Pro Mathematica, Vol. IX, Nos. 17-18, 1995

SOBRE LA LEY DE LA DEMANDA GENERALIZADA Y LA UNICIDAD DEL EQUILIBRIO WALRASIANO

Alejandro **Lugon**

Introducción

En la teoría del equilibrio general,
el primer resultado deseable es la existencia de precios de equilibrio.
Una vez que se tiene la existencia, el paso siguiente es obtener buenas propiedades para el conjunto de equilibrios, en este aspecto un buen resultado es la unicidad local, descartando la existencia de un continuo de equilibrios.
Otro buen resultado es la compacidad del conjunto de equilibrios, uniendo este resultado con la unicidad local se concluye la existencia de un número finito de equilibrios. Este resultado aun siendo bueno, no es suficiente; lo ideal sería tener un único equilibrio.

La unicidad de equilibrio, además de ser atrayente desde el punto de vista teórico, es también deseable cuando se piensa en hacer estática comparativa; con más de un equilibrio sólo es posible tratar la estabilidad en forma local.

Profesor del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas. PUCP.

Con la unicidad del equilibrio también se eliminan las incómodas preguntas: Existe otro sistema de precios relativos totalmente diferente al corriente?. Si existe, es el otro "mejor"que el actual? En una primera aproximación al problema se debe tener presente el resultado de Sonnenschein: continuidad, homogeneidad y Ley de Walras son las únicas propiedades de la función exceso de demanda aseguradas por la "racionalidad" de los agentes. En el problema de unicidad, este resultado implica que deben hacerse restricciones adicionales para conseguir condiciciones que aseguren una unicidad.

La restricción más común es la hipótesis de sustitutos brutos, pero esta resulta ser muy fuerte.

Este artículo, en el cual tratamos los conceptos del axioma débil y la monotonía de la demanda, es parte de la tesis de maestría del autor (Lugon (92)), donde se pueden encontrar todas las demostraciones omitidas.

1. Generalidades

En este artículo trabajaremos básicamente con economías con un número finito de bienes y consumidores. En general tendremos ℓ bienes y N consumidores, caracterizados por sus utilidades:

u^i: $\mathbb{R}^{\ell}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ y por sus dotaciones iniciales $\omega^i \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$, en algunos casos en lugar de las dotaciones tendremos rentas $\theta^i \in \mathbf{R}_{+}$.

Para el caso de una economía sin producción, con hipótesis aceptables y bien conocidas, los consumidores generan una función de exceso de demanda agregada (FED):

f: $\mathbf{R}^{\ell}_{++} \rightarrow \mathbf{R}^{\ell}$ definida por $f(\mathrm{p}) = h(p) - \sum_{i=1}^{n} \omega^i$, donde $h(p)$ es la demanda agregada de los consumidores a precios p.

Las propiedades de esta función son:

T1) $f \in C^1$

T2) $f(\lambda p) = f(p) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}_{++}$

T3) $p.f(p) = 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$

T4) $\exists\, k>0 \,/\, f(p) > -ke \quad \forall p \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$

T5) Si $p^n \rightarrow p$, con $p_j=0$ para algún j, entonces $\| f(p^n) \| \rightarrow \infty$

Diferenciando en T2 (en relación a λ) y en T3, tenemos respectivamente las identidades:

$$\text{T6)} \quad \partial f(p).p = 0 \qquad \forall p \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$$

$$\text{T7)} \quad p.\, \partial f(p) = -f(p) \quad \forall p \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$$

Si tomamos la demanda como función no sólo de los precios, sino también la renta $w^j = p.\omega^i$ $[h^i(p) \equiv h^i(p,w^j)]$, podemos aplicar a descomposición de Slutsky a la demanda individual $h^i(p)$, y obtener:

$$\partial h^i(p) = Sh^i(p) - Ah^i(p), \text{ donde:}$$

$$Sh^i(p) := \partial_p h^i(p,w^j) + (\partial_p h^i(p,w^j))^T.h^i(p,w^j)$$

$$Ah^i(p) := -(\partial_w h^i(p,w^j))^T.(\omega^i - h^i(p,w^j)) = (\partial_w h^i(p,w^j))^T.f^i(p)$$

