Pro Mathematica: Vol. VIII, Nos.15-16, 1994

EN TORNO AL PROBLEMA DE BORSUK

Roberto ***Velásquez López***

Una mañana de otoño de 1974, en el descanso de la escalera de acceso al Departamento de Matemática de la PUCP, conversaba con el Dr. José Tola Pasquel sobre problemas de la enseñanza de la Geometría y él señalaba la importancia del razonamiento geométrico, afirmando que era necesario mantenerlo aún cuando la Geometría "a lo Euclides" hubiera dejado de ser tema central en la formación científica y tecnológica en general. Concluyó recomendando buscar partes de la geometría contemporánea con "muchos problemas y aplicaciones" que demandaran para su solución de las características especiales del razonamiento que se denomina geométrico. Concordé y concuerdo plenamente con el Maestro Tola, y al respecto considero que en la Geometría de los Conjuntos Convexos hay muchos problemas que admiten un planteamiento sencillo, al alcance de alumnos de Estudios Generales, y en cuya solución hay más de la inspiración y el arte de la escuela de Euclides que de la metodología algebraica de Descartes. Como un pequeño homenaje al Dr. José Tola, presento algunos temas y comentarios relacionados con el problema de Borsuk.

Profesor Principal de la Universidad Nacional de Educación, La Cantuta. Chosica.

1. En 1933, el matemático polaco K. Borsuk, presentó una memoria en la que aparece el siguiente problema:

Conjetura: *Todo conjunto acotado A de* $\mathbf{R}^n$ *admite una partición en* $n+1$ *subconjuntos, cada uno de ellos de diámetro menor que el diámetro de A.*

- Obsérvese que la cantidad $n+1$, de la partición de Borsuk, no puede ser rebajada, pues, por ejemplo, si A fuera un n-simplex regular y se le partiera en sólo n subconjuntos, al menos un subconjunto contendría dos vértices de A, y su diámetro sería igual al de A.

- En la misma memoria, Borsuk demostró que si se cubre la superficie esférica unitaria de $\mathbf{R}^n$ con n conjuntos cerrados, al menos uno de ellos contiene un par de puntos antipodales.

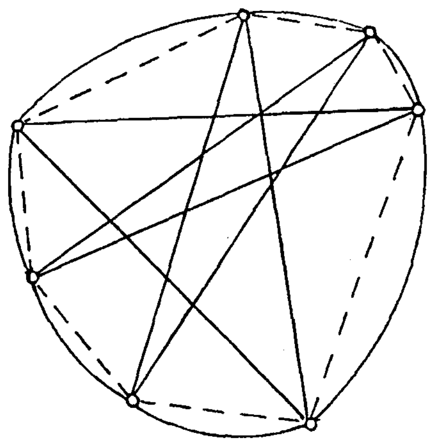
- Pasados más de sesenta años desde que fuera formulado, aún no se dispone de una solución general del problema de Borsuk, pero se conocen algunas soluciones parciales relativas al caso de conjuntos de anchura constante.

2. Una propiedad geométrica conocida afirma que si K es un conjunto convexo compacto y π es un hiperplano cerrado, existen exactamente dos hiperplanos $\pi 1$ y $\pi 2$ de apoyo de K, paralelos a π. Entonces:

i) Siendo l una recta ortogonal a π, se denomina anchura de K en la dirección l al número real $w(K,l) = d(\pi 1,\pi 2)$

ii) Se dice que K tiene anchura constante si existe $\mu > 0$ tal que para toda dirección l sea $w(K,l) = \mu$.

- En el plano, el círculo es obviamente un conjunto convexo de anchura constante, pero no es el único y es fácil obtener otros. Por ejemplo, si T es un triángulo equilátero y haciendo centro en cada vértice, con radio μ igual al lado, se traza un arco de circunferencia que une a los otros dos vértices, se genera una figura plana de ancho constante μ conocida como *triángulo de Reuleaux*. Un polígono regular cualquiera con un número impar de vértices también puede generar polígonos de Reuleaux de ancho constante. Y en $\mathbf{R}^3$, a partir del tetraedro regular, se obtienen poliedros de Realeaux.



