*Pro Mathematica: Vol. IX, Nos.17-18, 1995*

# UNA GEOMETRIA ABSOLUTA

Holger G. ***Valqui***

***Resumen***

*Recurriendo sólo al concepto de distancia y los números reales, se construye la recta y el plano, y las principales relaciones entre ellos. Luego se generaliza la no coplanaridad, para construir hiperplanos generados por un conjunto discreto de puntos.*

## Introducción.

La Física constituye una ciencia cuyo lenguaje formal es el lenguaje matemático. Como consecuencia de tal uso, las estructuras formales de la Física (la llamada Física Teórica) son estructuras matemáticas. Una de las estructuras más elementales está constituída por el espacio afín construido sobre $\mathbf{R}^n$. Allí se construye una Referencia geométrica donde se describen las trayectorias y "aventuras físicas" de los cuerpos.

El uso de una Referencia (o Sistema de Referencia) geometriza adecuadamente las descripciones físicas, y constituye una valiosa herramienta geométrico-intuitiva. El precio que por ello se paga consiste en que las "fórmulas" físicas contienen no solamente las propiedades de los

*Profesor de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI).*

sistemas físicos en consideración, sino también las particulares propiedades de la Referencia usada. Esto constituye una de las razones para haber construido una teoría de los invariantes (en este caso de las expresiones que permanecen invariantes al cambiar el Sistema de Referencia). Entonces parece que una geometría construida sin recurrir a una Referencia podría ser útil.

Por otra parte, conviene tener presente que, existiendo muchas maneras de definir la distancia entre dos puntos, las propiedades válidas para una cierta distancia (p.e, que tres puntos sean colineales), no serán válidas cuando se use otra distancia. Entonces surgen una serie de preguntas, como aquélla que plantea la existencia de propiedades geométricas invariantes al pasar de una distancia a otra.

Sea **E** un conjunto de objetos, que llamaremos "puntos", A, B, etc, para los cuales se ha definido la función distancia $|AB|$ sobre el cuerpo de los reales, según las reglas de juego usuales, válidas para puntos arbitrarios:

1) $|AB| = |BA| \geq 0$
2) $|AB| = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$
3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$

**Teorema 00:** $|AB| + |PQ| + |CD| + |AN| + \ldots + |RS| = 0$ *implica que todos los puntos considerados son coincidentes.*

**Teorema 01:** $(|AB| - |AC|)^2 \leq |BC|^2 \leq (|AB| + |AC|)^2$.

**Teorema 02:** Sea

$$\langle ABC\rangle = |AB|^4 + |BC|^4 + |CA|^4 - 2|AB|^2\,|BC|^2 - 2|BC|^2\,|CA|^2 - 2|CA|^2\,|AB|^2.$$

*Entonces* $\langle ABC\rangle = 0$ *implica uno de los siguientes casos:*

1) $|AB| + |BC| + |CA| = 0$, *con lo cual según T00, los tres puntos serán coincidentes,*
2) $|AB| + |BC| = |CA|$,
3) $|BC| + |CA| = |AB|$,
4) $|CA| + |AB| = |BC|$.

*Sug.:* Factorizar la expresión dada para $\langle ABC\rangle$.

**Definición 01:** *Si para tres puntos cualesquiera A, B, C se cumple alguna de las condiciones* 1, 2, 3 ó 4 *del* T02, *diremos que los tres puntos son colineales. En el caso en que los puntos sean diferentes, diremos que el punto que se repite, en el primer miembro de la correspondiente igualdad, se encuentra entre los otros dos.*

**AXIOMA 01:** Dados tres puntos A, B, W, siendo diferentes los dos primeros, y un número real $\alpha$, existen el punto P y el número real k tales que se cumple

$$|PX|^2 = |WX|^2 + \alpha(|AX|^2 - |BX|^2) + k, \text{ para todo X.}$$

**Teorema 03:** *El número k, en A01, está determinado por:*

$$k = \alpha^2 |AB|^2 - \alpha(|AW|^2 - BW|^2). \text{ Además, } |WP|^2 = \alpha^2 |AB|^2.$$

*Sug.:* Tomar, alternativamente X = A, X = B, X = C, X = P; luego, eliminar P.