$Sh^i(p)$ es la Matriz de Efectos de Substitución de Slutsky, que es negativa semi-definida si la demanda es generada por un proceso de maximización. Si definimos:

$$Sh(p) := \sum_{i=1}^{n} Sh^i(p) \;, \quad Ah(p) := \sum_{i=1}^{n} Ah^i(p)$$

tenemos que:

$$\partial f(p) = \partial h(p) = Sh(p) - Ah(p).$$

Notemos que $Sh(p)$ también es negativa semi-definida, y que si w^j no depende de p: $Ah^i(p) = (\partial_w h^i(p,w^j))^T.\, h^i(p,w^j)$.

Un equilibrio para esta economía es un precio $p \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$ tal que $f(p) = 0$, diremos que el equilibrio es regular si $\partial f(p)$ tiene rango ℓ-1 (por T6 no puede tener rango ℓ). En caso de que todos los equilibrios sean regulares diremos que la economía es regular.

El índice de un equilibrio regular es definido como:

$$\text{ind}(p) = \text{sign} \begin{vmatrix} -\partial f(p) & p \\ -p^T & 0 \end{vmatrix}.$$

Notemos que si $\partial f(p)$ es cuasi-negativo definido, el índice de p será +1.

Un resultado bien conocido es que los equilibrios regulares son localmente únicos, además T5 asegura que el conjunto:

$$E := \{p \in \mathbf{S}^{\ell-1}_{++} \, / \, p \text{ es equilibrio})$$

es compacto. Estas dos condiciones implican que, en el caso de economías regulares, E es finito. Luego una expresión $\sum_{p \in E} \mathrm{ind}(p)$ tiene sentido y asi podemos formular el:

Teorema del Indice. *Sea E el conjunto de precios de equilibrio de una economía regular sin producción, se tiene que:*

$$\sum_{p \in E} \mathrm{ind}(p) = 1.$$

Este teorema prueba que en economías regulares el número de equilbrios es impar, en particular asegura la existencia de por lo menos un equilibrio.

En caso de una economía con producción, caracterizaremos ésta por el conjunto $Y \subset \mathbf{R}^\ell$ de posibilidades de producción total al cual exigiremos las propiedades de ser convexo y cerrado, contener a $-\mathbf{R}^\ell$ y tal que $Y \cap \mathbf{R}^\ell_+ = \{0\}$. Dado Y, podemos definir el conjunto
(notemos que es un cono):

$$Y^* := \{p \in \mathbf{R}^\ell \, / \, p.Y < s \text{ para algún real } s\}$$

y la función de beneficios de la industria a los precios p:

$$\beta : Y^* \to \mathbf{R}$$
$$p \to \operatorname*{Sup}_{y \in Y} \; p.y$$

La función β es homogénea de grado 1, convexa y continua. En este caso la FED se define sobre Y^* y satisface las siguientes propiedades:

P1) f es lipschitziana

P2) $f(\lambda p) = \lambda f(p) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R}_{++}$

P3) $p.f(p) = \beta(p) \qquad \forall p \in Y^*$

P4) $\exists\, k > 0$ tal que $f(p) > -ke \;\; \forall p \in Y^*$

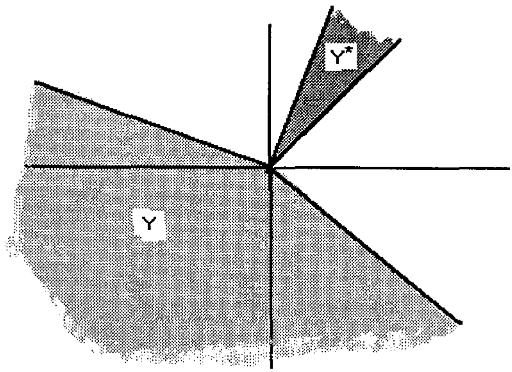
P5) Si $p^n \to p$, con p^n *en* Y^* y $p_j = 0$ para algún j,

