Pro Mathematica: Vol. VIII, Nos.15-16, 1994

DINAMICA CUALITATIVA DE TIEMPO DISCRETO EN ECONOMIA

Ramón ***García-Cobián J.***

1. Introducción:

El problema típico por considerar es el de un agente que a partir de un "hoy" tiene que decidir cada día qué "estado" ocupar; tales decisiones han de estar sujetas a ciertas restricciones previamente dadas, las cuales pueden depender de cuál haya sido el último estado ocupado. Además, cada decisión recibe una remuneración, la que también puede depender del último estado ocupado.

El problema del agente consiste en hallar la senda óptima de decisiones que maximice la suma de los valores descontados de las retribuciones desde hoy en adelante.

2. El problema de la sucesión (PS):

Dados: un positivo β, un conjunto no vacío X, una correspondencia $\Gamma{:}X \rightarrow X$ y una función real F cuyo dominio es la gráfica de Γ; hallar, para un a dado en X, una sucesión (x_t) en X que alcance el

✎ *Profesor Principal de Matemáticas, Dpto. de Ciencias. PUCP.*

$$\sup\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}F(x_t,x_{t+1})\,|\,(x_t)\in X^{\tilde{N}}\wedge\forall t,x_{t+1}\in\Gamma(x_t)\wedge x_0=a\right\}$$

A este problema se le asocia una ecuación funcional:

$$(EF)\qquad\qquad v(x)=\sup_{y\in\Gamma(x)}(F(x,y)+\beta\ v(y)).$$

Las sucesiones en X se llaman "planes", y se dice que un plan (x_t) es "factible" si $\forall t\in\tilde{N}$, $x_{t+1}\in\Gamma(x_t)$. El conjunto de todos los planes factibles que partan de un a de X dado, i.e. que satisfagan además: $x_0 = a$, se denota por $\Pi(a)$ y se llama el conjunto de "planes factibles desde a".

Asunción 1: Γ es una correspondencia de valores no vacíos.

Asunción 2: F es tal que $\forall a\in X$, $\forall(x_t)\in\Pi(a)$, existe en $\overline{R}:=[-\infty,\infty]$ la

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}F(x_t,x_{t+1}).$$

Estas asunciones permiten definir la "*función suprema*" $v^*: X\to\overline{R}$,

$$a\mapsto\sup\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}F(x_t,x_{t+1})\,|\,(x_t)\in\Pi(a)\right\}.$$

Se dirá que v^* satisface a la ecuación funcional si $\forall a\in X$:

i) caso que $|v^*(a)|<\infty$, se tenga que
$v^*(a)=\sup\{F(a,y)+\beta v^*(y)|y\in\Gamma(a)\}$;

ii) caso que $v^*(a)=\infty$, se tenga que $\exists(y_k)\in\Pi(a)$ tal que
$\infty=\lim_{k\to\infty}(F(a,y_k)+\beta\ v^*(y_k))$;

iii) caso que $v^*(a)=-\infty$, se tenga que $\forall y\in\Gamma(a), -\infty=F(a,y)+\beta\ v^*(y)$.

Teorema 1: *Las asunciones (1) y (2) garantizan que la función suprema satisfaga a la ecuación funcional y que sea la única solución de (EF) que satisfaga* $\forall a\in X,\forall(x)\in\Pi(a)$, *que* $0=\lim_{n\to\infty}(\beta^{n}v(x_n))$.

Demostración: Sólo hay que comprobar según las definiciones. ❑

3. Caracterización de los planes factibles óptimos:

Teorema 2: *Con las asunciones (1) y (2), si algún* (x_t^*) *de* $\Pi(a)$, *alcanza el supremo en (PS), entonces*

$$v^*(x_t^*) = F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta\, v^*(x_{t+1}^*);$$

recíprocamente, si algún $(\tilde{x}_t)$ *de* $\Pi(a)$ *satisface esta última igualdad, entonces el que* $(\tilde{x}_t)$ *alcance el supremo en (SP) es garantizado por la condición:* $\limsup_{\infty} \beta^{\,t} v^*(\tilde{x}_t) \le 0.$