**Teorema 04:** *El punto P, correspondiente a un número real r, según A01, es único.*

*Sug.:* Si los dos puntos P, Q fuesen determinados por un mismo r, tendríamos que $|PX|^2 = |QX|^2$ para todo punto X. Tomado X = Q y aplicando la condición de distancia nula, se obtiene P = Q.

**Teorema 05:** *El número r que corresponde al punto P, en A01, es único.*

*Sug.:* Suponer que los reales r, s, determinan a un mismo punto P. Entonces
$(r-s)(|AX|^2 - |BX|^2) = 0 \quad \forall$ X. Tomando X = A, luego X = B, y restando, obtenemos $2|AB|^2 (r-s) = 0$. Pero A y B son puntos diferentes.

Es decir, la igualdad del A01 establece una relación biunívoca entre el conjunto de los números reales y los elementos de un cierto subconjunto del conjunto **E**. Designaremos a dicho subconjunto con R(AB,C). Entonces construimos la siguiente

**Definición 02:**

$$R(AB,W) = \{P/\text{existe un } r \in \mathbf{R} \text{ para el cual } |PX|^2 = |WX|^2 + r(|AX|^2 + |BX|^2) +$$

**[01]** $$+ r^2 |AB|^2 - r(|AW|^2 - |BW|^2) \ \forall \ X\}.$$

Además, escribiremos

$$\textbf{[02]} \qquad P = f(AB,W,r), \quad r = \mu(AB,W,P)$$

o, cuando no surja confusión, simplemente, $P = f(r)$, $r = \mu(P)$.

**Teorema 06:** *Sean P, Q dos puntos de R(AB,C); entonces los puntos P, Q y C son colineales.*

*Sug.:* $|PX|^2 = |CX|^2 + r(|AX|^2 - |BX|^2) + r^2\,|AB|^2 - r(|AC|^2 - |BC|^2)$
$|QX|^2 = |CX|^2 + s(|AX|^2 - |BX|^2) + s^2\,|AB|^2 - s(|AC|^2 - |BC|^2)$,

de donde

$$s(|PX|^2 - |CX|^2) - r|QX|^2 - |CX|^2) = rs(r-s)|AB|^2;$$

tomando alternativamente $X = P$, $X = Q$ y $X = C$, obtendremos

$$- s|CP|^2 - r|QP|^2 - |CP|^2) = rs(r-s)|AB|^2$$
$$s(|PQ|^2 - |CQ|^2) + r|CQ|^2 = rs(r-s)|AB|^2$$
$$s|PC|^2 - r|QC|^2 = rs(r-s)|AB|^2.$$

Restando la primera ecuación de la segunda y de la tercera,

$$s(|PQ|^2 - |CQ|^2 + |CP|^2) + r(|PQ|^2 + |CQ|^2 - |CP|^2) = 0$$
$$2s|PC|^2 + r(|PQ|^2 - |CQ|^2 - |CP|^2) = 0.$$

El determinante del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es, como puede verificarse, igual a $<PQC>$. Si dicho determinante fuese no nulo obtendríamos $r=s=0$, con lo cual, al reemplazar en las ecuaciones iniciales, obtendríamos $P=Q=C$, y serían colineales. Si dichos puntos fuesen diferentes entre sí, entonces r, s no deberían anularse simultáneamente, lo que implica que el determinante es nulo. Entonces, según T02 y D01, los puntos resultan ser colineales.

**Teorema 07:** *Tres puntos cualesquiera de R(AB,C) son colineales.*

**Teorema 08:** *Para C de R(AB,C) se cumple,* $\mu(C) = 0$.

*Sug.:* $(|AX|^2 - |BX|^2) + r|AB|^2 - (|AC|^2 - |BC|^2) = 0$ no puede ser válido para todo X. De lo contrario, tomando $X=A$ y $X=B$, y restando, obtendríamos $2|AB|^2 = 0$, de donde resultaría que los puntos A y B serían coincidentes.

**Teorema 09:** *Sean* $r = \mu(D) = 1$, *siendo D un punto de R(AB,C). Entonces* $|CD| = |AB|$, $|AD| = |BC|$ *y* $|AC|^2 + |BD|^2 = 2|AB|^2 + 2|BC|^2$.

*Sug.:* En la expresión para $|DX|^2$, con r = 1, reemplazar X=A, luego X=B, X=C.

**Teorema 10:** *Dados dos puntos diferentes A, B, y un número real s, existen un punto P y un número real t, tales que se cumple*

$$|PX|^2 = (1-s)|AX|^2 + s|BX|^2 + t \quad \forall X.$$

*Sug.:* Tomar C = A en el A01.

