Pro Mathematica Vol. VIII, Nos.15-16, 1994

GENERALIZACIÓN DE UN TEOREMA DE P. PAINLEVÉ

*César **Camacho** y B. **Scárdua***

Dedicado a José Tola Pasquel con ocasión de sus 80 años

En 1985 en sus "Leçons de Stockholm" [1] el matemático francés Paul Painlevé estudió, desde un punto de vista global, las ecuaciones diferenciales complejas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad (x,y) \in \mathbf{C}^2 \qquad (1)$$

donde $P(x,y), Q(x,y)$ son polinomios con coeficientes complejos.

Estas ecuaciones diferenciales pueden ser naturalmente extendidas al ambiente compacto $\overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$ (producto de dos esferas de Riemann) por medio de las compactificaciones de $x \in \mathbf{C}, y \in \mathbf{C}$ con las "coordenadas en el infinito" $u = \frac{1}{x}$ y $t = \frac{1}{y}$. De esta manera la ecuación diferencial (1) se prolonga a cada

✉ *Profesores del IMPA,, Río de Janeiro, Brasil.*

una de las cartas coordenadas de $\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$: $(x,y),(x,t),(u,y),(u,t)$. Por ejemplo en la carta (x,t) de $\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$ tenemos

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{y^2}.\frac{dy}{dx}=-t^2.\frac{P(x,1/t)}{Q(x,1/t)}=\frac{\tilde{P}(x,t)}{\tilde{Q}(x,t)} \tag{2}$$

donde $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ son polinomios relativamente primos. Similarmente en las cartas (u,y) y (u,t).

El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias permite afirmar que para cualquier punto $(x_0,y_0) \in \mathbf{C}^2$ donde $Q(x_0,y_0) \neq 0$, existe una función analítica $y = y(x)$ definida en una vecindad $x_0 \in V \subset \mathbf{C}$ y tal que $\frac{dy(x)}{dx}=\frac{P(x,y(x))}{Q(x,y(x))}$ para todo $x \in V$. La función $y(x)$ es llamada solución local de (1) y es única en V. Cuando $Q(x_0,y_0) = 0$ pero $P(x_0,y_0) \neq 0$ existe una única solución local de (1) parametrizada por $x = x(y)$ con $x(y_0) = x_0$ y tal que $\frac{dx(y)}{dy}=\frac{Q(x(y),y)}{P(x(y),y)}$ para $y\in\mathbf{C}$ suficientemente próximo de $y_0 \in\mathbf{C}$.

Si $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$ decimos que $(x_0,y_0) \in \mathbf{C}^2$ es un *punto singular.* En este caso la solución de (1) que pasa por $(x_0,y_0) \in \mathbf{C}^2$ se reduce a $y(x)=y_0$. De la misma manera definimos las soluciones locales en la expresión de la carta (x,t) en (2) y en las otras cartas (u,y) y (u,t) de $\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$. De esta forma la definición de punto singular no depende de las cartas.

Es fácil ver que para todo punto regular, i.e., no singular, $p \in \overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$, existe una vecindad $p \in U \subset \overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$ y una submersión holomorfa g_U: $U \to \mathbf{C}$ tal que todo gráfico de solución local de la ecuación diferencial en U está contenido en una curva de nivel de g_U, esto es, en $g_U^{-1}(c)$ para algún $c \in\mathbf{C}$. La colección de estas submersiones locales definen una *foliación con singularidades* $\mathcal{F}$ *de* $\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}$. Llamaremos sing $\mathcal{F}$ el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{F}$ que por hipótesis será finito.

Las componentes conexas no vacías de $g_U^{-1}(c)$ son llamadas *placas* de $\mathcal{F}$ en U. En $\overline{\mathbf{C}}\times\overline{\mathbf{C}}\backslash$sing $\mathcal{F}$ definimos la relación de equivalencia: $p \sim q$ si existe una colección de abiertos coordenados de $\mathcal{F}$ \sing $\mathcal{F}$, $U_0,U_1,\dots,U_n$ y placas $\alpha_0 \subset U_0,\alpha_1 \subset U_1,\dots,\alpha_n \subset U_n$ tales que $p\in\alpha_0, q\in\alpha_n$ y $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \phi_j$

para $j=0,1,\ldots,n-1$. Las clases de equivalencia de esta relación son llamadas *hojas de* $\mathcal{F}$. Por definición son superficies de Riemann. Cada hoja de $\mathcal{F}$ representa una solución global de la ecuación diferencial. No es difícil ver que una hoja puede entenderse también como el prolongamiento analítico de una solución local de (1).