Demostración: Como en (x_t^*) se alcanza el supremo de (PS),

$$v^*(a) = F(a, x_1^*) + \beta \sum_{0}^{\infty} \beta^{\,t} F(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \ge$$

$$\ge F(a, x_1) + \beta \sum_{0}^{\infty} \beta^{\,t} F(x_{t+1}, x_{t+2})\ \forall (x_t) \text{ de } \Pi(a).$$

En particular, esto vale para todo plan (x_t) tal que $x_1 = x_1^*$, y como

$$(x_1^*, x_2, x_3, \ldots) \in \Pi(x_1^*) \Rightarrow (a, x_1^*, x_2, \ldots) \in \Pi(a),$$

se sigue que

$$\sum_{0}^{\infty} \beta^{\,t} F(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \ge \sum \beta^{\,t} F(x_{t+1}, x_{t+2})\ \forall (x_t) \text{ de } \Pi(x_1^*).$$

Luego, el primer miembro de esta desigualdad es $v^*(x_1^*)$, lo que sustituido en la primera desigualdad da el resultado buscado para $t = 0$. El resto es cosa de inducción.

Para la segunda parte del teorema, de las hipótesis se sigue que:

$$v^*(a) = \sum_{0}^{n} \beta^{\,t} F(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}) + \beta^{\,n+1} v^*(\tilde{x}_{n+1})$$

para cualquier $(\tilde{x}_t)$ de $\Pi(a)$.

Luego, de que $\limsup_{\infty} \beta^t v^*(\tilde{x}_t) \leq 0$ se sigue que

$$v^*(a) \leq \sum_0^{\infty} \beta^t F(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1}).$$

La desigualdad recíproca es consecuencia de que $(\tilde{x}_t) \in \Pi(a)$. ❑

Definición: *Una "correspondencia de política" es cualquiera $G: X \to X$, no vacía tal que $\forall x$, $G(x) \subseteq \Gamma(x)$; si G es función, se la llama "función de política" y se la denotará por g. Si un plan (x_t) es tal que $\forall t$, $x_{t+1} \in G(x_t)$, se dice que (x_t) "se genera desde" x^0 por G; la correspondencia de política óptima G^* se define por:*

$$G^*(x) := \{y \in \Gamma(x) \mid v^*(x) = F(x, y) + \beta\, v^*(y)\}.$$

Así, de los teoremas anteriores resulta que todo plan óptimo se genera desde G^* y que todo plan generado desde G^*, si satisface la desigualdad del lim. sup., es óptimo.

3. Caso de rendimientos acotados:

En este caso se introducen las dos siguientes asunciones:

Asunción 3: X es un subconjunto convexo de R^l y Γ es de valores compactos no vacíos y continua.

Asunción 4: F es continua y acotada, y β es positivo menor que 1.

Así, resulta natural buscar soluciones a la ecuación funcional en el espacio $BC^0(X)$ de las funciones reales continuas y acotadas definidas en X, con la norma del supremo. Cada v de $BC^0(X)$ que sea solución de la ecuación funcional determina una correspondencia de política

$$G_v : X \to X,\, x \mapsto G_v(x) := \{y \in \Gamma(x) \mid v(x) = F(x, y) + \beta\, v(y)\}.$$

Entonces los teoremas anteriores implican que para todo a de X, un plan (x^*_t) alcanza el supremo en (PS) si, y sólo si, es generado por G_{v^*}.

Defínase el operador T sobre $BC^0(X)$ por

$$Tf : x \mapsto \max\{F(x, y) + \beta\, f(y) \mid y \in \Gamma(x)\}.$$

En términos de T, la ec. func. es: $v = Tv$.

Teorema 3: *Con las asunciones (3) y (4) se cumple que imagen $(T) \subseteq BC^0(x)$, que T posee un único punto fijo v, y que $\forall v_0$ de $BC^0(X)$, se* *cumple* $\forall n \in \mathrm{N}, \|T^n v_0 - v\| \leq \beta^n \|v_0 - v\|$; *además,* G_v *es de valores compactos y superiormente semicontinua.*

Demostración: Se sigue de que: (1) $\forall f$ de $BC^0(X)$, $\forall x \in X$, es continua $F(x,.) + \beta\, f$ y es compacto $\Gamma(x)$, lo que hace que se alcance el máximo; (2) de que F y f sean acotadas se sique que Tf lo es; (3) que Tf sea continua es consecuencia inmediata del teorema del máximo; (4) finalmente, T es una contracción y $BC^0(X)$ es un espacio de Banach, por lo cual el teorema de la contracción implica que T tiene un único punto fijo. Las propiedades de G_v se siguen del teorema del máximo. ❑

Así, la segunda parte del teorema 1 muestra que con las asunciones (3) y (4), se obtiene que hay una v de $BC^0(X)$ solución de la ec. func. y que es la función suprema para *(PS)*; y con el teorema 2, ahora se concluye que hay un plan óptimo, a saber, cualquiera que sea generado por G_v.