**Teorema 11:** *En T10 se cumple* $t = -s(1-s)|AB|^2$.

**Definición 03:** *Designaremos con R(AB) al conjunto determinado, según T10, por todos los números reales; es decir,*

$$R(AB) = \{P/\text{existe un } r \in \mathbf{R} \text{ para el cual}$$

**[03]** $$|PX|^2 = (1-s)\,|AX|^2 + s|BX|^2 - s(1-s)\,|AB|^2, \ \forall X\}$$

**Teorema 12:** *Sean A, B, C tres puntos diferentes; sea* $D \alpha R(AB,C)$*, con* $D \neq C$*; entonces* $R(CD) = R(AB,C)$.

*Sug.:*

1) Sea $P \in R(AB,C)$, entonces, según D02, existirá $p \in \mathbf{R}$ tal que

$$|PX|^2 = |CX|^2 + p(|AX|^2 - |BX|^2) - p(|AC|^2 - |BC|^2) + p^2\,|AB|^2.$$

Pero $D \in R(AB,C)$ permite escribir

$$|DX|^2 = |CX|^2 + d(|AX|^2 - |BX|^2) - d(|AC|^2 - |BC|^2) + d^2\,|AB|^2;$$

luego, para todo $\alpha$ podemos escribir,

$$\begin{aligned} |PX|^2 &= (1-\alpha)|CX|^2 + \alpha\{|DX|^2 - d(|AX|^2 - |BX|^2) + d(|AC|^2 - |BC|^2) + d^2|AB|^2\} + \\ &\quad + p(|AX|^2 - |BX|^2) - p(|AC|^2 - |BC|^2) + p^2|AB|^2 \\ &= (1-\alpha)|CX|^2 + \alpha|DX|^2 + (p-\alpha d)(|AX|^2 - |BX|^2 - |AC|^2 + |BC|^2) + (p^2-\alpha d^2)|AB|^2 \end{aligned}$$

Eligiendo $\alpha = p/d$ (siendo d no nulo, por hipótesis), tendremos

$$|PX|^2 = (1-\alpha)|CX|^2 + \alpha|DX|^2 + \alpha(\alpha-1)d^2\,|AB|^2;$$

pero si en la expresión para $|DX|^2$ tomamos X=C, obtendremos $|DC|^2 = d^2|AB|^2$, con lo cual resulta $P \in R(CD)$, determinado por el número $\alpha$.

2) Para $P \in R(CD)$, tenemos

$$|PX|^2 = (1-\alpha)|CX|^2 + \alpha|DX|^2 - \alpha(1-\alpha)|CD|^2 = |CX|^2 + \alpha\{|DX|^2 - |CX|^2 + (\alpha-1)|CD|^2\}.$$

Ahora teniendo presente que $D \in R(AB,C)$, tendremos que

$$|DX|^2 - |CX|^2 = d(|AX|^2 - |BX|^2 - |AC|^2 + |BC|^2) + d^2|AB|^2,$$

con lo cual

$$|PX|^2 = |CX|^2 + \alpha\{d(|AX|^2 - |BX|^2 - |AC|^2 + |BC|^2) + d^2|AB|^2\} + \alpha(\alpha-1)|CD|^2,$$

de donde se obtiene la ecuación que permite reconocer a P como elemento de R(AB,C).

**Teorema 13:** *Sea D un punto de R(AB,C) con $\mu(D) = d$ no nulo; sea C un punto no perteneciente a R(AB). Entonces, por lo menos, uno de los pares de conjuntos R(AC) y R(BD), o R(AD) y R(BC) poseen un único punto común.*

*Sug.:* $|DX|^2 = |CX|^2 + d(|AX|^2 - |BX|^2 - |AC|^2 + |BC|^2) + d^2|AB|^2$

1) Sea P un posible punto común a R(AC) y a R(BD), determinado por los números p, q, respectivamente. Entonces,

$$|PX|^2 = (1-p)|AX|^2 + p|CX|^2 - p(1-p)|AC|^2 \text{ y } |PX|^2 = (1-q)|BX|^2 +$$
$$+ q\{|CX|^2 + d(|AX|^2 - |BX|^2 - |AC|^2 + |BC|^2) + d^2|AB|^2\} - q(1-q)|BD|^2.$$