- Se conocen muchas propiedades intrínsecas de los conjuntos de anchura constante, pero no se hallan estructuradas en un único cuerpo teórico. Una de las características de esta familia de conjuntos es que la propiedad que los define no es un invariante afín, sino métrico. Por ejemplo, si C es el círculo unitario en $\mathbf{R}^2$ y T la transformación del plano descrita por la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces C tiene anchura constante 2, mientras que $T(C)$ es una elipse que tiene anchura 4 en la dirección horizontal y anchura 2 en la vertical.

- A la pregunta genérica sobre la existencia de conjuntos de ancho constante responde la siguiente proposición:

Si C es acotado, existe un conjunto K, de ancho constante, tal que $K \supset C$ y diam. K = diam.C
Demostración: Sean diam.$C=\mu$ y $F = \{A\tau \in \mathbf{R}^n \,/\, C \subset A\tau$ y diam.$A=\mu\}$

La inclusión es una relación de orden parcial en F. La unión de una subfamilia linealmente ordenada de F está en F. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal K en F y claramente K es de ancho constante.

3. Con relación al problema de Borsuk y los conjuntos de ancho constante se tienen los siguientes resultados:

- En $\mathbf{R}^2$: Si K es un conjunto de anchura constante μ, se demuestra que es posible partir K en tres subconjuntos, cada uno de ellos con diámetro menor que μ.

- En $\mathbf{R}^3$: Todo conjunto de anchura constante μ, admite una partición en 4 conjuntos de diámetro menor que μ.

  Esta proposición fue demostrada primero por H.G. Eggleston, en 1955, de forma un tanto compleja, no suceptible de ser generalizada a dimensiones superiores. En 1957, B. Grumbaum presentó una solución más sencilla, basada en el método de la "cubierta universal", que consiste en construir un conjunto K de anchura constante μ, y que admita una partición de Borsuk con diámetro menor que μ. Para el caso del plano, el exágono regular de apotema $\mu/2$ es una cubierta universal y para $\mathbf{R}^3$, se usó como cubierta un octaedro regular convenientemente truncado. Empero, el método de la cubierta universal tampoco ha resultado útil para trabajar en espacios de dimensión mayor que 3.

- Si K es un convexo cerrado, con interior no vacío en $\mathbf{R}^n$, se dice que $x \in fr.K$ es un punto suave (de K) si K admite sólo un hiperplano de apoyo que contiene a x. En caso contrario x se denomina punto anguloso. K se dice rotundo si cada uno de sus hiperplanos de apoyo admite un único punto común con $fr.K$. K se denomina regular cuando es rotundo y suave.

- **Proposición:** *Si K es convexo, compacto, suave y con interior no vacío en $\mathbf{R}^n$, K admite una partición en $n+1$ subconjuntos de diámetro menor que diam.K*

- Los triángulos de Reuleaux no son convexos suaves, porque los vértices del triángulo generador T son puntos angulosos; pero sí son rotundos, por cuanto cada uno de sus hiperplanos de apoyo tiene un único punto común con la frontera de la figura generada.

4. Otros resultados interesantes vinculados al tema son los que citamos a continuación.

- **Proposición** (de Blaschke): *En* $\mathbf{R}^2$, *en conjunto de puntos angulosos en la frontera de un convexo cerrado K con interior no vacío es, a lo sumo, numerable.*

  Corolario: *Si* f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *es convexa, entonces f es derivable en todo punto, salvo, a lo sumo, en un conjunto numerable.*

- Si K es convexo, compacto y con interior no vacío se denomina circunesfera de K a una bola $B^*(K)$ tal que:
  i) $B^*(K) \supset K$ y su radio es minimal

  Llamaremos inesfera de K a una bola $B^*(K)$ tal que:
  ii) $B^*(K) \subset K$ y su radio es el mayor posible.

