Pro Mathematica: Vol. VIII, Nos.15-16, 1994

CONJETURA DE BERGER ARTINIANA

En homenaje al Dr. José Tola Pasquel

Guillermo H. **Cortiñas**

Lo que sigue es un resumen de los principales resultados del trabajo [CGW], realizado conjuntamente con S. Geller y C. Weibel. En ese trabajo, se introduce y se estudia una conjetura, que llamamos Conjetura de Berger Artiniana (o CBA), sobre el módulo de diferenciales de Kähler $\Omega_{A/k}$ *de un álgebra conmutativa* A *de dimensión finita sobre un cuerpo perfecto* k. *Cuando car* $k = 0$, *la conjetura dice lo siguiente: Si* A *es una subálgebra de un álgebra de ideales principales* B, *y* $\Omega_{A/k}$ *se inyecta en* $\Omega_{B/k}$, *entonces* A *es un álgebra de ideales principales. Aquí un* ***álgebra de ideales principales (AIP)*** *es un álgebra conmutativa, de dimensión finita sobre* k, *y tal que todo ideal es principal, i.e. de la forma* $< x >$ *para algún* x. *Para enunciar la conjetura cuando car* $k = 0$, *reemplazamos "álgebra de ideales principales" por "álgebra mansa de ideales principales"; por supuesto, daremos una definición de "mansa" y re-enunciaremos la conjetura más adelante.*

Universidad Nacional de Buenos Aires.

Como su nombre lo indica, la CBA es una versión artiniana de la conjetura formulada por R. Berger hace más de treinta años atrás ([B]). La conjetura de Berger (o CB) se refiere al anillo R de funciones de una curva reducida sobre un cuerpo perfecto k, y dice que $\Omega_{R/k}$ es libre de torsión si y sólo si R es regular (una dirección es clásica: si R es regular entonces $\Omega_{R/k}$ es libre de torsión, ya que es proyectivo [W,9.3.14]).

Teorema Principal *(CBA $\Rightarrow$ CB) Si* $car(k) = 0$, *la Conjetura de Berger Artiniana implica la Conjetura de Berger.*

Para ver la conexión entre ambas conjeturas, sea R el anillo de funciones de una curva singular sobre k con clausura íntegra S y anillo de funciones total F. Dado que $\Omega_{S/k}$ es libre de torsión, éste se inyecta en $\Omega_{F/k} = F \otimes \Omega_{R/k}$. Por tanto la torsión de $\Omega_{R/k}$ es el núcleo de $\Omega_{R/k} \to \Omega_{S/k}$. Es posible encontrar un ideal no nulo $I \subset S$ contenido en R tal que $B = S / I$ es de ideales principales pero $A = R / I$ no lo es. La aplicación $\Omega_{R/k} \to \Omega_{A/k}$ manda la torsión de $\Omega_{R/k}$ al núcleo τ de $\Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}$, donde podemos esperar detectarlo.

Se sabe que la CB es cierta en los siguientes casos:
Cuando R es intersección completa ([B]), cuando es graduada ([S]), cuando sus singularidades son analíticamente resolubles [Ba], cuando tiene multiplicidad $e \leq 9$ ([U], [Gu], [I]) o tiene desviación ≤ 3 ([U], [HW]).

Se refiere al lector al trabajo expositorio de Herzog [H] para más detalles. En nuestro trabajo [CGW], usamos la *CBA* para probar que la *CB* vale en los siguientes casos:

1) La *CB* vale para curvas seminormales (en toda característica). Éste es un hecho conocido -aunque inédito- y puede también demostrarse usando deformación analítica para reducir al caso graduado.

2) Anillos locales (R, M) de dimensión 1 tales que $M^3 S \subset R$, donde S es la normalización de R y $car(k) = 0$. Éste es un nuevo caso de la Conjetura de Berger.

3) Singularidades (R,M) de una sola rama con multiplicidad $e < \binom{m}{2}$, donde $m = \dim(M / M^2)$ y $car(k) = 0$. Este resultado se debe a Güttes ([Gu], [I]).

La noción de "*álgebra mansa*" se introduce a fin de evitar la patología que en característica p tienen algunas ("salvajes") extensiones de k, como $k[s]/ < s^P >$, que puede contener subanillos A tales que $\Omega_{A/k} \subset \Omega_{B/k}$

Ejemplo: $A = k[x,y]/ < x^3, xy, y^2 >$ es isomorfa al subanillo

$$k[s^2, s^3] \text{ de } B = k[s]/ < s^5 >, \text{con } x = s^2 \text{ y } y = s^3.$$

Si $car(k) = 5$, entonces $\Omega_{A/k}$ se inyecta en $\Omega_{B/k}$; sin embargo A no es una *AIP*.

Ahora daremos nuestra definición formal de lo que es un álgebra mansa. Dado que k es perfecto, toda *AIP* B es producto de finitos anillos polinomiales truncados $B_i = K_i[s]/ < s^{n_i} >$ sobre cuerpos de extensión finita K_i de k. Esta clasificación se sigue de un famoso teorema de Wedderburn ([Wdb]).

