Pro Mathematica, Vol. VIII, Nos. 15-16, 1994

MATEMATICA Y DESARROLLO

Alejandro ***Ortiz Fernández***

Expreso mi homenaje al Dr. José Tola Pasquel,
a quien debemos el surgimiento de un nuevo estilo
de hacer matemática en nuestro país.
Asimismo, expresarle mi gratitud por los consejos y atención
que me brindó en una época difícil de entenderse
el valor y la utilidad de la matemática.

Nos proponemos dar algunas ideas sobre como la matemática ha influído en el desarrollo científico y tecnológico. Para ello, recurriremos a la historia de nuestra ciencia; así, no solo nos ilustramos del valor de la matemática, si no también de algunos hechos históricos tan atrayentes para un lector en general.

1. Perspectiva Histórica

Debemos ser reiterativos, con riesgo a ser repetitivos en algo que el lector medio sabe: la ciencia y la tecnología deben mucho a la matemática.

Profesor Asociado de Matemáticas, Dpto. de Ciencias, PUCP.

Pero, ¿cómo así?... quién sabe acá esté la motivación que nos lleva a escribir este artículo. La respuesta no es fácil de darse; es muy amplia; sobre todo en nuestra época, era de grandes avances acelerados, tanto en la ciencia pura como en la aplicada, en que la fusión de ambas áreas se hacen con niveles cada vez más especializados. En consecuencia, nuestro enfoque, sobre todo cuando tratemos cuestiones más recientes, será en relación a temas de nuestro interés de estudio. De esta manera ignoramos áreas matemáticas que seguramente han contribuído mucho al actual mundo científico y tecnológico.

Qué hace el matemático?... pensar en la solución de problemas que caigan dentro de un modelo en que es factible aplicarse alguna teoría existente. Si no existiera tal modelo, en tratar de construir una nueva teoría en que se espera el problema tenga solución. En esta pregunta está, de un modo general, la meta que aspiraría nuestro país para sus profesionales matemáticos.

La matemática es una ciencia objetiva. Comentemos algunos **ejemplos**:

(1) Cuando usamos el teléfono, en esta acción existe una matemática que ha contribuido en optimizar la manera de enviar información a través de hilos telefónicos, o aún en los sistemas inalámbricos.

(2) La variable compleja es una teoría, entre otros aspectos, que ayuda a predecir el riesgo de que un avión se desintegre mientras vuela por zonas inestables. Cierto tipo de matemática ha servido para diseñar los radares que guían a los aviones.

(3) La matemática aparece en la pre-historia cuando las necesidades materiales del hombre lo exigieron. Tales necesidades eran muy simples y rudimentarias, por lo tanto así lo fueron las primeras ideas matemáticas. Aún, en nuestra época, existen tribus primitivas que tienen una aritmética en relación a sus evoluciones.

(4) En la antigüedad la matemática se reducía a la aritmética y a la geometría elemental. Esta adquiere el carácter científico en la lejana Mesopotania. Los babilonios ya tenían avanzados conocimientos matemáticos que supieron aplicar a sus propias necesidades. La naturaleza plantea cuestiones que el hombre trata de resolver. Asi fué en el antiguo Egipto con los continuos desbordes del río Nilo; ello contribuyó a la formación de una serie de conocimientos geométricos que luego fueron consolidados en una ciencia organizada con Euclides.

(5) Arquímedes es uno de los mayores científicos de todos los tiempos. Fué extraordinario como matemático puro y como científico aplicado. Son importantes sus contribuciones en la ingeniería; creó un sistema para llevar agua del Nilo a los sectores áridos del desierto. Ideó un modelo de planetario; fue el matemático que supo contener a todo un ejército que sitiaba a su ciudad. En estas y en muchas otras contribuciones, usó su mente matemática para crear las adecuadas soluciones. Como matemático puro encontró un valor muy aproximado del número Pi; en la geometría realiza sus más hermosos y difíciles trabajos. Estuvo cerca de descubrir el cálculo integral. ¿Cómo hubiera sido la evolución de la matemática si el cálculo integral y diferencial se hubiera descubierto mil quinientos años antes?...

(6) Newton es el segundo científico de dimensión universal por ser, al igual que Arquímedes, grande como matemático puro y gran científico aplicado. El tercero es Gauss. Al menos es el trío clásico de pensadores de primera magnitud. Si bien es cierto que existieron precursores de las tallas de Copérnico, Pascal, Descartes, Galileo, Kepler, entre otros, Newton es la consolidación de una nueva actitud del hombre pensante: experimentar. Surge la necesidad de un trabajo en sociedad, de discutir y experimentar los conocimientos puros.