Restando miembro a miembro, $(1-p-qd)|AX|^2 - (1-q-qd)|BX|^2 + (p-q)|CX|^2 = Z$, donde Z contiene todos los sumandos en los que no aparece X. Haciendo, sucesivamente, X = A, X = B, X = C, obtenemos,

$$-(1-q-qd)|BA|^2 + (p-q)|CA|^2 = Z$$
$$(1-p-qd)|AB|^2 + (p-q)|CB|^2 = Z$$
$$(1-p-qd)|AC|^2 - (1-q-qd)|BC|^2 = Z$$

Para eliminar Z, restemos la primera de la tercera , luego la segunda de la tercera, obteniendo

$$(1-2p-qd+q)|AC|^2 - (1-q-qd)|BC|^2 + (1-q-qd)|BA|^2 = 0$$
$$(1-p-qd)|AC|^2 - (1-2q-qd+p)|BC|^2 - (1-p-qd)|AB|^2 = 0$$

lo que da dos ecuaciones para las incógnitas p,q,

$$p[-2|AC|^2] + q[(1-d)|AC|^2 + (1+d)(|BC|^2 - |AB|^2)] = -|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2$$
$$p[-|AC|^2 - |BC|^2 + |AB|^2] + q[-d|AC|^2 + (2+d)|BC|^2 + d|AB|^2] = -|AC|^2 + |BC|^2 + |AB|^2$$

El determinante es igual a $(1+d)\langle ABC \rangle$, y los segundos miembros no pueden anularse simultáneamente.

2) Para el posible punto común a R(BC) y R(AD) tendremos,

$$|PX|^2 = (1-p)|BX|^2 + p|CX|^2 - p(1-p)|BC|^2 \quad \text{y}$$

$$|PX|^2 = (1-q)|AX|^2 + q\{|CX|^2 + d(|AX|^2 - |BX|^2 + |AC|^2 - |BC|^2) + d^2|AB|^2\} - q(1-q)|AD|^2.$$

Restando miembro a miembro,

$$(1-p+qd)|BX|^2 - (1-q+qd)|AX|^2 + (p-q)|CX|^2 = W,$$

donde en W están incluidos los términos que no contienen X. Haciendo, sucesivamente, $X = A$, $X = B$, $X = C$, obtenemos,

$$(1-p+qd)|BA|^2 + (p-q)|CA|^2 = W$$
$$-(1-q+qd)|AB|^2 + (p-q)|CB|^2 = W$$
$$(1-p+qd)|BC|^2 - (1-q+qd)|AC|^2 = W.$$

Eliminando W, obtenemos (tercera igualdad menos la segunda; luego la tercera menos la primera)

$$(1-2p+qd+q)|BC|^2 - (1-q+qd)|AC|^2 + (1-q+qd)|BA|^2 = 0$$
$$(1-p+qd)|BC|^2 - (1-2q+qd+p)|AC|^2 - (1-p+qd)|AB|^2 = 0$$

lo que da dos ecuaciones para las incógnitas p,q,

$$p[-2|BC|^2] + q[(1+d)|BC|^2 + (1-d)(|AC|^2 - |AB|^2)] = |AC|^2 - |BC|^2 - |AB|^2$$
$$p[-|BC|^2 - |AC|^2 + |AB|^2] + q[d|BC|^2 + (2-d)|AC|^2 - d|AB|^2] = |AC|^2 - |BC|^2 + |AB|^2.$$

El determinante es igual a $(1-d)\langle ABC\rangle$, y los segundos miembros no pueden anularse simultáneamente (pues ello implicaría $A = B$).

En los dos casos resulta necesario que $\langle ABC\rangle$ no se anule, es decir, A, B y C deben ser no colineales. Además:

i) Para $d^2 \neq 1$, cada par de conjuntos tiene un punto común,

ii) Para $d = -1$, R(AC) y R(BD) son disjuntos, pero R(AD) y R(BC) tienen un punto común,

iii) Para $d = 1$, R(AD) y R(BC) son disjuntos, pero R(AC) y R(BD) tienen un punto común.