Finalmente se llega al importante resultado acerca del carácter funcional de G_v, así como a su continuidad y diferenciabilidad, gracias a un resultado debido a Benveniste y Scheinkman (ref. 2):

Teorema 4: *Si además de las asunciones hechas, se tiene que F es estrictamente cóncava y* Γ *es de valores convexos, entonces toda solución de la ec. func. es estrictamente cóncava y la correspondencia de política que ella determina es función y es continua. Si F fuese, además, de clase* C^1 *sobre el interior de graf*(Γ)*, entonces para todo a del interior de X tal que* $g(a) \in$ *interior de* $\Gamma(a)$*, se tiene que v es de clase* C^1 *en a y en su gradiante es dado por:*

$$D_i v(a) = D_i F(a, g(a)), \quad i = 1, \ldots, 1.$$

4. Ecuaciones de Euler:

El modo clásico de abordar el problema de la sucesión es tratarlo como un problema directo de programación en las variables de decisión: $x_1, x_2, \ldots$. Se pueden sacar condiciones nece-sarias para que un plan sea óptimo de la observación de que si $(x^*_1, x^*_2, \ldots)$ es solución del (PS) para un a dado ($x^*_0 = a$), entonces para todo t ha de tenerse que x^*_{t+1} es solución de:

$$\max_y \{F(x^*_t, y) + \beta\, F(y, x^*_{t+2}) \mid y \in \Gamma(x^*_t) \wedge x^*_{t+2} \in \Gamma(y)\}.$$

Teorema 4: *(Suficiencia de las condiciones de Euler y transversalidad) Si X está incluido en el ortante positivo de R^l y se satisfacen las asunciones 3 y 4 y, además, $\forall y$, $F(.,y)$ es estrictamente creciente en cada uno de sus argumentos, estrictamente cóncava y de clase C^1 en el interior de $gr(\Gamma)$, y Γ es convexa; entonces un plan (x_t^*) tal que $\forall t, x_{t+1}^* \in \overset{0}{\Gamma}(x_t^*)$, es óptimo para* (PS) *dado $a = x_0$ si:*

$$0 = \nabla_y F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta \nabla_x F(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \wedge 0 = \lim_{t \to \infty} \beta^t \nabla_x F(x_t^*, x_{t+1}^*).x_t^*.$$

Demostración: sea (x^*_t) como se indica en el enunciado; basta con demostrar que

$$\forall (x_t) \in \Pi(a), \quad D := \sum_0^\infty \beta^t (F(x_t^*, x_{t+1}^*) - F(x_t, x_{t+1})) \geq 0.$$

Pero por la concavidad y diferenciabilidad de F se tiene que la diferencia de valores de F anterior es

$$\geq \nabla_x F(x_t^*, x_{t+1}^*).(x_t^* - x_t) + \nabla_y F(x_t^*, x_{t+1}^*).(x_{t+1}^* - x_{t+1}).$$

Como $x_0^* - x_0 = a - a = 0$, reordenando se tiene:

$$D \geq \lim_{T \to \infty} \Big(\sum_0^{T-1} \beta^t (\nabla_y F(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta \nabla_X F(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*)).(x_{t+1}^* - x_{t+1}) +$$

$$+ \beta^T \nabla_y F(x_T^*, x_{T+1}^*).(x_{T+1}^* - x_{T+1})\Big)$$

Por hipótesis, todos los términos de la suma son nulos. Luego, sustituyendo y usando la hipótesis sobre el límite se sigue que

$$D \geq - \lim_{T \to 0} \beta^T \nabla_x F(x_T^*, x_{T+1}^*).x_T^*. \text{ Así, } D \geq 0 \ \square$$

5. Dinámica:

Bajo las asunciones anteriores (las del teorema 4), si una solución es interior por doquier, entonces la condición necesaria de primer orden y la de la envolvente*

$$0 \overset{(1)}{=} \nabla_y F(x, g(x)) + \beta\, v'(g(x)) \wedge v'(x) \overset{(2)}{=} \nabla_x F(x, g(x))$$

dan información ulterior sobre la función g.