Aun muy joven, Newton estudia tres grandes problemas: (i) el Cálculo Diferencial e Integral; (ii) la Teoría de los colores; y (iii) la Ley de la gravitación universal. Si solo hubiera hecho una de las tres cuestiones, hubiera pasado a la historia de la ciencia. Hizo las tres! Newton crea un nuevo modelo matemático para explicar los problemas de la mecánica celeste y de la óptica. Una hermosa combinación.

(7) El legado de la ciencia iniciado en el siglo XVII fue decisivo en el desarrollo de la física, de la astronomía y en los albores de la tecnología

que aparecía conforme las sociedades iban evolucionando. Sin la contribución de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII tal desarrollo no se hubiera producido, y ya sabemos lo que esto significó al progreso obtenido en el siglo pasado y sobre todo en el nuestro. Por esa época se desarrollan las ecuaciones diferenciales, tan útiles en la solución de problemas que vienen del mundo objetivo.

2. Fourier. Proyección de su obra

En 1807, Fourier (un físico matemático francés) afirmó: "cualquier función periódica puede expresarse como una combinación lineal de las funciones seno y coseno". Al margen de la veracidad de esta expresión, lo importante es que la obra de Fourier dió las posibilidades de construirse nuevas y trascedentales teorías matemáticas, con distintas aplicaciones en el universo objetivo.

Como casi siempre ocurre, Fourier tuvo precursores, pero su obra: "La Teoría Analítica del Calor" es uno de los escritos científicos más importantes que se hayan escrito. En este libro se introducen los desarrollos en series e integrales de funciones trigonométricas, y esto con el objetivo de describir un comportamiento de la naturaleza; así, introduce métodos sencillos para resolver problemas de valor de contorno, es decir, teniéndose información en la frontera de un cierto dominio se desea saber lo que ocurre en el interior. Lord Kelvin llamó "gran poema matemático" al citado libro; en efecto, es concenso generalizado sobre su gran valor.

Para ilustrar lo afirmado, citemos algunos ejemplos.

(8) Ciertas integrales de funciones que aparecían en el tratado del calor exigieron, por un lado, precisar el concepto de función, no claro en esa época; y por otro, la necesidad de tenerse una definición más adecuada de la integral. Ello fue logrado con los aportes de matemáticos de la primera mitad del siglo pasado; dentro de ellos, de Cauchy y de Riemann. La precisión de ambas ideas (y la de límite) fue la base de mayores logros en la matemática pura y en las aplicaciones.

(9) Actualmente la teoría de conjuntos, al menos en sus aspectos elementales, es de conocimiento de un amplio público no matemático. Pero, quien sabe, lo que no se conoce es que su origen tuvo mucho que ver con la obra de Fourier. En efecto, Cantor (a mediados del siglo pasado) estudiando delicados problemas de unicidad de las representaciones en senos y cosenos, llegó al paraíso de los conjuntos. Si comprendemos la influencia de los conjuntos en el desarrollo de la matemática y ésta en las aplicaciones, comprenderemos mejor el valor de la obra de Fourier.

(10) A fines del siglo pasado y comienzos del presente, la matemática había evolucionado lo suficiente para entrar en una etapa de síntesis. Epoca de grandes transformaciones científicas, se introducen los espacios abstractos con el afán de reunirse en modelos matemáticos, "distintos" espacios particulares que aparecían en diversos sectores de la matemática. Esta concepción dió un carácter mas universal a las teorías matemáticas, y también a las aplicaciones, en particular en la física cuántica en donde la matemática "clásica" ya no funcionaba.

Por otro lado, la integral de Riemann ya era insuficiente en la evolución de las funciones. Lebesgue, en su tesis doctoral (1902), introduce la teoría de la medida, una idea que permite ampliar el universo de las funciones y del concepto de integral. Esta teoría es el fundamento del análisis moderno; en particular el análisis de Fourier se enriquese tremendamente, y también sus aplicaciones.

(11) Más recientemente (en la década de los 40's) surge una teoría que también está vinculada con el análisis de Fourier; es la teoría de las distribuciones de Laurent Schwartz; ella permite ampliar aun el universo de las funciones y de muchas ideas, en particular de las ecuaciones en derivadas parciales, un sector del análisis vinculado con muchos problemas de la física-matemática. El enfoque del análisis de Fourier vía las distribuciones permitieron resultados más ricos en las aplicaciones.

