstracción y claridad en la Matemática. Actas del Tercer Coloquio Nacional de Matemática. 1985.