Bajo tales asunciones, cualquier sucesión (x_t) que satisface a la ecuación de Euler y a la de transversalidad:

$$0 \overset{(3)}{=} \nabla_y F(x_t, x_{t+1}) + \beta\, \nabla_x F(x_{t+1}, x_{t+2}) \wedge 0 \overset{(4)}{=} \lim_{t \to \infty} \beta^t \nabla_x F(x_t, x_{t+1}), x_t$$

es la única solución al (PS) dado que $x_0 = a$ (último teorema: 4).

Lo que se quiere es hallar métodos que usen (1)-(4) para caracterizar la conducta de las soluciones del (PS), y para alcanzar resultados cualitativos acerca de las sendas solución para una amplia clase de funciones F.

El siguiente ejemplo muestra que las propiedades de las sendas solución pueden ser o muy simples o muy complejas; así, la estabilidad no es una propiedad general, pues podrá haber ciclos, explosiones y caos.

Ejemplo 1: Es un modelo mono-vectorial de crecimiento económico óptimo en el que se llega a la ecuación funcional:

$$v(k) = \max_{0 \le y \le f(k)} (Uf(k) - y) + \beta\, v(y)) \quad \text{donde}$$

$$f \in C^0(R_+, R_+), U \in C^0(R_+, R), \beta \in]0,1[.$$

* *Teorema de la envolvente: En* $\max f(x,\alpha)$ *sujeto a* $g(x,\alpha) = 0$, *con* $f: R^n \to R, g: R^n \to R^m$, *sean*

$$F(\alpha) := f(x(\alpha), \alpha) \wedge \psi(\alpha) := f(x(\alpha), \alpha) + \lambda(\alpha) g(x(\alpha), \alpha) \wedge$$
$$\wedge\, \Phi(x, \lambda, \alpha) := f(x, \alpha) + \lambda g(x, \alpha);$$

entonces si F, ψ *son de clase* C^1 *en* α, *se tiene:*

$$F_\alpha = \psi_\alpha = \Phi_\alpha \; (= f_\alpha + \lambda g_\alpha).$$

Se asume que f y U son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas de clase C^1 tales que $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$, $f'(\infty) = 0$ y $U'(0) = \infty$.

Entonces, se puede demostrar fácilmente que $\exists! \bar{k} > 0$, $f(\bar{k}) = \bar{k}$; tal $\bar{k}$ es el máximo de existencias de capital mantenible, pues $k_t > \bar{k} \Rightarrow k_{t+1} \leq f(k_t) \leq k_t$, por lo que puede restringirse la atención al $[0, \bar{k}]$. Luego, f y U resultan acotadas sobre este intervalo.

Los teoremas anteriores permiten concluir que la ecuación funcional de este ejemplo tiene una única solución continua v en $[0, \bar{k}]$, que es estrictamente creciente y estrictamente cóncava; que $\forall k$ de $[0, \bar{k}]$, el máximo de la ecuación funcional se alcanza en un único valor: $g(k)$; que esta g es continua, y que dado k_0 en $[0, \bar{k}]$, la sucesión (k_t) definida por $k_{t+1} = g(k_t)$ es la única solución. Se quiere caracterizar g tanto como sea posible.

En lo que se refiere a puntos "estacionarios" o "fijos" de g, hay uno trivial: el 0, pues $0 = g(0)$; si se parte de él, ya no se sale. Para buscar otros, considerar la condición necesaria de primer orden y la de la envolvente para la ecuación funcional:

$$U'(f(k) - g(k)) = \beta\ v'(g(k)) \quad \wedge \quad v'(k) = U'(f(k) - g(k))f'(k).$$

Entonces, puede probarse que $\forall k \in]0, \bar{k}]$, la solución de la ecuación funcional da un punto interior, por lo que v esde clase C^1 en $]0, \bar{k}]$ y las dos ecuaciones últimas valen para todo k del $]0, \bar{k}]$ y g es estrictamente creciente.