- Se demuestra que si K es convexo, compacto y con interior no vacío, la circunesfera $B^*(K)$ es única. Empero esto no sucede para el caso de la inesfera, pues, por ejemplo, un cuadrado en el plano admite distintas inesferas.

- Hallar el ancho mínimo, el diámetro y los radios de la inesfera y circunesfera de: (a) un cubo; (b) un tetraedro regular; (c) el cuerpo generado por un triángulo de Reuleaux al rotar en torno a uno de sus ejes de simetría.

- En 1901, H.W.E. Jung, demostró que todo conjunto de diámetro D está contenido en una esfera de radio $D\sqrt{(3/8)}$. Ese resultado se generaliza en la forma siguiente.

  Proposición: Sea K de anchura constante en $\mathbf{R}^n$ y tal que su diámetro diam.K=μ. Entonces:

  i) La inesfera es única y concétrica con la circunesfera.
  ii) radio $B^*(K)$ + radio $B^*(\text{k})=\mu$.
  iii) radio $B^*(K) \leq \mu.\sqrt{[n/2(n+1)]}$.

  La parte iii) vale aún cuando K no sea de anchura constante.

5. Sea F una familia de conjuntos acotados y cerrados en $\mathbf{R}^n$.
A partir de los conceptos de distancia d^* de un punto x a un conjunto A, $d^*(A,x) = \inf\{d(x,y)\ /\ y \in A\}$, y de entorno de A de radio $r \geq 0$, $N(A,r) = \{x \in R^n\ /d^*(A,x) \leq r\}$, se procede a definir una distancia D entre los miembros de F en la forma siguiente:

Si A y B pertenecen a la familia F, se denomina distancia D entre estos dos conjuntos al número real

$$D(A,B) = \inf\{r \geq 0 / A \subset N(B,r); \quad B \subset N(A,r)\}$$

- Por ser A y B acotados, existe una esfera de radio r que contiene a ambos conjuntos. Entonces

  $$A \subset N(B,2r) \text{ y } B \subset N(A,2r);$$

  en consecuencia la definición de distancia es consistente y

  $$0 \leq D(A,B) \leq 2r.$$

- **Proposición:** *La familia F, con la distancia D, constituye un espacio métrico completo.*

  Demostración: • $A = B \Leftrightarrow D(A,B) = 0$

  • $D(A,B) = D(B,A)$

  • Si $D(A,C) = r$ y $D(C,B) = p$ se tiene

  $A \subset N(C,r)$, $C \subset N(A,r)$, $C \subset N(B,p)$ y $B \subset N(C,p)$,

  resulta $A \subset N(C,r) \subset N(B,r+p)$.

  Similarmente se prueba que $B \subset N(C,p) \subset N(A,r+p)$ y se tiene $D(A,B) \leq r+p$; es decir $D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$.

  • Comprobando que la familia F, con la distnacia D, constituye un espacio métrico; resta aplicar las nociones de sucesión de Cauchy y de límite de una sucesión al caso en que en lugar de puntos tenemos compactos en $\mathbf{R}^n$.

  Sea $\{C_1\}$ una sucesión de conjuntos de F, $B_m = cl(U\, C_1)$, $I = m,...,\infty$. Cada B_m es compacto y la sucesión $\{B_m\}$ es decreciente, luego, por la propiedad de encajes, C es compacto y no vacío. Para todo $\delta > 0$ existe $k(\delta)$ natural tal que si $m > k(\delta)$ entonces B_m $N(C,\delta)$, pues en caso contrario la inter- sección de B_m con la frontera de $N(C,\delta)$ sería no vacía para infinitos m, de donde resultaría $C \cap fr.N(C,\delta)$ no vacía, obvia contradicción. Por tanto, para todo $m > k(\delta)$ vale C_m $N(C,\delta)$. De otro lado, para todo $\delta > 0$ existe $j(\delta)$ natural tal que si $m > j(\delta)$, $p > j(\delta)$, se tiene $D(C_m,C_p) < \delta$. Resulta así