(12) Como las funciones seno y coseno son funciones periódicas, el análisis de Fourier trata generalmente con procesos periódicos; en particular, con ondas periódicas. Así, este tipo de análisis es fundamental en los circuitos eléctricos, en los sistemas mecánicos, en problemas de transmisiones. La teoría de comunicaciones usa las series y transformadas de Fourier en sus investigaciones, y esto compromete a

todo el gran desarrollo tecnológico que caracteriza a nuestra época. Alrededor de estas ideas surge una reciente área matemática, que trataremos brevemente a continuación.

3. Las ondaletes*, una nueva teoría matemática

Volvamos a la época de Fourier y a su afirmación: si f(x) es una función arbitraria, 2π-periódica, entonces f(x) se representa por la suma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \text{ llamada su serie de Fourier.}$$

¿Es esta afirmación siempre cierta?... En 1873, Dubois Reymond construye una función continua, 2π periódica, tal que su serie de Fourier diverge en un punto dado x. Esto trajo un conflicto pues no se dudaba del valor del trabajo de Fourier, pero por otro lado no era siempre cierta la afirmación dada. Los matemáticos vieron al menos tres vías por donde ir para aclarar la situación:

(i) modificar el escenario (el espacio de funciones) en las que las series de Fourier tengan un correcto comportamiento;

(ii) cuando afirmamos que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

decimos que la serie (o sumatoria) converge a f. Entonces, a fin de evitar el anterior conflicto, habría que modificar la idea de convergencia de una serie de Fourier;

(iii) observemos que la familia $\{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$, $n = 0,1,2,...$ es una especie de **base** pues la función f se escribe como combinación lineal de ellas. Entonces, ¿porqué no buscar otras bases (ortonormales) en donde la anterior dificultad no se produzca?.

* *Una mejor traducción de "wavelets", es ondícula. El lector puede substituir, en lo que sigue, "ondalete" por ondícula.*

La historia de la matemática es fascinante, pues partiéndose de la investigación de un fenómeno de la naturaleza (la conducción del calor) las dificultades nos llevarán a nuevos horizontes.

Así, para (i) la teoría de la medida de Lebesgue es el escenario adecuado para las series de Fourier; más concretamente, lo es el espacio de Lebesgue L^2 $[0,2\pi]$. En cuanto a (ii), surgieron otros tipos de convergencia como el introducido por Cesaro.

La cuestión (iii) es la que nos conducirá a las ondaletes (onditas, en algún sentido). En 1909, A. Haar descubre una base según la cual toda función continua sobre [0,1] se representa como una combinación de elementos de la base. Lamentablemente, los elementos de la base no son funciones continuas, esto es, no son elementos del espacio de funciones que se considera (las funciones continuas); esto, y otras críticas al modelo propuesto hicieron que el trabajo de Haar fuera dejado por un largo tiempo. Sin embargo, y esto solo se percibió muchos años después, en sus argumentos está el germen de la construcción de las ondaletes.

Las investigaciones continuaron en la década de los 10's a 1920 en que G. Faber y J.Schauder consideran una variación en el argumento de Haar para obtener lo que ahora se llama una base de Schauder dentro del espacio de Banach de las funciones continuas sobre [0,1]. Nuevamente, el modelo propuesto tuvo sus limitaciones. La exigencia de que las derivadas de las funciones caigan dentro del espacio condujo a Hölder a considerar los espacios C^r $[0,1]$, $0 < r < 1$, espacios que son utilizados por los físicos en sus estudios sobre las estructuras fractales. En esta dirección surgieron también dificultades con la famosa función de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2 x).$$

Asi llegamos alrededor de los años 30's. Por esta época se estudia el movimiento Browniano (relacionado a las probabilidades) en donde se encuentra que el sistema trigonométrico no proporciona una información simple y directa a ciertas propiedades deseadas. Más concretamente, el análisis de Fourier es inadecuado para estudiar la estructura fractal del movimiento Browniano. Sin embargo, la base de Schauder funciona bien.