Ahora, como $k = g(k)$, eliminando v'(k) en esas ecuaciones se obtiene una condición necesaria para un punto estacionario: $1 = \beta f'(k)$, que por las asunciones hechas posee una única solución: $k^* = f'^{-1}(1/\beta)$. Tal k^* sólo es un candidato a punto estacionario.

Pero como v es estrictamente cóncava, $\forall k$ del $]0, \bar{k}]$, se tiene que

$$(v'(k) - v'(g(k)))(k - g(k)) \leq 0, \text{ con igualdad sólo si } k = g(k).$$

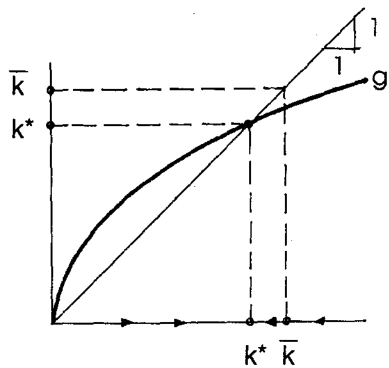
Reemplazando $v'(k)$ y $v'(g(k))$ por sus expresiones anteriores:

$$\forall k \in]0, \bar{k}], \quad (f'(k) - 1/\beta)(k - g(k)) \leq 0;$$

con igualdad si y sólo si $k = g(k)$. Pero en k^*, el primer factor es nulo, luego $k^* = g(k^*)$. Así, k^* sí es punto estacionario.

La condición según la cual $(f'(k)-1/\beta)(k-g(k)) \leq 0 \quad \forall k \in]0,\bar{k}]$ permite inferir que aun más lejos del punto estacionario:

$$f'(k) \gtrless 1/\beta \text{ si } k \lessgtr k^*; \text{ así, } k \lessgtr g(k) \text{ si } k \lessgtr k^*:$$



Se concluye así:

Teorema 1. *Si g es función de política para la ecuación funcional del ejemplo 1, entonces g tiene dos puntos estacionarios: 0 y* $k^* = f'^{-1}(1/\beta)$; *además, cualquiera que sea* k_0 *positivo menor que* $\bar{k}$, la *sucesión* $\langle k_t \rangle$, *definida por* $k_{t+1} := g(k_t)$, *converge monótonamente a* k^*.

Ejemplo 2: Las preferencias son como en el ejemplo 1, pero la tecnología es otra: cada consumidor tiene una unidad laboral por periodo; hay 2 bienes producibles: el de capital y el de consumo. El primero se produce empleando sólo trabajo; y el segundo, capital y trabajo:

$$k_{t+1} = 1 - n_t \quad \text{y} \quad c_t = n_t f(k_t / n_t)$$

donde $0 \leq n_t \leq 1$ es el trabajo usado para producir el bien de consumo[1].

[1] *Como es frecuente, se asume una función de producción* $F(k,n)$ *homogénea para la producción del bien de consumo; así,* $C = nF(k/n,1) =: nf(k/n)$. *Además, por simplificar, en la tecnología del sector que produce el bien de capital se asume como función de producción la identidad.*

Se asume que f y U son diferenciables y acotadas, y que $\forall k \in [0,1], 0 = \lim_{n \to \infty} nf(k/n)$.

Entonces la ecuación funcional es:

$$v(k) = \max_{y \in [0,1]} (U((1-y)f(\frac{k}{1-y})) + \beta\ v(y)).$$

Con razonamientos similares a los del ejemplo anterior se concluye que v es estrictamente creciente y estrictamente cóncava; que la función de política $g:[0,1] \to [0,1]$ está bien definida y es continua.

En lo que respecta a puntos estacionarios: de la condición necesaria de primer orden y del teorema de la envolvente, como antes, se obtiene que

$$0 = \beta\ v'(g(k)) + U'((1-g(k))f(\frac{k}{1-g(k)})(-f(\frac{k}{1-g(k)}) + \frac{k}{1-g(k)} f'(\frac{k}{1-g(k)}))$$

$$v'(k) = U'((1-g(k))f(\frac{k}{1-g(k)}))f'(\frac{k}{1-g(k)})$$

de donde sale como condición necesaria para un punto estacionario:

$$(\beta + \frac{k}{1-k})f'(\frac{k}{1-k}) = f(\frac{k}{1-k}),$$

en donde se ha asumido que F y U son tales que para cualquier k positivo no mayor que 1, el máximo de la ecuación funcional sea punto interior.