La Hipótesis de Painlevé.

Sea $\Theta=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\subset\mathbf{C}$ el conjunto de puntos caracterizados por la propiedad siguiente: $\xi\in\Theta$ si y sólo si

(i) Existe un punto $y_0\in\mathbf{C}$ tal que $P(\xi,y_0)=Q(\xi,y_0)=0$ en (1) ó $\tilde{P}(\xi,0)=\tilde{Q}(\xi,0)=0$ en (2).

(ii) $Q(\xi,y)=0$ para todo $y\in\mathbf{C}$ lo que significa que $x=\xi$ es una solución de (1).

El punto $u=0$ que corresponde a $\xi=\infty$ es tratado de una manera similar e incluído en Θ caso sea la primera proyección de un punto singular o de una hoja vertical de $\mathcal{F}$.

Sea L una línea poligonal simple uniendo los puntos $\Theta\subset\mathbf{C}$ y $\mathcal{U}$ una vecindad de L en $\overline{\mathbf{C}}$ difeomorfa a un disco. Si $\Delta=\overline{\mathbf{C}}\setminus\mathcal{U}$, tenemos que la variedad $\Delta\times\overline{\mathbf{C}}$ es fibrada por los conjuntos $\overline{\mathbf{C}}_x=\{(x,y);y\in\overline{\mathbf{C}}\},x\in\Delta$, y la restricción de $\mathcal{F}$ a $\Delta\times\overline{\mathbf{C}}$ es una foliación regular tangente a las fibras $\overline{\mathbf{C}}_x$ a lo largo del conjunto algebraico $Q(x,y)=0$.

La hipótesis de Painlevé puede expresarse de la manera siguiente:

(P) Existe un entero $n>0$ tal que para dos puntos arbitrarios $x_0,x\in\Delta$ la hoja de $\mathcal{F}$ por x_0 intersecta la fibra $\overline{\mathbf{C}}_x$ exactamente en n puntos, contados con su multiplicidad.

Teorema. *(Painlevé) Supongamos que se cumple (P). Entonces existe una transformación racional.*

$$T(x,y)=(x,R(x,y))$$

$$R(x,y)=\frac{y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+a_0(x)}{y^{n-1}+b_{n-2}(x)y^{n-2}+\ldots+b_0(x)} \tag{3}$$

tal que $T^* \mathcal{R} = \mathcal{F}$ donde $\mathcal{R}$ es una foliación de Riccati, i.e. por el cambio de coordenadas (3) $\mathcal{R}$ es transformada en $\mathcal{F}$ donde $\mathcal{R}$ es dada por

$$\mathcal{R}: \frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{D(x)} y^2 + \frac{B(x)}{D(x)} y + \frac{C(x)}{D(x)}. \tag{4}$$

con $A(x), B(x), C(x)$ y $D(x)$ polinomios.

Estructuras Transversales.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión uno de una variedad compleja M de dimensión n. Supongamos que $\mathcal{F}$ está definida por cartas $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ cubriendo M y para cada $\alpha \in \Lambda$ submersiones holomorfas $y_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{C}$. Decimos que $\mathcal{F}$ tiene una estructura transversal definida por un grupo de Lie G de transformaciones de $\mathbf{C}$ si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ la transformación $y_\beta \circ y_\alpha^{-1} : y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbf{C} \to y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbf{C}$ pertenece a G.