Desde 1930 se inician también los célebres trabajos de Littlewood y Paley, fundamentalmente en espacios de dimensión 1 (la recta). La teoría de Littlewood-Paley fue puesta en dimensión n ($\mathbf{R}^n$) por la Escuela del Prof. Zygmund en Chicago. En estos trabajos la transformada de Fourier juega un rol fundamental. En estas contribuciones aparece la función ψ (x), la que después sería considerada como una ondalete base. Unos años antes, en 1927, Franklin (un profesor del M.I.T.) ortonormaliza la base de Schauder usando el procedimiento de Gram Schmidt, obteniéndose una base ortonormal para L^2 [0,1]. El sistema de Franklin tiene las virtudes del sistema de Haar y las del sistema de Schauder; sin embargo, tiene una estructura algorítmica un tanto complicada y fue abandonada por muchos años.

Por aquellos años se tienen también los trabajos de Lusin en relación a los espacios de Hardy $H^p(R)$, $1 \leq p < \infty$. Estos espacios juegan un papel importante en el tratamiento de la teoría de señales, tan útil en la tecnología moderna.

Alrededor de las ideas en las contribuciones citadas anteriormente, está siempre latente el pensamiento de Fourier: "encontrar entes (o átomos) que sirvan para representar los elementos de un cierto espacio, al que también pertenecen tales entes".

Llegamos a los años 60's. Ya se tenía entonces la célebre teoría de Calderón-Zygmund sobre los operadores integrales singulares, las aplicaciones de esta teoría a las ecuaciones en derivadas parciales; asi mismo se tenían los profundos trabajos del Prof. A.P. Calderón en distintas áreas del análisis armónico.

Dentro de la teoría de Calderón-Zygmund estaba el gérmen de algo que G. Weiss y R. Coifman extrajeron: la idea de átomo. Los átomos juegan el papel de las bases consideradas antes.

Remarcamos que descomposiciones atómicas ya habían aparecido años atrás, como la considerada por Marcinkiewicz en 1938 respecto a los espacios L^p [0,1], $1 < p < \infty$, usando el sistema de Haar. Una famosa identidad de Calderón es relacionada a la descomposición atómica, considerándose una función $\psi(x)$, la que años después fue considerada como una ondalete analisante, pues en base a ella se construyeron las ondaletes. A inicios de los años 80's, Stromberg fue el primero en construir una base ortonormal de ondaletes, trabajo que no tuvo la publicidad que merecía.

Por otro camino, los investigadores en problemas surgidos en la exploración del petróleo, trabajando con el análisis tiempo-frecuencia de ciertas señales, llegaron a considerar lo que llamaron ondaletes. Esto hizo el geofísico J. Morlet a inicios de los 80's. Lo curioso es que aspectos y resultados descubiertos por los analistas puros, como los citados anteriormente, fueron redescubiertos por los matemáticos aplicados, quienes desconocían (con sinceridad!) tales trabajos.

El escenario en que son construidas las bases de ondaletes es conocido como el análisis multiresolución. Este concepto fue definido por Stephane Mallat y por Ives Meyer en 1986. Mallat es un matemático aplicado, doctorado en ingeniería eléctrica; su campo de interés incluye la teoría de procesamiento de señales, visión computacional. Meyer es uno de los líderes actuales del análisis en Francia. Combina sus trabajos en análisis puro con estudios de las aplicaciones de las ondaletes.

Actualmente, en distintos centros de investigación en matemática aplicada se forman jóvenes investigadores con la adecuada preparación en matemática pura y con los recursos de las más modernas computadoras. Todo ello les permiten lograr avances para bien de la tecnología que entra al siglo XXI. Se afirma que el análisis de Fourier, en su nuevo contexto, será una de las principales áreas de la matemática del próximo siglo.

4. Aplicaciones de las Ondaletes

La teoría de ondaletes permite un trabajo integrado entre ingenieros, físicos y matemáticos, inclusive ya existen conexiones con la economía matemática. Si bien es cierto existe la crítica sobre su real profundidad para obtenerse de ella resultados transcendentes, lo cierto es que como una nueva técnica ha permitido simplificar, clarificar y preveer soluciones para clásicos y nuevos problemas. La técnica-ondalete ha existido en diferentes caminos de la ciencia pura-aplicada, y existe la expectativa fundada de esperar de ella logros importantes en un futuro cercano. Al menos, los precedentes así lo inducen, sobre todo en sus aplicaciones a problemas no-lineales, en donde existen delicadas cuestiones. La teoría de ondaletes es estimulada por un creciente aporte de jóvenes investigadores de diferentes países en vanguardia. Es una teoría dinámica con avances muy acelerados en nuestros días.

