

SOBRE UN PROBLEMA ASOCIADO A LA CONJETURA DEL JACOBIANO

Fernando Torres

La conjetura del Jacobiano (C.J.) establece que si k es un campo algebraicamente cerrado de característica cero, $f: k^n \rightarrow k^n$ es una función polinomial (i-e sus coordenadas son polinomios en n variables) y si el jacobiano $j(f) \equiv \text{cte} \neq 0$, entonces f es inversible, i-e., existe la inversa de f y ésta también es polinómica. Una excelente referencia para ver más sobre este problema es el artículo de Bass, Connell y Wright [1]. En tal referencia es probado [Thm.2.1] que la C.J. es equivalente a la inyectividad de f . Aquí estamos interesados en el siguiente problema:

$$f \text{ inyectiva} \Rightarrow j(f) \equiv \text{cte} \neq 0.$$

Vamos a probar que tal implicación es verdadera y para hacerlo notemos primero que podemos suponer $K = \mathbb{C}$ (esto es debido al principio de Lefschetz). Daremos una solución más simple de aquella dada en [3, pág. 26] y usaremos métodos de variable compleja en dimensión n . Sea $h := j(f)$. Luego, h es un polinomio en n variables y en particular es una función holomorfa en \mathbb{C}^n . Sea $Z = \{x \in \mathbb{C}^n : h(x) = 0\}$ el conjunto de ceros de h .

Afirmación 1 $Z = \emptyset$

Prueba. Puedo suponer $n > 1$ pues el caso $n = 1$ sigue fácilmente usando el desarrollo en serie de potencias alrededor de cada cero.

Supongamos $Z \neq \emptyset$. Luego Z es una hipersuperficie en C^n y por lo tanto de dimensión $n - 1 > 0$ (ver por ejemplo [2, Lemma 2.13]). En particular contiene una subvariedad compleja $M \neq \emptyset$ de dimensión $n - 1$. Por otro lado, por inducción puede probarse que $\det f'(a) = j(f)(a) = 0$ implica $f'(a) = 0$. Así tenemos que $f'(a) = 0$ en M significando que f es localmente constante en M . Como la dimensión de M es positiva se contradice la inyectividad de f y se acaba la prueba.

Afirmación 2 $j(f)$ es constante

Prueba. Si $j(f)$ no fuera constante, siendo C algebraicamente cerrado $j(f)$ tendría un cero contradiciendo la afirmación 1.

Finalizamos esta nota remarcando que la hipótesis sobre k debe ser algebraicamente cerrado y de característica cero son esenciales pues, en el primer caso $f(x) = x^3$ sobre $k = \mathbb{R}$ es un contraejemplo, y en el segundo caso $f(x) = x^p$, definido sobre un campo de característica prima $p > 0$, es un contraejemplo.

Referencias

- [1] *H. Bass, Connell & Wright: The Jacobian Conjecture; Reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. 7, (1982) 287-330.
- [2] *R. M. Range: Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer Verlag, New York, 1986.
- [3] *F. Torres: Acerca de la Conjetura del Jacobiano*, Pro Mathematica, vol.V, No. 9-10 (1991), 13-39.

Maths. Section
ICTP
P.O.Box 586 34100
Trieste - Italia
feto@ictp.trieste.it