Pro Mathematica: Vol. VIII, Nos.15-16, 1994

UN PROBLEMA DE COMPLETACION RELACIONADO CON LA HIPOTESIS DE RIEMANN

Julio ***Alcántara Bode***

Se prueba que el conjunto de autofunciones, asociado a los autovalores no nulos del operador integral A_ρ *definido en* $L^2(0,1)$ *por* $[A_\rho f](\theta) = \int_0^1 \rho(\theta/x) f(x)dx$,

donde ρ *es la función parte fraccionaria, es completo en* $L^2(0,1)$, *pero no constituye una base de Schauder para* $L^2(0,1)$.

1. Resumen de Resultados Previos

En un trabajo anterior [2] reformulamos la Hipótesis de Riemann como un problema de Análisis Funcional por medio del siguiente teorema:

Teorema. *Sea* $[A_\rho f](\theta) = \int_0^1 \rho(\theta/x) f(x)dx$, *donde* $\rho(x) = x-[x]$, $x \in \mathbf{R}$, $[x] \in \mathbf{Z}$, $[x] \leq x < [x] + 1$, *es considerado como un operador sobre* $L^2(0,1)$. *Entonces, la Hipótesis de Riemann se cumple sí y sólo si* $\text{Ker } A_\rho = \{0\}$. *O si y sólo si* $h \notin \text{Ran } A_\rho$ *donde* $h(x) = x \quad \forall x \in [0,1]$.

Profesor Asociado de Matemáticas, Dpto. de Ciencias, PUCP.

Entre otras cosas, probamos también que

(I) A_p es Hilbert-Schmidt, pero no nuclear ni normal.
(ii) $\lambda \neq 0$ es un autovalor de A_p si y sólo si $T(\lambda^{-1}) = 0$, donde

$$T(\mu) = 1 - \mu + \sum_{f=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{\prod_{l=1}^{r} \zeta(l+1)}{(r+1)!(r+1)} \mu^{r+1}$$

es una función entera de orden uno y tipo uno. Más aún, cada autovalor no nulo $\lambda = \mu^{-1}$ tiene multiplicidad algebraica uno y autofunción asociada

$$\psi_\mu(x) = \mu \, x \, T'(\mu x).$$

(iii) Si $\{\lambda n\}_{n \geq 1}$ es la sucesión de autovalores no nulos de A_p donde el orden es tal que $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ $\forall$ n $\geq$ 1, entonces

$$\lambda_1 > 0, \quad |\lambda_n| \leq \frac{e}{n} \quad \forall n \geq 1, \quad \sum_{n+1}^{\infty} |\lambda_n| = \infty$$

y $\lambda_n \notin \mathbf{R}$ para un número infinito de valores de n.

(iv) Si $D^*(\mu)$ es el determinante modificado de Fredholm de A_p,

entonces $D^*(\mu) = e^{\mu} T(\mu)$ $\forall \mu \in \mathbf{C}$, y ambas funciones enteras tienen solamente ceros simples.

El propósito del presente trabajo es completar los resultados en [2], probando que el conjunto $\{\psi_\mu : \psi_\mu(x) = \mu \, x \, T'(\mu x),\ T(\mu) = 0\}$ es completo en $L^2(0,1)$, pero no es una base de Schauder para $L^2(0,1)$.

2. Prueba de los resultados principales

Teorema 1. *El conjunto* $\{\psi_\mu : \psi_\mu(x) = \mu \, x \, T'(\mu x),\ T(\mu) = 0\}$ *es completo en* $L^2(0,1)$.

Demostración: Supongamos que $f \in L^2(0,1)$ es tal que

$<\psi_\mu , f> = \int_0^1 \psi_\mu (x)\overline{f(x)}dx = 0$ siempre que $T(\mu) = 0$. Mostraremos que $f = 0$.