$$\text{entonces} \quad \|f(p^n)\| \to \infty$$

Un equilibrio para esta economía será un par $(p,y) \in Y^* \times Y$, tal que:

i) $y = f(p)$
ii) $p.y = \beta(p)$

Como por (i), y es determinado en forma única por p, y por P3): $p.f(p) = \beta(p)$, se puede decir que $p \in Y^*$ es un equilibrio si $f(p) \in Y$. Un caso particular e importante, de economías con producción, es aquel que presenta retornos constantes a escalas, i.e. cuando Y es un cono, en este caso la función β es idénticamente nula en su dominio, luego $p.f(p) = 0 \ \ \forall p \in Y^*$.



Para economías con producción, también se puede definir equilibrio regular y formular el teorema del índice correspondiente.

2. Axioma débil, monotonía y Ley de la demanda generalizada

En este capítulo definiremos dos conceptos ligados con el que se conoce como la *"Ley de la demanda"*, y veremos su relación con la unicidad de equilibrio.

Definición 2.1 *Diremos que una FED satisface el Axioma Débil (WA) si* $\forall p,q \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$ *tales que* $p.f(q) \leq p.f(p)$ *y* $q.f(p) \leq q.f(q)$, *se tiene que*:

$$f(p) = f(q).$$

Esta propiedad es siempre satisfecha si la FED proviene de un problema de maximización de alguna función de utilidad, como el caso de una FED individual. Pero, la propiedad de WA no se conserva cuando se agregan varias FED individuales.

Definición 2.2 *Diremos que una FED es monótona con respecto a* $z \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$ si $\forall p,q \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$ *tales que* $p.z = 1 = q.z$, *se tiene que*:

$$[p-q] \cdot [f(p) - f(q)] \leq 0.$$

Si la desigualdad es estricta, diremos que la FED es estrictamente monótona.

Como veremos más adelante, la monotonía no es satisfecha por todas las FED individuales, pero si es satisfecha (para el mismo z) por todas las FED individuales de una economía, la FED agregada también será monótona. La siguiente proposición prueba que la monotonía estricta es más fuerte que el WA.

Proposición 2.3*Si una FED es estrictamente monótona con respecto a algún* $z \in \mathbf{R}^{\ell}_{+}$, *entonces satisface el WA.*

Con lo dicho hasta ahora, queda claro que si lo que se quiere son condiciones sobre los individuos que aseguren que la FED agregada satisface WA, lo que se debe buscar es que cada FED individual sea monótona. Por otro lado, las condiciones para tener WA en el agregado deberán ser de tipo global; esto es, tomando toda la economía, o por lo menos todo el sector de consumo de ella.

Daremos ahora condiciones necesarias y suficientes para tener WA y/o monotonía.

Definición 2.4 *Dado* $p \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$ *definimos las siguientes condiciones:*

I) $\forall v \in \mathbf{R}^{\ell}$ *tal que* $v \neq 0, p.v = 0 = v.f(p)$:

$$v^t \,.\, \partial f(p)\, v < 0.$$

II) $\exists\, z > 0$ *tal que si* $v \in \mathbf{R}^{\ell}$, $v \neq 0$ y $z.v = 0$, *entonces:*

$$v^t \,.\, \partial f(p)\, v < 0.$$

Llamaremos I' y II' a las propiedades I y II, respectivamente, cuando las desigualdades no sean estrictas. Si una condición es verdadera para todo p, diremos que $f(.)$ satisface a dicha condición.

Proposición 2.5 *Si* $p.f(p) = 0, \ \forall p \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}$:

i) II $\Rightarrow$ I (*Análogamente* II' $\Rightarrow$ I').

ii) *Si p es el equilibrio regular:* I $\Rightarrow$ ind(p) = + 1.