**Definición 04, 05:** *Diremos que los conjuntos R(AB) y R(MN) son paralelos si existen dos números r,k tales que*

**[04]** $$MX|^2 - |NX|^2 = r(|AX|^2 - |BX|^2) + k \quad \forall X,$$

*y diremos que ellos son perpendiculares si se cumple*

**[05]** $$|AM|^2 - |AN|^2 = |BM|^2 - |BN|^2.$$

**Teorema 14:** *Sea* $P \in R(AB,C)$, $P \neq C$; *entonces* $R(AB,C)$ *y* $R(CP)$ *son paralelos.*

**Teorema 15:** *Sean los puntos* $P,Q \in R(AB,C)$, *tales que* $\mu(P)= 1$, $\mu(Q)= -1$; *entonces, por una parte*: $R(PC)$ *y* $R(AB)$ *son paralelos*, $R(PA)$ *y* $R(CB)$ *son paralelos; por otra parte:* $R(QC)$ *y* $R(BA)$ *son paralelos,* $R(QB)$ *y* $R(CA)$ *son paralelos.*

**Teorema 16:** *Sea* $P \in R(AB,C)$, $P \neq C$; *entonces si* $R(MN)$ *es perpendicular a* $R(AB)$, *también es perpendicular a* $R(CP)$.

**Teorema 17:** *Sean* $P \in R(AB,C)$, $Q \in R(AB,D)$, *con* $D \in R(AC)$, $P,D \neq C$; $C \notin R(AB)$; *entonces si* $R(MN)$ *es perpendicular a* $R(AB)$ *y a* $R(AC)$, *también será perpendicular a* $R(PQ)$.

**Definición 06:** *Diremos que los cuatro puntos* A, B, C *y* D *son coplanares si existen cuatro números* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, k, *con* $\alpha+\beta+\gamma = 1$, *tales que*

$$|DX|^2 = \alpha|AX|^2 + \beta|BT|^2 \gamma|CX|^2 + k \qquad \forall X$$

**Axioma 02:** Dados cuatro puntos A,B,C,W, los tres primeros no colineales, y dos números reales r,s, existen un punto P y un real k tales que se cumple,

$$|PX|^2 = |WX|^2 + r(|AX|^2 - |BX|^2) + s(|AX|^2 - |CX|^2) + k, \quad \forall X.$$

**Teorema 18:** *El número k del A02 tiene el valor*

$$k = r^2|AB|^2 - r(|AW|^2 - |BW|^2) + rs(|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2) - s(|AW|^2 - |CW|^2) + s^2|AC|^2.$$

*Sug.:* Tomar, alternativamente, X = A, B, C, D, y eliminar los sumando en los que aparece P.

**Teorema 19:** *Los números reales, r, s, que determinan P en A02, son únicos.*

**Teorema 20:** *El punto P determinado por los números r,s, en A02, es único.*
*Es decir el A02 establece una relación biunívoca entre los pares ordenados de números reales y los elementos de un cierto subconjunto de* ***E****, que designaremos con P(ABC,D). Así definiremos,*

**Definición 07:** *Para los cuatro puntos A,B,C,W, donde A,B,C son no colineales, definінimos*

$P(ABC,W) = \{Q/$existen $r,s \in \mathbf{R}$ para los cuales

**[06]** $$|QX|^2 = |WX|^2 + r(|AX|^2 - |BX|^2) + s(|AX|^2) - |CX|^2 + k, \forall X\},$$

*donde k es el número del T18. Además, escribiremos,*

[07] $P = f(ABC,W,r,s)$, $r = \mu_1(ABC,W,P)$, $s = \mu_2(ABC,W,P)$

*o, cuando no surja confusión, simplemente,* $P = f(r,s)$, $r = \mu_1(P)$, $s = \mu_2(P)$.

**Teorema 21:** *Sean L, M, N, tres puntos de P(ABC,D), entonces los puntos D, L, M, N son coplanares.*

**Teorema 22:** *Cuatro puntos cualesquiera de P(ABC,D) son coplanares.*

**Teorema 23:** *Dados tres puntos no colineales y tres números reales, r, s, t, con* $r+s+t = 1$, *existe un punto Q y un real k tales que*

$$|QX|^2 = r|AX|^2 + s|BX|^2 + t|CX|^2 + k, \forall X.$$

**Teorema 24:** *Para el número k de T23 se cumple*

$$k = -rs|AB|^2 - st|BC|^2 - tr|BA|^2.$$

**Definición 08:** *Para tres puntos A, B, C, no colineales, definimos el conjunto*

$$P(ABC) = \{Q/\text{existen } r,s,t \in \mathbf{R}, \text{ con } r+s+t=1, \text{ para los cuales}$$