Por [2], Teorema 9, T tiene sólo ceros simples y por tanto sigue del teorema de factorización de Hadamard que hay una función entera S_f tal que

$$S_j(\mu)T(\mu) = <\psi_\mu, f> \ \forall \mu \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

Si $Q_f \xi = <\xi, f> h$, donde $h(x) = \mu$, consideraremos el operador $A_\rho + Q_f$. Razonando como en la prueba del Teorema 3 en [2], se puede mostrar que las autofunciones de $A_p + Q_f$, asociadas a sus autovalores no nulos son analíticas y tienen la forma ψ_μ

Se ha mostrado en [2], ecuación (21), que $[A_\rho - \mu^{-1}]\psi_\mu = T(\mu)\mathrm{h}$, luego sigue de la ecuación (1) que

$$[A_\rho + Q_f - \mu^{-1}]\psi_\mu = T(\mu)[1 + S_f(\mu)]h, \quad \forall_\mu \in \mathrm{C} \setminus \{0\}, \tag{2}$$

y así

$$[A_\rho + Q_f - \mu^{-1}]^{-1} \mathrm{h} = \frac{\psi_\mu}{T(\mu)[1 + S_f(\mu)]} \tag{3}$$

si $\mu \neq 0$ y μ_0^{-1} no es un autovalor de $A_\rho + Q_f$. Si $W_f(\mu) = T(\mu)[1+S_f(\mu)]$, se puede mostrar como se hizo en [2], Teorema 5, que el determinante de Fredholm D^*_f, de $A_\rho + Q_f$ está dado por

$$D^*_f(\mu) = e^{(1+<\mathrm{h,f}>)\mu} \, \mathrm{W}_f(\mu). \tag{4}$$

De la ecuación (4) sigue que $\mu_0^{-1} \neq 0$ es un autovalor de $A_\rho + Q_f$ si y solamente si $W_f(\mu_0) = 0$ y la multiplicidad algebraica de μ_0^{-1} coincide con la multiplicidad de μ_0 como un cero de W_f. Ahora, procediendo como en la prueba del Teorema 9 en [2], se puede mostrar que la función entera W_f tiene solamente ceros simples. Por lo tanto, como $S_{\lambda f} = \overline{\lambda}\, S_f \ \forall \lambda \in \mathrm{C}$, si tuviéramos $T'\mu_i = 0$ y $S_f(\mu_i) \neq 0$, podríamos escoger λ de tal forma que $1 + \overline{\lambda}\, \mathrm{S}_f(\mu_i) = 0$. Esto implicaría que μ_i es un cero de $W_{\lambda f}$ de multiplicidad mayor que uno, lo que es una contradicción. Entonces $T(\mu_i)=0$ implica que $S_f(\mu_i)=0$. Como todos los ceros de T son simples existe una función entera G_f tal que

$$S_f(\mu) = T(\mu)\, G_f(\mu) \quad \forall \mu \in C. \tag{5}$$

Asumamos ahora que $W_f(\mu_i) = 0$, $T(\mu_i) \neq 0$ y

$$[A_p^* + Q_f^* - \bar{u}_i^{-1}]\chi_i = 0, \tag{6}$$

donde $\chi_i \neq 0$. De las ecuaciones (2) y (6) sigue que

$$< \psi_\mu , \chi_i > = 0 \quad \text{si} \quad T(\mu) = 0. \tag{7}$$

Ahora, si $\mu \in C \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} 0 &= < \psi_\mu , (A_p^* + Q_f^* - \bar{\mu}^{-1} - \bar{\mu}_i^{-1} + \bar{\mu}^{-1})\chi_i > \\ &= W_f(\mu) < h, \chi_i > + (\mu^{-1} - \mu_i^{-1}) < \chi_i > \end{aligned} \tag{8}$$

De las ecuaciones (2) y (7) obtenemos que si $\mu \in C \setminus \{0\}$, entonces

$$[A_\rho + Q_{\chi_i} - \mu^{-1}]\, \psi_u = W_{\chi_i}(\mu) h \tag{9}$$

y si aquí tomamos en cuenta la ecuación (8), obtenemos que si $\mu \in C \setminus \{0\}$, entonces

$$(A_\rho - \mu^{-1})\, \psi_\mu = [W_{\chi_i}(\mu) + \frac{W_f(\mu)}{\mu^{-1} - \mu_i^{-1}} < h, \chi_i >]\, h. \tag{10}$$

Pero como $[A_\rho - \mu^{-1}]\, \psi_\mu = T(\mu) h$ ([2], ecuación (21)), sigue de la ecuación (10) que

$$W_{\chi_i}(\mu) + \frac{W_f(\mu)}{\mu^{-1} - \mu_i^{-1}} < h, \chi_i > = T(\mu). \tag{11}$$