La siguiente proposición establece algunas relaciones que utilizaremos:

Proposición 2.6 *Si la FED es de clase* C^1, *entonces:*

i) II $\Rightarrow$ *Monotonía estricta* (*respecto al mismo* z)

ii) II' $\Leftrightarrow$ *Monotonía* (*respecto al mismo* z)

iii) *Si* $p.f(p) = 0$, I *implica WA.*

iv) *Si* $p.f(p) = 0$, *WA implica* I'.

Veamos ahora los resultados.

Teorema 2.7 *Si la economía* $\mathcal{E} = (f,Y)$ *tiene al menos un equilibrio regular y f satisface el WA entonces el equilibrio es único.*

Demostración: Supongamos p,q equilibrios, con p siendo regular, y definimos $p(\alpha) = \alpha p+(1-\alpha)q$ con $\alpha\in[0,1]$. Como la función beneficio es convexa tenemos que:

$$p(\alpha)\,.\,f(p(\alpha)) = \beta(p(\alpha)) \leq \alpha\beta(p) + (1-\alpha)\beta(q),$$

luego:

$$\alpha[p.f(p(\alpha))] + (1-\alpha)[q.f(p(\alpha))] \leq \alpha\beta(p) + (1-\alpha)\beta(q),$$

y de ahi tenemos que:

$$p.f(p(\alpha)) \leq \beta(p) \quad \text{o} \quad q.f(p(\alpha)) \leq \beta(q).$$

Tomemos el caso $p.f(p(\alpha)) \leq \beta(q)$ (el otro es similar), si $f(p(\alpha)) \neq f(p)$, entonces por el WA $p(\alpha).f(p) > \beta(p(\alpha)) = \max\limits_{y\in Y} p(\alpha)y$, entonces $f(p)\notin Y$, lo cual contradice el hecho de que p sea equilibrio. Por tanto, se tiene que

$$f(p) = f(p(\alpha)),$$

con lo cual $p(\alpha)$ sería equilibrio para todo α. En resumen, tendríamos un equilibrio regular pero no aislado, lo que es una contradicción, luego el equilbrio debe ser único. □

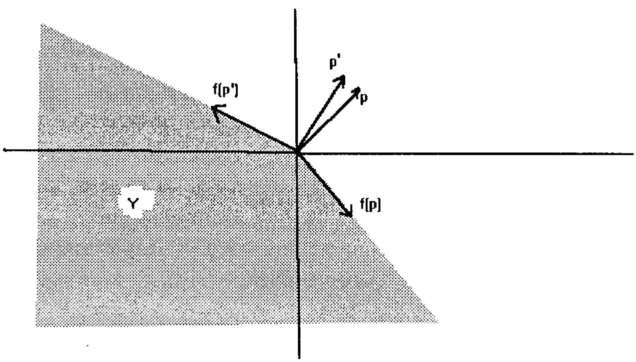
Es obvio que el teorema se aplica también en economías sin producción, basta con tomar $\beta(p) = 0$. Otro corolario de teorema, usando la proposición 2.3, es que monoticidad estricta también implica unicidad.

Notemos que el teorema anterior nos da una condición suficiente para unicidad sin preocuparse por la tecnología de la industria. Veremos ahora un resultado, debido a Scarf, que nos indica que el WA es en cierto sentido también necesario para asegurar la unicidad del equilibrio sin tener en consideración el sector productivo de la economía.

