Pro Mathematica: Vol. VIII, Nos 15-16, 1994

ESPACIOS *SEMI* $T_{1/2}$

Miguel ***Caldas Cueva***

Sumario

En este trabajo investigamos el axioma de separación en espacios semi $T_{1/2}$ y estudiamos algunas de sus propiedades básicas. Además de esto, analizamos las relaciones entre este axioma de separación con los bien conocidos axiomas para los espacios semi T_2, semi T_1 y semi T_0.

1. Introducción

Después de los trabajos de N. Levine [6] sobre conjuntos semi-abiertos, varios matemáticos giraron su atención hacia la generalización de varios conceptos topológicos, considerando conjuntos semi-abiertos en lugar de abiertos. En este camino, P. Bhattacharyya y B. K. Lahiri [1] definieron el concepto de conjuntos semi-cerrados generalizados de un espacio topológico (sg-cerrado), ayudándose del concepto de conjunto semi-abierto. Debe hacerse notar, que los conjuntos semi-cerrados generalizados no tienen conexión con los conjuntos cerrados generalizados considerados en [7], aunque ambos generalizan el concepto de conjunto cerrado. Son, entonces,

✉ *Universidade Federal Fluminense. Departamento de Matemática Aplicada - IMUFF Rua São Paulo s/n. 24020-005 - Niterói, RJ - Brasil.*

de algún interés los espacios semi $T_{1/2}$, en los cuales, los conjuntos semi-cerrados y los conjuntos sg-cerrados coinciden. En el presente trabajo, continuamos el estudio de tales espacios, investigando su comportamiento respecto a subespacios, transformaciones y productos. Definimos los espacios semi-simétricos, y se muestra que en tales espacios, semi T_0, semi $T_{1/2}$, y semi T_1 son equivalentes. Para probar esto necesitamos el siguiente material.

Definición 1.1 - *Si* (X,τ) *es un espacio topológico y* $A \subset X$, *entonces* A *es llamado semi-abierto* [6] *si, existe* $O \in \tau$ *tal que* $O \subset A \subset Cl(O)$. *La familia de todos los conjuntos semi-abiertos se denotará por* $SO(X,\tau)$.

Definición 1.2 - *Si* (X,τ) *es un espacio topológico y* $A,B \subset X$, *entonces* A *es semi-cerrado* [2] *si, su complemento* A^c (o $X - A$) *es semi-abierto y la semi-clausura de* B, *denotada por* $sCl(B)$, *es la intersección de todos los conjuntos semi-cerrados que contienen a* B.

Nota 1.1 - Un conjunto B es semi-cerrado si y solo si $sCl(B) = B$.

Definición 1.3 - *Una aplicación* $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ *es irresoluble* [5] *si, para todo conjunto semi-abierto* A, $f^{-1}(A)$ *es también semi-abierto.*

Definición 1.4 - *Un subconjunto* A *de un espacio topológico* (X,τ) *es llamado cerrado generalizado (g-cerrado)* [7], *si* $Cl(A) \subset O$ *cumple siempre que* $A \subset O$ *y* $O \in \tau$. *Un subconjunto* B *de* (X,τ) *es llamado g-abierto de* (X,τ) *si,* B^c *es g-cerrado en* (X,τ).

Definición 1.5 - *Un espacio topológico* (X,τ) *es semi* T_0 *(resp. semi* T_1*)*[8] *si, para todo* $x,y \in X$ *tal que* $x \neq y$ existe un conjunto semi-abierto que contiene a *x pero no a y o (resp., y) un conjunto semi-abierto que contiene a y pero no a x.*

Definición 1.6 - *Un espacio topológico* (X,τ) *es semi* T_2 [8] *si, para todo* $x,y \in X$ *tal que* $x \neq y$ *existen conjuntos* O_1 y O_2 *semi-abiertos tal que* $x \in O_1$, $y \in O_2$ *y* $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Se cumple la siguiente implicación:

$$\begin{array}{ccc} T_2 & \to & \textit{semi } T_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1 & \to & \textit{semi } T_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_0 & \to & \textit{semi } T_0 \end{array}$$

2 Espacios Semi $T_{1/2}$

Definición 2.1 - *Un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ) es llamado semi-cerrado generalizado (sg-cerrado)* [1] *si, $sCl(A) \subset O$ siempre que $A \subset O$ y O es semi-abierto. Un subconjunto B de (X,τ) es llamado sg-abierto de (X,τ) si, B^c es sg-cerrado en (X,τ).Todo conjunto semi-cerrado es sg-cerrado pero lo inverso no es cierto* ([1]).

Definición 2.2 - *Un espacio topológico (X,τ) es llamado semi $T_{1/2}$* [1], *si todo conjunto sg-cerrado en (X,τ) es semi-cerrado en (X,τ).*

Teorema 2.1 - [1]. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico. Entonces,*

(i) *Todo espacio semi* $T_{1/2}$ - *es semi* T_0.