$$[08] \qquad |QX|^2= r|AX|^2 + s|BX|^2 + t|CX|^2 + k, \forall X\}$$

*donde k es dado en T24.*

**Teorema 25:** *Sea* $P \in R(AB,C)$; *entonces* A,B,C *y* P *son coplanares.*

**Teorema 26:** *Sean cuatro puntos* A,B,C,D, *los tres primeros no colineales; sean* $M,N \in P(ABC,D)$, *tales que* M,N,D *no sean colineales. Entonces*

$$P(MND) = P(ABC,D).$$

**Teorema 27:** *Sean* M,N *dos puntos de* P(ABC,D), *no coincidentes; entonces se cumple que* $R(MN) \subset P(ABC,D)$.

**Definición 09:** *Sea el conjunto de* n+1 *"puntos",* $\Lambda = \{A,A_1,...,A_n\}$. Consideremos la ecuación,

$$[09] \qquad \sum_{k=1}^{n} r_k\,(|A_k X|^2 - |AX|^2) = \beta \quad \forall X,$$

válida para ciertos n+1 números $r_1,...,r_n$, $\beta$. Entonces, Si los únicos números que satisfacen la ecuación anterior son todos nulos, diremos que el ESPESOR del conjunto $\Lambda$ es n, es decir

$$E(A, A_1, \ldots, A_n) = n.$$

Por otra parte, $m \leq n$, si entre todos los subconjuntos de m+1 elementos, o puntos, existe alguno con espesor m, diremos que

$$E(\Lambda) \geq m.$$

**Teorema 28:** *Para el número* $\beta$ *de* [09] *se cumple* $\beta = \sum_k r_k|AA_k|^2$.

*Sug.:* Hágase $X = A$.

**Teorema 29:** *Si A y B son diferentes, entonces* $E(A,B) = 1$.

*Sug.:* $r(|AX|^2 - |BX|^2) = \beta$. Tomar $X = A$, luego $X = B$.

**Teorema 30:** Sea $P \in R(AB)$. Entonces $E(A,B,P) < 2$.

**Teorema 31:** $E(A,B,C) = 2$ *sólo si ellos son no-colineales.*

*Sug.:* $(p+q)|AX|^2 - p|BX|^2 - q|CX|^2 = \beta$. Tomando sucesivamente X=A, X=B, X=C se obtienen tres ecuaciones con segundo miembro igual a $\beta$. Restando la primera de las otras dos, se obtienen dos ecuaciones homogéneas, para las variables p, q. El determinante del sistema de ecuaciones resulta ser $\langle ABC \rangle$

**Teorema 32:** *Sea* $Q \in P(ABC)$; *entonces* $E(A,B,C,Q) < 3$.

*Sug.:* Según [08] podemos escribir

$r(|AX|^2 - |QX|^2) + s(|BX|^2 - |QX|^2) + t(|CX|^2 - |QX|^2) = -k$, donde los tres coeficientes del primer miembro no pueden ser todos nulos.

**Teorema 33:** $E(A,B,C,D) = 3$ *sólo si ellos son no-coplanares.*

**Definición 10:** Dado cuatro puntos A, B,C y D, *definimos el cuarteto*

**[10]** $$(ABCD) \equiv |AD|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 - |BD|^2.$$

**Definición 11:** *Para el conjunto* $\Lambda = \{A, A_1, \ldots, A_n\}$, *definimos*

$$\delta_n = \begin{vmatrix} (AA_1AA_1) & (AA_2AA_1) & (AA_3AA_1) & (AA_4AA_1) & \dots & (AA_nAA_1) \\ (AA_1AA_2) & (AA_2AA_2) & (AA_3AA_2) & (AA_4AA_2) & \dots & (AA_nAA_2) \\ (AA_1AA_3) & (AA_2AA_3) & (AA_3AA_3) & (AA_4AA_3) & \dots & (AA_nAA_3) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (AA_1AA_n) & (AA_2AA_n) & (AA_3AA_n) & (AA_4AA_n) & \dots & (AA_nAA_n) \end{vmatrix}$$

**[11]**

*en forma simplificada escribiremos* $\delta_n = \delta(\Lambda)$.