Teorema 2.8 *Sea f una FED, C^1 y con $p.f(p)=0$. Si f no satisface el WA, entonces existe Y, conjunto de producción con retornos constantes a escala, tal que $\mathcal{E} = (f,Y)$ tiene por lo menos dos equilibrios.*

Demostración: Sea p y p' dos precios diferentes que violan el WA, esto es: $f(p) \neq f(p')$, $p.f(p') \leq 0$ y $p'.f(p) \leq 0$. Definiendo:

$$Y = \{y \in \mathbf{R}^{\ell}_{++} \,/\, p.y \leq 0 \wedge p'.y \leq 0\}$$



Tenemos que p y p' son equilibrios de $\mathcal{E} = (f,Y)$. □

De acuerdo con este teorema, y como monotonía no impica WA, no es de esperar que monotonía por sí misma implique unicidad en una economía con producción. Pero, para economías de intercambio puro tenemos el siguiente:

Teorema 2.9 *Si una economía sin producción tiene al menos un equilibrio regular y la FED es monótona con respecto a* $z > 0$, *entonces ese equilibrio es único.*

Haciendo un resumen, tenemos hasta ahora que para una economía sin producción, tanto el WA como la monotonía (no estricta) nos llevan a equilibrios únicos. Pero en una economía con producción, para que solo el sector de consumo garantice la unidad del equilibrio, la pieza clave es el WA, siendo la monotonía estricta también suficiente. En este último caso, debemos aclarar que el WA para economías con producción es muy fuerte, de hecho, genéricamente una economía no satisface el WA, como está provado en **Hildenbrand (89)**.

Por otro lado, si queremos condiciones para los individuos que lleven a la unicidad, lo más aconsejable es procurar que cada demanda individual sea estrictamente monótona, lo que acarrea la monoticidad de la demanda agregada y da el WA. A este respecto, veremos un resultado debido a **Mitjushin y Polterovich (78)**.

Sea ω_i la dotación inicial del consumidor i ($\omega := \sum_i \omega_i$) y $h_i\ (p, p.\omega_i)$: $\mathbf{R}^{\ell}_{++} \times \mathbf{R}_{+} \rightarrow \mathbf{R}^{\ell}_{+}$ su función de demanda. Definamos el coeficiente de renta como $\theta_i\ (p) = p.\omega_i / p.\omega$, y consideremos el caso en que $\theta_i(p) = \theta_i$, consecuentemente, esto implica que $\omega_i = \theta_i \omega$, luego si normalizamos los precios con $p.\omega = 1$, tenemos que cada individuo tiene una renta θ_i que es independiente de los precios, y por tanto la demanda no depende de las dotaciones iniciales. En este contexto, tenemos el siguiente teorema donde la monotonía de h quiere decir que:

$$\forall\ p, q \in \mathbf{R}^{\ell}_{++} : (p-q).(h(p)-h(q)) \leq 0.$$

Teorema 2.10 *Si una función de demanda* C^1: h: $\mathbf{R}^{\ell}_{++} \rightarrow \mathbf{R}^{\ell}_{++}$ *es generada por la maximización de una función de utilidad monótona, cóncava y* C^2 : u: $\mathbf{R}^{\ell}_{++} \rightarrow \mathbf{R}$, *con restricción de presupuesto* $px = \theta$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para la monotonía de h es:*

$$\alpha[x\partial u(x)]^2 - x^{\mathrm{T}}\partial^2 u(x)x \leq 4x\partial u(x)$$

donde

$$(*) \qquad \alpha = \sup_{z\partial\, u(x)=1} z^{\mathrm{T}}\partial^2 u(x)z$$

Demostración: Según el enunciado $h(p)$ es la solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \max & u(x) \\ \text{s.a.} & p.x=\theta \end{array}$$

De las condiciones de primer orden: $\partial u(x) = \lambda p$ y $p.x = \theta$, tenemos que: $\dfrac{\theta\ \partial\ u(x)}{x.\partial\ u(x)} = p$, esto es: $g(x) := \dfrac{\theta\ \partial\ u(x)}{x.\partial\ u(x)}$ es la función inversa de $h(p)$, luego h es monótona $\Leftrightarrow$ g es monótona, y por la proposición 2.6 (ii): g es monótona si y sólo si:

$$w^{T}.\partial g(x)w \leq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^{\ell}_{++},\ w \in \mathbf{R}^{\ell} \setminus \{0\}.$$