  $$C \subset B_m = U\, C_1 \subset N(C_m,\delta).$$

  Sea ahora $q(\delta) = \max.\{k(\delta), j(\delta)\}$, para todo $\delta > 0$. Entonces, si $m > q(\delta)$ resulta $D(C_m,C) < \delta$, es decir, $C = \lim C_m$.

- Si los C_i de la sucesión $\{C_i\}$ son convexos, se prueba que $C=\lim C_i$ es también convexo.

- **Proposición:** *El espacio (F,D) tiene la propiedad de Borel-Lebesgue; es decir, todo subconjunto acotado y cerrado de F es compacto.*

  Demostración: Sea S una subfamilia infinita y acotada de F en la métrica D. Existirá entonces un n-cubo Q de arista de longitud l tal que para todo $C\in S$ se tiene CQ. Denotamos con Q_k a la k-ésima subdivisión regular de Q en n-cubos iguales, cada uno de ellos de arista de longitud $1/2^k$. Entonces, si $C\in S$, la k-ésima cubierta regular mínima de C será la unión P de algunos cubos de Q_k de manera que PC y además C intersecten a todos los cubos de P. Observemos que para todo k la cantidad de n-cubos en Q_k es finita, y por tanto la cantidad de posibles cubiertas minimales distintas también será finita. Como es infinita, habrá una subfamilia infinta de S, $\{C_{11},C_{12},C_{13},\ldots,C_{11},\ldots\}$ tal que todos sus elementos tienen igual la primera cubierta regular minimal. Repitiendo el razonamiento existirá una sucesión $\{C_{21},C_{22},C_{23},\ldots,C_{21},\ldots\}$ tal que todos sus elementos admiten la misma segunda cubierta minimal. En general, si $k\in N$ (números naturales), la sucesión $\{C_{ki}\ /\ i\in N\}$ será una sub- sucesión infinita de $\{C_{(k-1)1}\ /\ i\in N\}$ tal que todos sus elementos tienen la misma k-ésima cuabierta regular minimal. Consideremos ahora la sucesión es de Cauchy y, conforme a la proposición anterior, es convergente.

- **Teorema de Blaschke:** *Si F es una familia infinita y uniformemente acotada de conjuntos convexos compactos en* $\mathbf{R}^n$., *existe una sucesión infinita contenida en F que converge en la métrica D a un convexo compacto.*

- Supongamos que se desea demostrar que todos los conjuntos de una familia F gozan de una determinada propiedad X, pero la demostración directa es difícil. Un procedimiento usual consiste en demostrar la propiedad para una subfamilia G "densa en F" y luego extender "por continuidad" el resultado a la familia F. Es el caso de los politopos en la familia K_n del teorema de Blaschke.

- Se denomina politopo a la cápsula convexa de un conjunto finito.

  Proposición: *Si $K\in K_n$ y $\delta > 0$, existe un politopo P tal que*

$$P \subset K \subset N(P;\delta).$$

Demostración: Consideremos la familia $\{N(x;\delta)$ / $x \in K\}$ que es un cubrimiento por abiertos de K. Por compaccidad existirá un conjunto finito tal que $M=\{x_1;x_2;...;x_k\}$ K tal que K $N(x_i;\delta)$.

Sea entonces P = conv$M$ (la cápsula convexa de M) y todo está demostrado.

Corolario: *Si $K \in K_n$, existe una sucesión $\{P_i$ / $i \in N\}$ de politopos contenidos en K, tal que* $\lim P_i = K$.

Corolario: *La familia de los politopos en* $\mathbf{R}^n$ *en densa en* K_n.