**Teorema 34:** $E(A,A_1,\dots,A_n) = n$ *si, y sólo si* $\delta(A,A_1,\dots,A_n) \neq 0$.

*Sug.:* Tomando en [09] X=A; luego $X=A_j$ tendremos

$$\sum_k r_k |A_k A|^2 = \beta\,, \qquad \sum_k r_k (|A_k A_j|^2 - |AA_j|^2) = \beta \quad \forall X.$$

Para eliminar β, restemos,

$$\sum r_k (|A_k A|^2 + |AA_j|^2 - |A_k A_j|^2) = 0 \quad \forall X$$

es decir

$$\sum_k r_k (AA_k AA_j) = 0, \qquad \text{para } j = 1 \dots n$$

que es un sistema de n ecuaciones homogéneas para n incógnitas reales $r_k$, con k=1...n. Los coeficientes $r_k$ serán no nulos sólo en el caso en que el determinante del sistema sea nulo.

**Definición 12:** *Dados* n+2 *puntos* $A_0,A_1,\dots,A_n,B$, *diremos que ellos son n-cohiperplanares si existen* n+2 *números reales,* $r_0,r_1,\dots,r_n$, k, *con* $r_0+r_1+\dots+r_n=1$, *tales que se cumple*

$$|BX|^2 = \sum_{k=0}^{n} r_k |A_k X|^2 + k, \ \forall X.$$

[Como puede verificarse, en el primer miembro de la igualdad puede ir cualquiera de las otras distancias en vez de |BX|].

**Axioma 03:** Dados n+2 puntos $A,A_1,\dots,A_n,W$, donde los n+1 primeros no son n-1-cohiperplanares, y dados n números reales $r_1,\dots,r_n$, existen un punto Q y un real z, tales que se cumple

$$|QX|^2 = |WX|^2 + \Sigma r_k(|AX|^2\ |A_kX|^2) + z,\ \forall X.$$

[El Axioma puede especificarse para cualquier n natural, o sólo para aquéllos $n < N_0$, siendo $N_0$ un número natural a ser especificado].

**Teorema 35:** *El número z del* A03 *vale*

$$z = -s|WA|^2 + \sum_k r_k |WA_k|^2 + s\sum_k r_k |AA_k|^2 - \sum_k \sum_{j<k} r_j r_k |A_j A_k|^2$$

*donde* $s = r_1 + \dots + r_n$.

**Teorema 36:** *A un punto* Q, *en el* A03, *le corresponde una única n-upla de números reales y, recíprocamente, cada n-upla de números reales determina un único punto de* **E**.

**Definición 13:** *Dados* W *y el conjunto* $\Lambda = \{A, A_1, \dots, A_n\}$ *de puntos no n-1-hipercoplanares, definimos*

$P(\Lambda,W) = \{Q/$existe la n-upla de reales $r_1,\dots,r_n$ para los cuales

[12] $$|QX|^2 = |WX|^2 + \Sigma\, r_k(|AX|^2 - |A_kX|^2) + z,\ \forall X\}$$

*donde* z *es el número de* T35.

**Definición 14:** *Dados* n+1 *puntos* $\Lambda = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, *que no deben ser n-1-cohiperplanares, definimos el n-hiperplano*

$H(\Lambda) = \{Q/$existen $r_0, r_1, \dots, r_n, z \in \mathbf{R}$, con $r_0 + r_1 + \dots + r_n = 1$, para los cuales

[13] $$|QX|^2 = \sum_{k=0} r_k |A_k X|^2 + z,\ \forall X\}$$

**Teorema 37:** *El número* z *de la* D14 *tiene el valor*

$$z = -\sum_{k=0}^{n} \sum_{j<k}^{n} r_j r_k |A_j A_k|^2 .$$

**Teorema 38:** *Sean* $B_1,\dots,B_n$, *puntos no* n-2-*cohiperplanares del conjunto* $P(\Lambda,W)$, *entonces si* $W \notin H(B_1 \dots B_n)$ *se cumple que*

$$H(WB_1 \dots B_n) = P(\Lambda,W).$$

**Teorema 39:** *Si* $W \in P(\Lambda,W)$, *entonces* $P(\Lambda,W) = H(\Lambda)$.

**Teorema 40:** *Sean* m *puntos* $M_1,...,M_m$ *de* $P(AA_1...A_n,W)$, *tales que* $E(M_1...M_m) = m-1$; *entonces,* $P(M_1...M_m) \subset P(AA_1...A_n,W)$.