Por continuidad (11) también se cumple si $\mu = 0$. Reemplazando $W_{\chi_i}(\mu) =$
$= T(\mu)\,[1 + S_{\chi_i}(\mu)]$ y $W_f(\mu) = T(\mu)\,[1 + S_f(\mu)]$ en (11) se obtiene

$$[1 + S_f(\mu)] < h, \chi_i > = (\mu_i^{-1} - \mu^{-1}) S_{\chi_i}(\mu). \qquad \textbf{(12)}$$

Pero de la ecuación (5) $S_{\chi_i}(\mu) = T(\mu)\,G_{\chi_i}(\mu)$, y por tanto la ecuación (12) implicaría que todo cero de T sería un cero de $1 + S_f$, y así W_f tendría ceros de multiplicidad mayor que uno, una contradicción ($< h, \chi_i > \neq 0$ puesto que h es un vector cíclico para A_ρ [2]). Entonces $W_f(\mu_i) = 0$ implica $T(\mu_i) = 0$ y $1 + S_f$ no tiene ceros. De la ecuación (1) sigue que el orden de S_f no es mayor que uno.

Consecuentemente, hay números complejos a,b tales que

$$1 + S_f(\mu) = e^{a\mu+b}. \qquad \textbf{(13)}$$

De la ecuación (1), $S_f(0) = 0$, de modo que $e^b = 1$ y

$$1 + S_f(\mu) = e^{a\mu}. \qquad \textbf{(14)}$$

Si μ_i es un cero no nulo de T ([2], Teorema 4), de la ecuación (5) sigue que

$$e^{a\mu} = 1. \qquad \textbf{(15)}$$

Puesto que $T(\bar{\mu}_i) = 0$, obtenemos que $e^{a\bar{\mu}_j} = 1$ y

$$e^{a(\mu_j - \bar{\mu}_j)} = 1. \qquad \textbf{(16)}$$

Por tanto $a \in \mathbf{R}$. Pero de la observación (ii) hecha al Teorema 4 en [2], sabemos que T tiene un cero positivo μ_1. Entonces como $e^{a\mu_1} = 1$, obtenemos $a = 0$ y, de la ecuación (14), $S_f = 0$. De la ecuación (1) se cumple entonces que $<\psi_\mu, f> = 0\ \forall n \in N$, donde $h(x) = x$. Del Teorema de Muntz-Szasz [1], sigue que $f = 0$, lo cual prueba el Teorema. ❑

Nota.- Por un teorema de Banach, [4], p.307, Teorema 1.1, si

$$\{\psi_\mu : \psi_\mu(x) = \mu\, x\, T'(\mu x),\ T(\mu) = 0\}$$

fuera una base de Schauder para L^2 (0,1), entonces el conjunto de auto funciones de A_ρ^* sería también una base de Schauder para L^2 (0,1) , por el Teorema 1 en [2], la Hipótesis de Riemann se cumpliría.

En lo que sigue mostramos que ninguno de estos conjuntos es una base d Schauder para L^2 (0,1) .

Teorema 2. *El conjunto*

$$\{ \omega_n: \omega_n \in L^2 (0,1), A_\rho^* \; \omega_n := \overline{\lambda}_n \, \omega_n \, , T(\lambda_n^{-1}) = 0, \quad n \in N,$$
$$< \omega_n, \phi_m > = \delta_{nm}, \phi_m(x) = \lambda_m^{-1} \, x \, T' (\lambda_m^{-1} x) \}$$

no es una base de Schauder para L^2 (0,1) .

Demostración: Asumamos que $\{\omega_n : n \in N\}$ es una base de Schauder pa $L^2(0,1)$. Entonces, si $a \in]0,1]$ y χ_A es la función característica del conjunt A, tendríamos

$$\frac{1}{h} \chi_{[a,1]} = \sum_{n=1}^{\infty} < \frac{1}{h} \chi_{[a,1]}, \phi_n > \omega_n \tag{17}$$

donde $h(x) = x$. Ahora

$$< \frac{1}{h} \chi_{[a,1]}, \phi_n > = -\overline{T(\lambda_n^{-1} a)} \tag{18}$$

de aquí que

$$\frac{1}{h} \chi_{[a,1]} = - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{T(\lambda_n^{-1})} \omega_n \tag{19}$$