Fijado x, sin perder generalidad, podemos normalizar w de manera que $\partial u(x).w = \partial u(x).x$. Por simplicidad de notación definamos $v := \partial u(x)$ y $A := \partial^2 u(x)$, luego diferenciando $g(x)$ tenemos:

$$\partial g(x) = \theta\ \frac{(v.x)A - (x^T A + v)v^T}{(v.x)^2}$$

y de ahí:

$$w^{T}.\partial g(x)w = \theta\ \frac{(v.x)w^T.Aw - w^T[(x^T A)v^T]w - w^T.(v.v^T)w}{(v.x)^2}$$

$$= \theta\ \frac{(v.x)w^T.Aw - (v.w)\,(x^T.Aw) - (v.w)^2}{(v.x)^2}$$

Como $v.x = v.w > 0$ y $\theta > 0$, tenemos que:

$$\text{Sign}\,(w^{T}.\partial g(x)w) = \text{Sign}\,(w^{T}Aw - x^{T}.Aw - v.x).$$

Pero:

$$w^{T}.Aw - x^{T}.Aw = w^{T}.Aw - \frac{1}{2}x^{T}.Aw - \frac{1}{2}x^{T}.Aw + \frac{1}{4}x^{T}.Ax - \frac{1}{4}x^{T}.Ax$$

$$= (w - \frac{1}{2}x)^{T}.A(w - \frac{1}{2}x) - \frac{1}{4}x^{T}.Ax$$

Definiendo $z := \dfrac{2w - x}{v.x} = \dfrac{2}{v.x}\,(w - \dfrac{1}{2}\,x)$ y notando que $v.z = 1$, tenemos que:

$$w^{\mathrm{T}}.\,Aw - x^{\mathrm{T}}.\,Aw - v.x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\,(v.x)^2\, z^{\mathrm{T}}.\,Az - \frac{1}{4}\,x^{\mathrm{T}}.\,Ax \leq v.x$$

$$\Leftrightarrow \alpha\,(v.x)^2 - x^{\mathrm{T}}\,.\,Ax \leq 4\,v.x$$

donde

$$\alpha = \operatorname*{Sup}_{z.v = 1}\ z.Az$$

Con esto queda probado el teorema. □

Una pequeña anotación es que si consideramos u estrictamente cóncava, tendremos que A es negativa definida y por tanto $\alpha = (vA^{-1}\,v^{\mathrm{T}}\,)^{-1}$, con esto la condición (*) toma la forma:

$$\frac{x.\partial\, u(x)}{\partial\, u(x).\partial^{\,2}u(x)^{-1}\partial\, u(x)^{T}} - \frac{x^{T}.\partial^{\,2}u(x)\,x}{x.\partial\, u(x)} \leq 4.$$

Otra consideración más importante es que nosotros necesitamos de la monotonía estricta, y no de la monotonía simple si estamos pensando en WA. En este caso tenemos la siguiente versión del teorema 2.10, que puede ser encontrada en **Mas-Colell (89)** :

Teorema 2.11 *Sobre las hipótesis del teorema* 2.10, *es suficiente para la monotonía estricta de h que:*

$$(**) \qquad\qquad \sigma(x) = \frac{-x^{T}\partial^{\,2}u(x)\,x}{x\partial\, u(x)} < 4$$

Demostración: Es la misma del teorema 3.10, notando que la proposición 2.6 (i) nos da una condición suficiente para monotonía estricta:

$$w^{\mathrm{T}}\,\partial(x)w < 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^{\ell}_{++}\,, \qquad w \neq 0$$

y que las condiciones del teorema aseguran que $x^{\mathrm{T}}Ax \leq 0$ para todo x, de donde $\alpha \leq 0$. □

Cabe notar que (**) depende de la representación u tomada (p.e. $u(x) = -x^{-n}$ nos da $\sigma(x)= n+1$), siendo la mejor candidata la representación mínimamente cóncava (**en Debreu 76**), si es C^2, aún más: **Kannai (89)** prueba una cierta forma recíproca del teorema 2.11: "Si para la representación mínimamente cóncava tenemos que para todo x: $\sigma(x) > 4$, entonces h no es monótona".