**Teorema 41:** *Sea* $E(\Lambda) = n$; *entonces,*

i) *Si* $Q \in H(\Lambda)$ *entonces* $E(AA_1...A_nQ) = n$

ii) *Si* $Q \notin H(\Lambda)$ *entonces* $E(AA_1...A_nQ) = n+1$.

*Sug.:*

i) Por D14,

$$\begin{aligned} |QX|^2 &= \Sigma\, r_k|A_kX|^2 + z = r_0|AX|^2 + \Sigma\, r_k|A_kX|^2 + z \\ &= (1-\Sigma r_k)|AX|^2 + \Sigma r_k|A_kX|^2 + z \\ &= |AX|^2 + \Sigma r_k(|A_kX|^2 - |AX|^2 + z, \end{aligned}$$

de donde

$$(-1)(|QX|^2 - |AX|^2) + \Sigma r_k(|A_kX|^2 - |AX|^2 = -z.$$

Pero, en la igualdad anterior no todos los coeficientes son nulos, entonces, por D09, dichos n+2 puntos no pueden tener el espesor n+1; es decir, $E(AA_1...A_nQ) < n+1$. Por otra parte, considerando el subconjunto $\Lambda$ de $\{A,A_1,...,A_n,Q\}$, sabemos que éste tiene espesor n; entonces, según D09, debe ser $E(AA_1...A_nQ) \geq n$.

ii) Consideremos la expresión $t(|QX|^2 - |AX|^2) + \Sigma s_k(|A_kX|^2 - |AX|^2) = c$. Supongamos que t sea no nulo, entonces, dividiendo entre t, y despejando $|QX|^2 = (1-\Sigma r_k)|AX|^2 + \Sigma r_k|A_kX|^2 + \sigma$, con $r_k = -s_k/\beta$, $\sigma = c/\beta$, y donde, como puede verse, la suma de los coeficientes es igual a la unidad; entonces, según D14, $Q \in \eta(\Lambda)$, en contradicción con la hipótesis. Es decir, debe ser $t = 0$; de donde resulta $\Sigma s_k(|A_kX|^2 - |AX|^2) = c$. Pero $E(\Lambda) = n$, lo que, según D09, implica que todos los n coeficientes son nulos. Es decir, los n+1 coeficientes son necesariamente nulos; entonces, según D09, debe ser $E(AA_1...A_nQ) = n+1$.

**Teorema 42:** *Sea* $E(\Lambda) = n$; *entonces* $E(H(\Lambda)) = n$.

**Teorema 43:** *Sea* $\Lambda = \{A,A_1,...,A_n\}$, *donde dichos puntos no son n-1-cohiperplanares; entonces, si* $B \notin P(\Lambda)$ *se cumple*

[14] $$E(P(AA_1...A_nB) = 1 + E(P(AA_1...A_n)).$$

**Axioma de la dimensión** (forma directa): Existe un número natural $N^{dim}$ tal que el espesor de ningún subconjunto de **E** es mayor que tal número.

**Teorema de distancias:** *Sean* $s \geq r > 0$. *Si* $|AB|$ *es una distancia, entonces*

$$|AB|_1 = |AB| / (|AB|+r) \ \text{ y } \ |AB|_2 = |AB|(|AB|+s) / (|AB|+r)$$

*también son distancias.*

*Sug.:* Por una parte

$(|AB|+|BC|)r^2 \geq |AC|r^2$, $|AB|\,|BC|\,|AC| + 2|AB||BC|r + (|AB|+|BC|)r^2 \geq |AC|r^2$, $|AB|(|BC|+r)(|AC|+r) + |BC|\,(|AB|+r)(|AC|+r) \geq |AC|(|AB|+r)(|BC|+r)$.

Por otra parte, de $|AB|+|BC| \geq |AC|$ y $|AB|_1 + |BC|_1 \geq |AC|_1$ y $s-r \geq 0$, obtenemos

$$|AB| + (s-r)|AB|_1 + |BC| + (s-r)|BC|_1 \geq |AC| + (s-r)|AC|_1,$$

donde los sumandos corresponden justamente a la segunda distancia.

Es decir, los resultados anteriores valen para cualquier dimensión que sea no mayor que $N^{dim}$, y para cualquier tipo de distancia que se elija.