(ii) *Todo espacio* T_1 *es semi* $T_{1/2}$.

Dem.: Si (X,τ) es un espacio semi $T_{1/2}$ que no es semi T_0 entonces existen x,y, $x \neq y$, tales que $sCl(\{x\}) = sCl(\{y\})$ [8]. Sea $A = sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c$. Se mostrará que A es sg-cerrado pero no semi-cerrado. Sea O un conjunto semi-abierto cualquiera que contiene a x. Como $x \in sCl(\{y\})$, $\{y\} \cap O \neq \emptyset$, i.e. $y \in O$. Ahora $sCl(\{y\}) \cap O \supset \{y\}$ y, sucesivamente, esto muestra que $sCl(\{x\}) \cap O \supset \{y\}$, $sCl(\{x\}) \cap O \cap \{x\}^c \supset \{y\} \cap \{x\}^c$, $sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c \cap O \supset \{y\}$, $A \cap O \supset \{y\} \neq \emptyset$. Esto implica que $x \in sCl(A)$. Pero $x \notin A$. Por lo tanto, $x \in sD(A)$ (= conjunto de todos los puntos semi-límite de A). Luego, $sD(A) \not\subset A$ y entonces A no es semi-cerrado [4].

Supongamos ahora que $A \subset G$ donde $G \in SO(X,\tau)$. Para mostrar que $sCl(A) \subset G$, es suficiente probar que $sCl(\{x\}) \subset G$. Pero $sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c = A \subset G$ y $sD(\{x\}) \subset \{x\}^c$. Entonces $sD(\{x\}) \subset G$ y así sólo es necesario mostrar que $x \in G$. Si es posible, sea $x \in G^c$. Luego $y \in sCl(\{x\}) \subset G^c$. De aquí $y \in sCl(\{x\}) \cap \{x\}^c = A \subset G$. Así $y \in G \cap G^c$, lo cual es una contradicción. Por ende, $sCl(A) \subset G$, así que A es sg-cerrado. Por eso (X,τ) no es semi $T_{1/2}$. (ii). Sea (X,τ) semi T_1. Es suficiente mostrar que un conjunto que no es semi-cerrado tampoco es sg-cerrado. Con este fin, supongamos que $A \subset X$ y A no sea semi-cerrado. Sea $x \in sCl(A)$-A. Entonces $\{x\} \subset sCl(A) - A$. Como X es semi T_1, $\{x\}$ es un conjunto semi-cerrado [4]. Por ([1] Teorema 1), A no es sg-cerrado. Esto prueba (*ii*) y por lo tanto el Teorema. ❑

Ejemplo 2.1 - Sea $X = \{a,b\}$ y $\tau = \{\varnothing,\{a\},X\}$. Entonces (X,τ) es un espacio semi $T_{1/2}$ pero no semi T_1 (el lector puede construir ejemplos para el otro caso).

Teorema 2.2 - *(X,τ) es semi $T_{1/2}$ s.s.s. $\forall\, x \in X$, $\{x\}$ es semi-abierto o bien es semi-cerrado.*

Dem.Necesidad: Supongamos que X es semi $T_{1/2}$ y que exista $x \in X$, tal que $\{x\}$ no es semi-cerrado. Como X es el único semi-abierto de $\{x\}^c$, $\{x\}^c$ es sg-cerrado y así semi-cerrado. Luego $\{x\}$ es semi abierto.

Suficiencia: Sea $A \subset X$ sg-cerrado con $x \in sCl(A)$. Si $\{x\}$ es semi-abierto, $\{x\} \cap A \neq \varnothing$. Caso contrario $\{x\}$ es semi-cerrado y $\varnothing \neq sCl(\{x\}) \cap A = \{x\} \cap A$ por ([1], Teorema 1). En cualquiera de los casos $x \in A$ y entonces A es semi-cerrado (Nota 1.1). ❑

Corolario 2.1 - *X es semi $T_{1/2}$ s.s.s. cada subconjunto de X es la intersección de todos los conjuntos semi-abiertos y todos los conjuntos semi-cerrados que lo contienen.*

Dem. Necesidad: Sea X semi $T_{1/2}$ con $B \subset X$ cualquiera. Entonces, por el Teorema 2.2, $B = \cap\{\{x\}^c;\ x \notin B\}$es una intersección de semi-abiertos y semi-cerrados. El resultado sigue de esto.