De este modo se garantiza que hay un único k^* eb $]0,1[$ que satisface la ecuación anterior. Ya que

$$\forall k \in [0,1], (b - g(k))((\beta + \frac{k}{1-g(k)})f'(\frac{k}{1-g(k)}) - f(\frac{k}{1-g(k)})) \leq 0$$

con igualdad si, y sólo si, $k = g(k)$; se sigue que k^* sí es punto estacionario.

Pero ahora ya no se sigue que g sea creciente, sino que el sistema oscila:

$$k_{t+1} \underset{<}{>} k^* \quad si \quad k_t \underset{>}{<} k^*.$$

Así, la estabilidad del sistema en k^* dependerá de la pendiente de g en k^*.

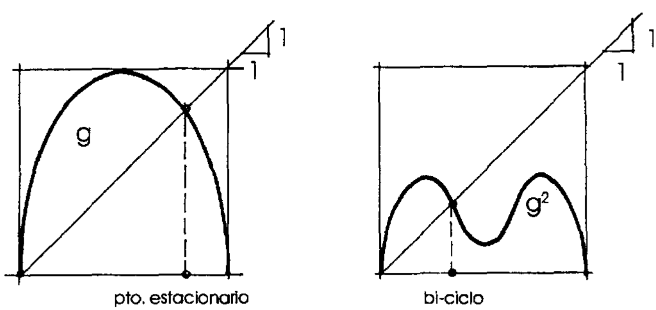
Cabe preguntarse si el hecho de que g sea función de política entraña alguna restricción sobre la clase a la que pertenecen tales funciones. La respuesta, como se desprende del teorema siguiente, es negativa.

Teorema 2: *(Boldrin y Montrucchio): Con X compacto,* $g \in C^2(X,X)$, $\Gamma(x) = X \forall x$; *se tiene que hay una función de remuneración F y un factor de descuento β tales que (X,Γ,F,β) satisface las asunciones de las tres primeras secciones, y para lo cual g resulta ser una función de política óptima.*

Así, cualquier ecuación en diferencias que sea autónoma y bastante tersa puede describir una conducta dinámica óptima. Pero las ecuaciones en diferencias de primer orden pueden tener rangos demasiado amplios de dinámicas. Así, por ejemplo, la ecuación:

$$x_{t+1} = 4x_t - 4x_t^2$$

exhibe 1-ciclos, 2-ciclos, 3-ciclos, etc. como puede verse en las gráficas:



6. Aproximación cuadrática de la ecuación de Euler:

En general no es posible usar una aproximación lineal a la función de política óptima g para programas dinámicos, pues no se tiene información que permita inferir la diferenciabilidad de g. Pero, en cambio, sí es posible usar aproximación lineal a la ecuación de Euler.

Ya se ha visto en la sección 4, teorema 4, que son condiciones suficientes para una solución interior del problema de la sucesión, la ecuación de Euler y la condición de transversalidad:

$$0 = \nabla_y F(x_t, x_{t+1}) + \beta \nabla_x F(x_{t+1}, x_{t+2})$$

$$0 = \lim_{t \to \infty} \beta^t \nabla_x F(x_t, x_{t+1}).x_t \ ;$$

y que éstas garantizan la unicidad de la solución.

Sería deseable el poder hallar condiciones adecuadas sobre F y β que lleven a:

Condición 6.1: Hay un $\bar{x}$ de X y hay una vecindad U de $\bar{x}$ tales que cualquiera que sea x_0 de U, hay una sucesión (x_t) que satisface a la ecuación de Euler y que tiende a $\bar{x}$; así, como la convergencia de (x_t) a $\bar{x}$ hace que se satisfaga la condición de transversalidad, se tendría que cualquier sucesión tal ha de ser la única solución óptima desde x_0.

Esto se ilustra para el caso de ser F cuadrática: En este caso sus primeras derivadas son lineales y:

$$\nabla_x F(x, y) = \overline{F}_x + F_{xx}\, x + F_{xy}\, y \quad \wedge \quad \nabla_y F(x, y) = \overline{F}_y + F_{xy}'\, x + F_{yy}\, y$$

donde son constantes los vectores l-dimensionales $\overline{F}_x$ y $\overline{F}_y$, así como las matrices lxl; $F_{xx}, F_{xy} (= F_{yx}'), F_{yy}$.