Entonces, si k es un entero no negativo obtenemos

$$< h^{k+1}, \frac{1}{h} \chi_{[a,1]} > - \sum T(\lambda_n^{-1} a) < h^{k+1}, \omega_n >$$

o

$$\frac{1}{k+1}[1-a^{k+1}] = -\sum_{n=1}^{\infty} T(\lambda_n^{-1}a) < h^{k+1}, \omega_n >. \qquad \textbf{(20)}$$

Ahora, si $\psi_\mu(x) = \mu\, x\, T'(\mu\, x)$, ya hemos visto que $(A_\rho - \mu^{-1})\,\psi_\mu = T(\mu)h$. Por tanto si μ^{-1} no está en el espectro de A_ρ sigue que

$$\psi_\mu = -\,T(\mu)\,\mu(1 - A_\rho\,\mu)^{-1}\,h\,. \qquad \textbf{(21)}$$

Si $T(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n$ y $|\mu|$ es suficientemente pequeño, la ecuación (21) implica que

$$-(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \mu^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A_\rho^n h) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n\, \mu^{n-1} h^n \qquad \textbf{(22)}$$

y consecuentemente

$$-\sum_{r=0}^{k} a_{k-r} A_\rho^r h = (k+1) a_{k+1} h^{k+1}, \forall k \geq 0. \qquad \textbf{(23)}$$

Si usamos la ecuación (23) en la ecuación (20) obtenemos

$$\frac{1}{k+1}[1-a^{k+1}] = \sum_{n=1}^{\infty} T(\lambda_n^{-1}a) \frac{\sum_{r=0}^{k} a_{k-r}\lambda_n^r}{a_{k+1}(k+1)} \langle h, \omega_n \rangle. \qquad \textbf{(24)}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\langle h, \omega_n \rangle &= \langle \frac{(A_\rho - \mu^{-1})\psi_\mu}{T(\mu)}, \omega_n \rangle \\
&= \frac{1}{T(\mu)} \langle \psi_\mu, (\bar{\mu}_n^{-1} - \bar{\mu}^{-1})\omega_n \rangle \\
&= \frac{(\mu_n^{-1} - \mu^{-1})}{T(\mu)} \langle \psi_\mu, \omega_n \rangle.
\end{aligned}$$

Tomando el límite $\mu \rightarrow \mu_n = \lambda_n^{-1}$ en la última expresión obtenemos

$$\langle h,\omega_n\rangle = \frac{\lambda_n^2}{T'(\lambda_n^{-1})}. \tag{25}$$

Reemplazando la ecuación (25) en la ecuación (24) da

$$a_{k+1} = \sum_{r=0}^{k} \frac{a_{k-r}}{1-a^{k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(\lambda_n^{-1}a)}{T'(\lambda_n^{-1})} \lambda_n^{2+r}, \forall k \geq 0. \tag{26}$$

Recordemos ahora que si $\sigma_1 = 1$, $\sigma_r = \mathrm{tr}\, A_\rho^r$, $\forall r \geq 2$, entonces

$$a_{k+1} = -\sum_{r=0}^{k} a_{k-r} \frac{\sigma_{r+1}}{k+1}, \forall k \geq 0. \tag{27}$$

(Ver la observación que sigue al teorema 5 en [2]). Comparando las ecuaciones (26) y (27) obtenemos que si $k \geq 0$ y $0 \leq r \leq k$, entonces

$$\frac{a^{k+1}-1}{k+1} = \frac{1}{\sigma_{r+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(\lambda_n^{-1}}{T'(\lambda_n^{-1})} \lambda_n^{2+r}. \tag{28}$$

Pero esto es una contradicción puesto que el lado derecho no dependen de k si $r = 0$, y la sucesión $\{\frac{a^{k+1}-1}{k+1}\}_{k\geq 0}$ es estrictamente creciente si $a \in]0,1[$, [3] p.17, ejercicio 8. ❑

Referencias

[1] *N.I. Achieser.* Theory of Approximation. Ungar, New York. 1956.

[2] *J. Alcántara-Bode.* An Integral equation formulation of the Riemann Hyposthesis. J. Integral Equations and Operator Theory, 17:151-168, 1993.

[3] *J.C. Burkill.* A first course in Mathematical Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

[4] *I.C. Gohberg and M.G. Krein.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. A.M.S., Rhode Island, 1969.

jalcant@pucp.edu.pe