Suficiencia: Para cada $x \in X$, $\{x\}^c$ es la intersección de todos los conjuntos semi-abiertos y todos los conjuntos semi-cerrados que lo contienen. Así $\{x\}^c$ es ya sea semi-abierto o semi-cerrado, y X es semi $T_{1/2}$. ❑

Teorema 2.3 - *La propiedad de ser un espacio semi $T_{1/2}$ es hereditaria, i.e. todo subespacio de un espacio semi $T_{1/2}$ es también semi $T_{1/2}$.*

Dem. Sea Y un subespacio de un espacio semi $T_{1/2}$ X. Sea $y \in Y \subset X$. Entonces $\{y\} \in SO(X,\tau)$ o $\{y\} \in SC(X,\tau)$ (= familia de todos los conjuntos semi-cerrados del espacio topológico (X,τ)). Luego, por ([6] Teorema 6} $\{y\}$ es ya sea semi-abierto en Y o semi-cerrado en Y. Por el Teorema 2.2, Y es semi $T_{1/2}$. ❑

Definición 2.3 - *Sea* (X,τ) y (Y,σ) *espacios topológicos; una aplicación f: $(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es llamada pre-semi-abierta (resp. pre-semi-cerrada)* [5] *si, para todo $A \in SO(X,\tau)$ (resp. $A \in SC(X,\tau)$) $f(A) \in SO(X,\tau)$(resp. $f(A) \in SC(Y,\sigma)$).*

Teorema 2.4 - *Si (X,τ) es semi $T_{1/2}$ y f: $(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es irresoluble, pre-semi-cerrada y sobre, entonces (Y,σ) es semi $T_{1/2}$.*

Dem: Sea $B \subset Y$ sg-cerrado. Mostraremos que $f^{1}(B)$ es sg-cerrado en (X,τ). Sea $f^{1}(B) \subset O$ donde O es semi-abierto en (X,τ).

Ahora:

$$\begin{aligned} f\,[sCl(f^{1}(\mathrm{B})) \cap O^{c}] &\subset f\,(sCl(f^{-1}(B))) \cap f\,(O^{c}) \\ &\subset f\,(sCl(f^{-1}(B))) \cap B^{c} \\ &\subset sCl(ff^{-1}(B)) \cap B^{c} \\ &\subset sCl(B) - B \end{aligned}$$

y por ([1], Teorema 1), $f[sCl(f^{-1}(B)) \cap O^{c}] = \varnothing$, así $sCl(f^{-1}(B)) \cap O^{c} = \varnothing$. Entonces $sCl(f^{-1}(B)) \subset O$. Por tanto $f^{-1}(B)$ es sg-cerrado en (X,τ) provando nuestra afirmación. Luego $f^{-1}(B)$ es semi-cerrado puesto que (X,τ) es semi $T_{1/2}$. Entonces $B = f(f^{-1}(B))$ es semi-cerrado en (Y,σ), y (Y,σ) es semi $T_{1/2}$. ❑

Definición 2.4 - *Una biyección f: $(X,\tau) \to Y,\sigma)$ es semi-homeomorfismo* [5] *si, f es irresoluble y pre-semi-abierta. Decimos que los espacios (X,τ) y (Y,σ) son semi-homeomórficos si existe un semi-homeomorfismo de (X,τ) sobre (Y,σ).*

Todo homeomorfismo es semi-homeomorfismo pero la recíproca no es verdadera.

Ejemplo 2.2 - Sea $X = \{a,b,c\}$ y consideremos las topologías $\sigma = \{\varnothing,\{a\}, ,\{a,b\},X\}$ y $\tau = \{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$. Sea f: $(X,\tau\} \to (Y,\sigma\}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$. Entonces f es un semi-homeomorfismo, pero f no es un homeomorfismo.

Corolario 2.2 - *La imagen semi-homeomórfica de un espacio $T_{1/2}$ es semi-$T_{1/2}$.*

Dem.: Como f: $(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es biyectiva, las condiciones "f pre-semi-abierta y f pre-semi-cerrada son de hecho equivalentes". Por tanto, la prueba sigue del Teorema 2.4. ❑

Teorema 2.5 - Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X=\Pi\{X_i;i\in I\}$ dotado de la Topología producto. Entonces si X es semi-$T_{1/2}$, X_i es semi-$T_{1/2}$ para todo $i \in I$.