La ecuación de Euler:

$$0 = \overline{F}_y + \beta\, \overline{F_x} + F_{xy}'\, x_t + (F_{yy} + \beta F_{xx}) x_{t+1} + \beta F_{xy}\, x_{t+2}.$$

Asumiendo regularidad de la matriz $(F_{xy}' + F_{yy} + \beta F_{xx} + \beta F_{xy})$, hay un único punto estacionario para la ecuación de Euler, a saber:

$$\bar{x} = -(F_{xy}' + F_{yy} + \beta F_{xx} + \beta F_{xy})^{-1} (\overline{F}_y + \beta\, \overline{F}_x).$$

Sea $z_t := x_t - \bar{x}$; entonces, si es regular la matriz F_{xy}, se sigue que:

$$0 = \beta^{-1} F_{xy}^{-1} F_{xy}' z_t + \beta^{-1} F_{xy}^{-1} (F_{yy} + \beta F_{xx}) z_{t+1} + z_{t+2}.$$

Para convertir esta ecuación de segundo orden en una de primer orden, defínase

$$Z_t := (z_{t+1}, z_t) \in R^{2l}. \text{ Así, } Z_{t+1} = AZ_t \text{ con } A = \begin{bmatrix} J & K \\ I & O \end{bmatrix}.$$

siendo

$$J := -\beta^{-1} F_{xy}^{-1} (F_{yy} + \beta F_{xx});\quad K := -\beta^{-1} F_{xy}^{-1} F_{xy}^{'};\ I \text{ y } O \text{ son } lxl.$$

Puede comprobarse que con las hipóteis hechas hasta aquí, resultan regulares A e I-A.

También se comprueba que con dichas hipótesis, de que λ sea raíz característica de A se sigue que también lo es $(\beta\lambda)^{-1}$, y se obtiene el teorema:

Teorema 3: *Si* $F: R^{2l} \to R$ *es cuadrática y estrictamente cóncava; si* $\forall x \in R^l, \Gamma(x) = R^l$; *si* $\beta \in]0,1[$; *si son regulares* F_{xy} *y* $(F_{xy}^{'} + F_{yy} + \beta F_{xx} + \beta F_{xy})$; *si* $\bar{x}$ *es el único punto estacionario y* A *tiene* l *raíces características de valor absoluto menor que 1; entonces* $\forall x_0 \in R^l$ *hay una única solución* (x_t) *al problema de la sucesión, y ella satisface a la ecuación de Euler y tiende a* $\bar{x}$.

Ha de notarse que en este caso la función de política es $g(x) = \bar{x} - B_{21}^{-1} B_{22}(x - \bar{x})$, siendo $A = B^{-1} \Lambda B$, con Λ diagonal.

Finalmente, se llega al resultado central de la aproximación cuadrática:

Teorema 4: *Sea* (X,Γ,A,F,β) *tal que satisfaga a las hipótesis hechas hasta aquí; si* $\bar{x}$ *es un punto estacionario interior y* F *es de clase* C^2 *en una vecindad* N *de* $(\bar{x},\bar{x})$; *si son regulares* F_{xy} *y* $(F_{xy}^{'} + F_{yy} + \beta F_{xx} + \beta F_{xy})$; *si* A *tiene* l *raíces características de valor absoluto menor que 1; entonces hay una vecindad* U *de* $\bar{x}$ *tal que para cualquier* x_0 *de* U, *hay una única solución* (x_t) *del problema de la sucesión y ella converge a* $\bar{x}$. (*Ver Stokey y Lucas*).

Referencias:

[1] *Boldrin M.* y *L. Montrucchio.* 1986. "On the indeterminacy of capital accumulation paths". Journal of economic theory, 40: 26-39.

[2] *Sckeinkman, J.A.* 1976. "On optional steady states of n-sector growth models when utility is discounted". Journal of economic theory, 12: 11-30.

[3] *Stokey N.L.* y *R.E. Lucas, Jr.* 1989. Recursive methods in economic dynamics. Harward University Press.

[4] *Benveniste, L.M.* y *J.A. Scheinkman.* 1974. "On the differentiability of the value function in dynamic models of economics". Econometrica, 47: 727-732.

rgarcob@pucp.edu.pe