Definición: *Un álgebra de polinomios truncados* $B = K[s] / s^m$ *es mansa si* K *es una extensión finita de* k *y o bien* $car(k) = 0$ *o bien* $car(k) = p > 0$ *y* p *no divide a* m. *Decimos que un álgebra de ideales principales* B *es mansa si es producto de álgebras polinomiales truncadas mansas.*

Aunque hablar del submódulo de torsión $\tau(R) \subset \Omega_{R/k}$ sólo tiene sentido cuando R es reducido, podemos formular un análogo artiniano $\tau(A)$. Nuestra definición se fundamenta en la observación de que para curvas, $\tau(R)$ es el núcleo de $\Omega_{R/k} \to \Omega_{S/k}$. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de submódulos de $\Omega_{A/k}$ que se realizan como el núcleo de la aplicación $f_*: \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}$ inducida por un morfismo de álgebras $f: A \to B$ con valores en una *AIP* mansa B. Dado que si B y B' son mansas, $B \text{x} B'$

también lo es, y $\Omega_{BxB'} = \Omega_B \times \Omega_{B'}$, se deduce que F es cerrada bajo intersecciones. Por otro lado, dado que los cuerpos residuales de A son mansos, $\Omega_{A/k} \in F$. En fin, dado que $\tau(A)$ es un módulo artiniano, F tiene un único elemento minimal, $\tau(A)$. Tiene por tanto sentido hacer la siguiente definición:

Definición: *Sea* $\tau(A)$ *el único elemento minimal de* F. $\tau(A)$ *está incluído en el núcleo de todo morfismo* $f: \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}$ *inducido por un morfismo de álgebras* $f: A \to B$ *en el cual* B *es mansa, y es igual a* $Ker\, f_*$ *para algún* f. *El submódulo* $\tau(A)$ *es natural en* A*; todo morfismo* $A \to A'$ *induce una aplicación* $\tau(A) \to \tau(A')$.

Conjetura de Berger Artiniana: *Sea* A *un álgebra conmutativa de dimensión finita sobre un cuerpo perfecto* k. *Entonces:*

$$\tau(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ es un álgebra de ideales principales mansa.}$$

Si A es un A.I.P. mansa, es claro que $\tau(A) = 0$.
Se comprueba que si en cambio A es un AIP salvaje (no mansa) entonces $\tau(A) \neq 0$. ([CGW,2.2]). Por tanto la CBA es equivalente a la afirmación de que si existe una aplicación de A en un álgebra de ideales principales mansa tal que Ω_A se inyecta en Ω_B, entonces A es ideales principales. Esta formulación implica claramente la versión de la CBA como fuera enunciada al comienzo de la presente nota. Se prueba en [CGW, 2.4] que son equivalentes.

Agradecimientos:

Los últimos detalles del trabajo [CGW] fueron obtenidos durante la estadía del autor en el Perú, bajo el auspicio conjunto de la Pontificia Universidad Católica del Perú, la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y la Sociedad Matemática Brasileña, a quienes estoy muy agradecido por su auspicio y hopitalidad. Gracias en especial al Dr. César Carranza, quien me facilitó, entre muchas otras cosas, libre acceso al correo electrónico, sin el cual la finalización de este trabajo no hubiera sido posible. En efecto, el acceso al correo electrónico es privilegio de pocos en el Perú de hoy en día. Hago votos para que esta anómala situación se modifique en el futuro cercano.

Bibliografía:

[Ba] R. Bassein. On smoothable curve singularities: local methods. Math. Ann **230** (1977), 273-277.

[B] R. Berger. Differential moduln eindimensionaler lokaler Rnige. Math. Zeit. **81**(1963),, 326-354.

[CGW] G. Cortiñas, S. Geller, C. Weibel. Artinian Berger Conjecture.

[Gu] K. Gütter. Zum Torsionproblem bei Kurvensungularitäten. Arch.Math **54**(1990)499-510

[H] J. Herzog. The module of differentials. Lecture notes, Workshop on Commutative Algebra and its relation to Combinatories and Computer Algebra, 16-27 de Marzo, 1994. Trieste, Italia.

[HW] J. Herzog - R. Waldi. Differentials of linked curve singularities, Arch. Math **42** (1984) 335-343.

[I] S. Isogawa. On Berger's conjecture about one dimensional local rings. Arch. Math **57** (1991) 432-437.

[S] G. Scheja. Differentialmoduler lokaler analytischer Algebren. Schirftenreike Math. Inst. Univ. Fribourg, Univ. Fribourg, Suiza 1970.

[U] B. Ulrich. Torsion des Differentialmoduls von Kurvensingularitäten. Arch. Math.**36** (1981) 510-523.

[W] C. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge studies in Adv. Math. **38**, Cambridge Univ. Press 1994.

[Wdb] J.H.M. Wedderburn. On Hypercomplex numbers. Proc. London Math. Soc. (2) **6** (1905) 77-121.

gcorti@mate.dm.uba.ar