Dem.: Es suficiente observar que X contiene un subespacio homeomórfico a X_i y aplicar el Teorema 2.3 y el Corolario 2.2. ❑

Lema 2.1 - *Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \Pi\{X_i;i\in I\}$ dotado de la Topología producto y sea I infinito. Entonces X es semi-$T_{1/2}$* s.s.s. *X es semi-T_1.*

Dem.: La suficiencia es el Teorema 2.1. Probemos la necesidad. Sea $x \in X$, y notemos que $\{x\}$ no es semi-abierto en la topología producto por ([6], Teorema 1) y dado que hay infinitos factores no unitarios en X. Por el Teorem 2.2, $\{x\}$ es semi-cerrado y X es semi T_1 ([8], Teorema 4.2). ❑

Teorema 2.6 - *Sea* $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos y* $X=\Pi\{X_i;i\in I\}$ *dotado de la topología producto, donde* I *es infinito. Entonces* X *es semi-*$T_{1/2}$ *, si* X_i *es semi* T_1 *para todo* $i \in I$.
Dem.: Es suficiente aplicar el Lema 2.1 y el hecho de que un espacio producto es semi T_1 , si cada factor es semi T_1. ❑

Teorema 2.7 - *Si* (X,τ) *es semi* $T_{1/2}$ y $SO(X,\tau) \subset SO(X,\sigma)$, *entonces* (X,σ) *es semi* $T_{1/2}$.
Dem.:. Para $x\in X$, $\{x\}\in SO(X,\tau)\subset SO(X,\sigma)$ o bien $\{x\}^c\in SO(X,\tau)\subset SO(X,\sigma)$ ❑

3 Espacios Semi-Simétricos

Definición 3.1 - *Un espacio topológico* (X,τ) *será llamado semi-simétrico, si para* x *e* y *en* X, $x \in sCl(\{y\})$ *implica que* $y \in sCl(\{x\})$.

Teorema 3.1 - *Un espacio topológico* (X,τ) *es semi-simétrico s.s.s.* $\{x\}$ *es sg-cerrado para cada* x *en* X.
Dem. Suficiencia: Supongamos $x \in sCl(\{y\})$, pero $y \notin sCl(\{x\})$,. Entonces $\{y\} \subset [sCl(\{x\})]^c$ y así $sCl(\{y\}) \subset [sCl(\{x\})]^c$. Entonces $x \in [sCl(\{x\})]^c$, lo que es una contradicción.
Necesidad: Supongamos $\{x\} \subset O \in SO(X,\tau)$, pero $sCl(\{x\}) \not\subset O$. Entonces $sCl(\{x\})\cap O^c \neq \emptyset$; consideremos $y\in sCl(\{x\})\cap O^c$. Por tanto, $x\in sCl(\{y\})\subset O^c$ y $x \notin O$, lo que es una contradicción. ❑

Corolario 3.1 - *Si* (X,τ) *es un espacio semi* T_1, *entonces* (X,τ) *es semi-simétrico.*
Dem.: En un espacio semi T_1, los conjuntos unitarios son semi-cerrados ([8], Teorema 4.1) y por tanto es sg-cerrados. Por el Teorema 3.1, el espacio es semi-simétrico. ❑

Corolario 3.2 - *Un espacio topológico* (X,τ) *es semi-smétrico y semi* T_0 *sii* (X,τ) *es semi* T_1.
Dem.:.Por el Corolario 3.1 y el Teorema 2.1 es suficiente probar solamente la necesidad. Sea, entonces $x \neq y$ y por semi T_0, podemos asumir que $x\in O\subset\{y\}^c$ para algún $O \in SO(X,\tau)$. Entonces $x \notin sCl(\{y\})$ y de aquí

$y \notin sCl(\{x\})$. Existe un $O_1 \in SO(X,\tau)$ tal que $y \in O_1 \subset \{x\}^c$ y (X,τ) es un espacio semi T_1. ❑

Teorema 3.2 - *Sea (X,τ) un espacio semi-simétrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (X,τ) *es semi* T_0.
(ii) (X,τ) *es semi* $T_{1/2}$.
(iii) (X,τ) *es semi* T_1.

Dem:. (i) $\leftrightarrow$ (iii) : Corolario 3.2
(iii) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (i) : Teorema 2.1 ❑

Referencias

[1] P. Bhattacharyya and B. K. Lahiri, "Semi-generalized closed sets in Topology", Ind. Jr. Math., 29 (1987), 375-382.

[2] N. Biswas, *"On characterization of semi-continuous function"*, Ati. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 48 (1970), 399-402.

[3] M. Caldas, *"On g-closed sets and g-continuous mappings"*, Kyungpook Math. Jr., 33 (1993), 79-83.

[4] P. Das, *"Note on some applications of semi-open sets"*, Progr. Math. (Allahabab), 7 (1973), 33-44.

[5] S.G. Crossley and S. K Hildebrand, *"Semi-topological properties"*, Fund. Math., 74 (1974), 233-254.

[6] N. Levine, *"Semi-open sets and semi-continuity in Topological space"*, Amer. Math. Monthly. 70 (1963), 36-41.

[7] N. Levine, *"Generalised closed sets in topology"*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 19 (1970), 89-96.

[8] S. N. Maherwari and R. Prassad, *"Some new sparation axioms"*, Ann. Soc. Sc. Bruxelles. 89 (1975), 395-402.

gmamccs@vmhpo.uff.br