La teoría de ondaletes se vincula con:

(13) algunos algoritmos en el tratamiento numérico de señales e imágenes (código de subbandas, algoritmos piramidales,...);

(14) la teoría de fractales, pues las ondaletes sirven para analizar la estructura multifractal de las turbulencias en la física. Existen trabajos muy recientes sobre el formalismo termodinámcio para funciones multifractales;

(15) la física-matemática en donde se aplica con suceso; por ejemplo, en los estados coherentes de la mecánica cuántica; en la técnica de renormalización que consiste en extraer expresiones finitas de integrales divergentes en la teoría de campos cuánticos;

(16) los "nuevos" operadores de Calderón-Zygmund, una formulación debida esencialmente a Coifman-Meyer, que contiene fascinantes resultados, con uso de técnicas refinadas y que gira alrededor del célebre Programa de Calderón;

(17) los operadores paradiferenciales de J. M. Bony (1981), unos entes que sirven para construir un cálculo paralelo al producido por los operadores seudodiferenciales. Tales operadores caen también en el Programa de Calderón y se aplican a las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales;

(18) la cosmología, en donde permite predecir la organización hierática de las lejanas galaxias, asi como obtenerse noticias (vía señales analizadas) sobre la formación de las galaxias. Al respecto, existe la publicación de Bijaoui-Slezack-Mars: "The wavelet transform: a new way to describe the universe" (1991).

(19) las ecuaciones en derivadas parciales. La potencia del método de descomposición en ondaletes se traduce, por ejemplo, en que obtenemos

un análisis local que tiene diversas consecuencias, como son el análisis puntual de la regularidad de funciones y la representación de ciertos operadores diferenciales que permiten resolver problemas en ecuaciones en derivadas parciales por métodos como el de Galerkin. También, las ondaletes permiten disponer de algoritmos de descomposición numérica que están siendo usadas, con ventajas, en la solución de problemas tipo de Dirichlet y Neumann. En esta dirección las ondaletes de soporte compacto (introducidas por I. Daubechies en 1988) son de fundamental importancia.

5. Comentarios Bibliográficos

Nota.- Esta relativa amplia bibliografía sobre las ondaletes pretende orientar y motivar al lector interesado en las ondaletes, una teoría que está contribuyendo en forma acelerada en diversas áreas de las aplicaciones, y de este modo al desarrollo de la tecnología actual.

[1] *Ortiz, A.* : "La matemática: su valor histórico e influencia en el desarrollo de la sociedad". Actas; Cuarto Coloquio. SMP, 1986.

En este artículo se complementan algunas consideraciones históricas, asi como algunos otros ejemplos que ilustran el valor de la matemática y sus aplicaciones.

[2] *Carslaw, H. S.* : "Introduction to the theory of Fourier's series and integrals". Dover. 1930.

Este libro contiene una interesante visión histórica de las series de Fourier desde un punto de vista clásico.

[3] *Gasquet, C. - Witomski, P.* : "Analyse de Fourier et applications". Masson. Paris. 1990.

Es un atractivo libro sobre el análisis de Fourier y sus aplicaciones; desarrolla con algun detalle la teoría de señales y filtros con uso de un lenguaje moderno (teoría de Lebesgue, transformadas de Fourier, distribuciones). Culmina con un interesante capítulo sobre la teoría de ondaletes y sus aplicaciones a la teoría de señales.

[4] *Meyer, Y.* : "Ondelettes et Opérateurs".

I. "Ondelettes". Herman. 1990.

II. "Opérateurs de Calderón-Zygmund". Herman. 1990.

Coifman, R. - Meyer, Y. :

III. "Opérateurs Multilinéaires". Herman. 1991.

Estos tres volúmenes constituyen un tratado sobre las ondaletes y de la teoría de operadores vinculados a temas de análisis armónico, y sus relaciones con la variable compleja (espacios H^p) y las ecuaciones en derivadas parciales (teoría del potencial en dominios de Lipschitz, ecuaciones no-lineales). El volumen I constituye la base matemática de las ondaletes. Son libros de no fácil lectura pero necesarios para quienes deseen entrar en temas modernos en análisis.

[5] *Chui, Ch. K.* : "An introduction to wavelets". Acad. Press. 1992.

Es un libro que relaciona la construcción de las ondaletes con los "splines", una idea del análisis numérico. Está escrito con el criterio de ser autosuficiente, aunque es algo técnico en muchos de sus argumentos. Su primer capítulo da un panorama de la teoría de ondaletes.

[6] *Daubechies, I.* : "Ten lectures on wavelets". SIAM. 1992.