Como ejemplo de foliación con estructura transversal de grupo de Lie tenemos la ecuación diferencial (4) de Riccati. Efectivamente, para esta ecuación diferencial el conjunto $\Theta = (D(x) = 0)$, consiste de un número finito de rectas verticales. Fuera de $\Theta \times \mathbf{C}$ la foliación $\mathcal{R}$ es transversal a las fibras verticales. Luego podemos cubrir este conjunto por abiertos del tipo $U_\alpha \times \overline{\mathbf{C}}$ donde $U_\alpha \subset \mathbf{C}$ es un disco contenido en $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Theta$. Como la foliación es transversal a las fibras verticales, existe una integral primera de $\mathcal{R} / U_\alpha \times \overline{\mathbf{C}}$ meromorfa del tipo $g_\alpha(x,y) = \frac{a_\alpha(x) y + b_\alpha(x)}{c_\alpha(x) y + d_\alpha(x)}$ con $a_\alpha(x) \cdot d_\alpha(x) - b_\alpha(x) \cdot c_\alpha(x) \neq 0$ para todo $x \in U_\alpha$. Los cambios de coordenadas $g_\beta \circ g_\alpha^{-1}$ serán evidentemente del tipo $z \mapsto \frac{e \cdot z + f}{h \cdot z + k}$ con $ek - f.h \neq 0$. Estos son elementos del grupo de transformaciones proyectivas de $\overline{\mathbf{C}}$.

También no es difícil verificar que la hipótesis (P) de Painlevé es equivalente a la siguiente:

(P') *Existe una integral primera meromorfa de la foliación $\mathcal{F} / \Delta \times \overline{\mathbf{C}}$.*

y que esta última es equivalente a afirmar que $\mathcal{F} / \Delta \times \overline{\mathbf{C}}$ tiene una estructura transversal proyectiva. Efectivamente, supongamos que existe $f : \Delta \times \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$

meromorfa tal que las hojas de $\mathcal{F}/\Delta\times\overline{\mathbf{C}}$ son las componentes conexas de los niveles $f^{-1}(c), c\in\overline{\mathbf{C}}$. Es posible cubrir $\Delta\times\overline{\mathbf{C}}$ con dos cartas locales U_1 y U_2 de la manera siguiente:

Sea $f^{-1}(\infty)$ el divisor polar de f y $U_1\subset\Delta\times\overline{\mathbf{C}}$ una vecindad de $f^{-1}(\infty)$ disjunta de $f^{-1}(0)$. En U_1 consideramos la submersión $g=\frac{1}{f}$. Sea $U_2=\Delta\times\overline{\mathbf{C}}\setminus f^{-1}(\infty)$. La submersión $f:U_2\to\mathbf{C}$ define la foliación $\mathcal{F}$ en U_2. El cambio de coordenadas es

$$g=\frac{1}{f} \quad \text{en} \quad U_1\cap U_2$$

luego es una transformación proyectiva.

El Teorema de Painlevé puede así escribirse: Si $\mathcal{F}$ tiene una estructura proyectiva fuera $\Theta\times\overline{\mathbf{C}}$ entonces existe una transformación racional T como en (3) tal que $T^*\mathcal{R}=\mathcal{F}$ donde $\mathcal{R}$ es una ecuación de Riccati.

El algoritmo de Godbillon-Vey.

La estructura transversal de una foliación de codimensión uno dada por una 1-forma diferencial w_0, completamente integrable, i.e. $w_0\wedge dw_0=0$, puede ser puesta en evidencia por medio de otras formas diferenciales asociadas. Así por ejemplo la foliación definida por $w_0=0$ es transversalmente afin si existe una 1-forma w_1, tal que

$$dw_0=w_0\wedge w_1 \quad \text{y} \quad dw_1=0.$$

De hecho existen cartas locales U_α donde w_0 se escribe $w_0=g_\alpha dy_\alpha$. Luego, en esta carta $dw_0=dg_\alpha\wedge dy_\alpha=\frac{dg_\alpha}{g_\alpha}\wedge g_\alpha dy_\alpha=w_0\wedge(-\frac{dg_\alpha}{g_\alpha})$. Esto es, w_1 puede ser definida en U_α por $w_1=-\frac{dg_\alpha}{g_\alpha}$. Ahora bien si $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$, y si w_0 es transversalmente afin, tenemos que

$$w_0=g_\alpha dy_\alpha=g_\beta dy_\beta \quad \text{y} \quad y_\alpha=a_{\alpha\beta}y_\beta+b_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\beta}\neq 0, \quad \text{en } U_\alpha\cap U_\beta$$

luego $g_\alpha(a_{\alpha\beta}dy_\beta)=g_\beta dy_\beta$ implica $g_\beta=a_{\alpha\beta}g_\alpha$ y así $w_1=-\frac{dg_\alpha}{g_\alpha}=-\frac{dg_\beta}{g_\beta}$.