La autora es una física dedicada a la matemática e investiga las ondaletes y sus aplicaciones. El libro motiva las conexiones de las ondaletes con otras áreas con un espíritu interdisciplinario; es de interés para ingenieros, físicos y matemáticos.

[7] *David, G.* : "Wavelets and singular integrals on curves and surfaces". Springer-Verlag. 1992.

La publicación consta de tres partes; la primera es una introducción a las ondaletes usando las ideas de Mallat y Meyer. Prueba con algun detalle un resultado central de Daubechies sobre las ondaletes de soporte compacto.

[8] *Strang, G.* : "Wavelet transforms versus Fourier transforms". Bull. AMS. 1993.

Es un artículo que motiva el uso de las ondaletes en las aplicaciones; compara a la transformada de Fourier con la transformada de ondalete; da énfasis a la solución de la ecuación dilatación y a las aplicaciones en el procesamiento de señales e imágenes.

[9] *Meyer, Y. :* "Comentarios a los libros de Ch. K. Chui y de I. Daubechies". Bull. AMS. 1993.

Es un trabajo que da una visión general de las ondaletes, los caminos que conducen a la teoría. Hace un análisis crítico sobre la llamada "revolución-ondalete" y sus expectativas. Es un artículo útil para lograr conciencia del valor de las ondaletes. Se dan comentarios y críticas de los libros en cuestión. Meyer expresa su optimismo sobre el valor de las ondaletes en el desarrollo científico-tecnológico.

[10] *Ortiz, A.* : "Señales y ondaletes". Pro-Math. PUCP. 1993

Es un artículo de carácter didáctico que pretende dar un panorama de las ondaletes y sus relaciones con las señales.

[11] *Lemarié, P.G. (Ed). :* "Les ondelettes en 1989". Springer - Verlag. 1990.

Contiene nueve conferencias realizadas en 1989 orientadas a tres áreas: la teoría matemática de las ondaletes; sus aplicaciones (a la teoría de operadores, tratamiento de la señal,...) y al análisis de los fractales por las ondaletes.

[12] *Meyer Y. :* "Wavelets. Algoritms and Applications". SIAM. 1993.

Es un interesante libro donde el autor, uno de los líderes de la teoría, explica los fundamentos de las ondaletes, sus motivaciones históricas y sus aplicaciones a diferentes disciplinas (filtros, procesamiento numérico de las señales e imágenes, fractales, turbulencias,...).

[13] *Daubechies, I. (Ed)* : "Different perspectives on wavelets". AMS. 1993.

La publicación contiene ocho artículos sobre temas que van desde las bases ortonormales de ondaletes, la vinculación con los operadores (diferenciales y seudo-diferenciales) hasta temas especializados en las aplicaciones (análisis numérico, paquetes de ondaletes, teoría de la señal).

[14] *Chui, Ch. (Ed) :* "Wavelets: a tutorial in theory and applications". Ac. Press. 1992.

Es un amplio libro con 22 artículos que tratan diversas áreas, tanto en los fundamentos matemáticos de la teoría como en diversas aplicaciones de la teoría de ondaletes. El libro contiene un extensa bibliografía de gran utilidad para los interesados. Los autores de los artículos se proponen motivar el estudio de las ondaletes en sus diferentes perspectivas.

[15] *Walter, G.G. :* "Wavelets and other orthogonal systems with applications".
CRC. Press. INC. 1994.

Es un libro dirigido tanto a matemáticos como a físicos e ingenieros. Es una interesante obra que combina el clásico análisis de Fourier con métodos de la teoría de distribuciones y de la reciente teoría de "wavelets". Es un libro didáctico escrito en trece capítulos, siendo su última parte un tanto técnico y especializado (aplicaciones de las ondaletes a la estadística, lo que puede interesar a un sector de la matemática aplicada).

[16] *Jaffard, S. :* "Ondalettes et applications á l'étude des equations aux dérivées partielles". (pre-publicación). Orsay. 1993.

Son notas de lectura dadas por el autor en Francia; las aplicaciones de las ondaletes a las ecuaciones en derivadas parciales exigen un cuidadoso pre- requisito de la teoría, lo que es considerado en forma resumida por el autor. Entre otros temas, trata la representación de operadores diferenciales por las ondaletes, la solución numérica de ecuaciones de evolución, los espacios de Sobolev $W^{s,p}$, ...

NOTA: *Se anuncia el libro "wavelets", Filter Banksand Applications del prof. Gilbert Strang (por aparecer en junio de 1995. Wellesley Cambridge Press).*

jortiz@pucp.edu.pe