Esto es, w_1 está bien definida globalmente y $dw_0=w_0\wedge w_1$ con $dw_1=0$.

Similarmente es posible mostrar que w_0 tiene estructura transversal proyectiva si y sólo si existen 1-formas holomorfas w_1 y w_2 tales que

$$dw_0 = w_0 \wedge w_1$$
$$dw_1 = w_0 \wedge w_2$$
$$dw_2 = w_1 \wedge w_2 .$$

Estas estructuras pueden ser recuperadas y extendidas por el siguiente procedimiento.

Sea w_0 una 1-forma meromorfa completamente integrable induciendo una foliación $\mathcal{F}$ en una variedad compleja M. Esto significa que $w_0 \wedge dw_0 = 0$.

Sea X un campo de vectores meromorfo tal que $i_X w_0 = 1$. Tenemos entonces que

$$(i_X w_0)dw_0 - w_0 \wedge i_X dw_0 = 0$$

esto es

$$dw_0 = w_0 \wedge i_X dw_0 = w_0 \wedge L_X w_0$$

ya que la derivada de Lie $L_X w_0 = i_X dw_0 + di_X w_0$.

Definimos $w_1 := L_X w_0$ y tenemos $dw_0 = w_0 \wedge w_1$. Derivando obtenemos

$$dw_1 = dL_X w_0 = L_X dw_0 = L_X (w_0 \wedge w_1) = w_1 \wedge w_1 + w_0 \wedge L_X w_1 .$$

Definiendo $w_2 := L_X w_1$, tenemos $dw_1 = w_0 \wedge w_2$.

Procediendo de nuevo a derivar tenemos

$$dw_2 = L_X dw_1 = L_X (w_0 \wedge w_2) = w_0 \wedge L_X w_2 + w_1 \wedge w_2$$

ó

$$dw_2 = w_0 \wedge w_3 + w_1 \wedge w_2 \quad \text{donde} \quad w_3 = L_X w_2 .$$

Este proceso produce formas diferenciales

$$\Omega = \{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots\}$$

donde

$$dw_j = w_0 \wedge w_{j+1} + \sum \binom{k}{l} w_k \wedge w_l \qquad \forall j = 0,\ldots,\infty$$

y

$$w_j = L_X^j w_0 .$$

Estas relaciones, semejantes a las ecuaciones de Maurer-Cartan producen una algebra de Lie sólo cuando $j = 1,2,3$ ó ∞.

Diremos que w_0 tiene profundidad finita $k \geq 1$ si $w_k \neq 0$ y $w_j = 0$ para todo $j \geq k+1$. Es claro que si w_0 tiene profundidad 2, entonces la foliación definida por w_0 tiene una estructura transversal proyectiva en un abierto denso de M.

De esta manera se obtiene la siguiente generalización del teorema de Painlevé:

Teorema [2]. *Sea* w_0 *una forma diferencial polinomial* $w_0 = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ *en* $(x,y) \in \mathbf{C}^2$ *tal que fuera de un conjunto* $\Theta \times \overline{\mathbf{C}}, \Theta \subset \overline{\mathbf{C}}$ *finito, tiene profundidad* $k \geq 1$. *Entonces existe una transformación racional que transforma en* $\mathcal{F}$ *la foliación definida por la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_k(x)y^k + \ldots + A_0(x)}{B_0(x)}$$

donde $A_0,\ldots,A_k$, B_0 *son polinomios.*

Referencias

[1] *P. Painlevé,* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, 1897.

[2] *C. Camacho, B. Scárdua,* Transversal semi group structures of complex foliations. Pre print.

camacho@impa.br