En términos de las FED, el teorema 2.11 adopta la siguiente forma:

Teorema 2.12 *Si* $f_i : \mathbf{R}^{\ell}_{++} \to \mathbf{R}^{\ell}$ *es una FED generada por utilidades como en el teorema* 3.10 *y dotaciones iniciales* $\omega_i = \theta_i\, \omega$, *entonces* (**) *para toda utilidad individual implica que* $f = \sum_i f_i$ es monótona con respecto a $\omega (=\omega_i / \theta_i)$.

Demostración: Como ya vimos basta verificar la monotonía de cada f_i , esto es: $[p.\omega = 1 = q.\omega] \Rightarrow (f_i(p) - f_i(q)) \cdot (p-q) < 0$.

Ahora: $p.\omega=1=q.\omega \Leftrightarrow p.\omega_i = \theta_i = q.\omega_i$, y $f_i(p) - f_i(q) = h_i(p) - h_i(q)$,

luego basta aplicar el teorema 2.11 □

Veamos ahora un ejemplo en el cual el número 4 se muestra como el "mejor" número para verificar la condición (**), esto es: la pregunta: $\exists r>4$ tal que $\sigma(x) < r$ es suficiente para tener monotonía estricta?, tiene por respuesta: no.

Ejemplo 2.13 (Mas-Colell 89)

Sea una economía con dos bienes y dos consumidores (A y B) con dotaciones iniciales $\omega_A = \omega_B = (2,2)$, y utilidades:

$$u_A(x_1, x_2) = x_1 + \frac{(4-\varepsilon)^{\sigma_A}}{1-\sigma_A} x_2^{1-\sigma_A}$$

$$u_B(x_1, x_2) = x_2 + \frac{(4-\varepsilon)^{\sigma_B}}{1-\sigma_B} x_1^{1-\sigma_B},$$

donde

$$\sigma_A := Ln(1\text{-}\varepsilon) / Ln((4\text{-}\varepsilon) / 4) \quad \text{y} \quad \sigma_B := Ln(1\text{-}\varepsilon) / Ln((4\text{-}2\varepsilon) / (4\text{-}\varepsilon))$$

con $\varepsilon \in (0,1)$. Así, tenemos que:

$$\partial u_A(x_1,x_2) = (1, (4\text{-}\varepsilon)^{\sigma_A} x_2^{-\sigma_A})$$

$$\partial^2 u_A(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_A (4-\varepsilon)^{\sigma_A} x_2^{-1-\sigma_A} \end{bmatrix}$$

Luego : $\sigma_A(x_1, x_2) = \dfrac{\sigma_A (4-\varepsilon)^{\sigma_A} x_2^{\sigma_A}}{x_1 + (4-\varepsilon)^{\sigma_A} x_2^{\sigma_A}}$, se tiene que:

$$\sigma_A(x_1, x_2) < 4 \Leftrightarrow \frac{(\sigma_A - 4)(4-\varepsilon)^{\sigma_A} x_2^{\sigma_A}}{4} < x_1 ,$$

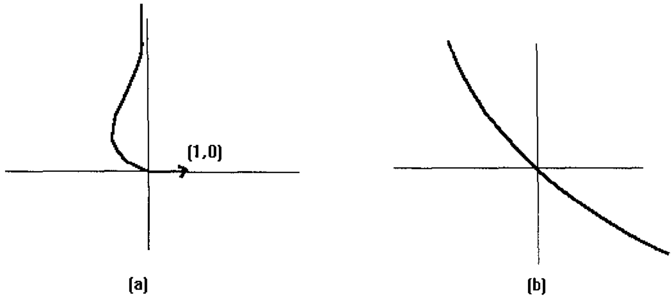
pero notemos que si σ_A -4 > 0, entonces existe (x_1, x_2) en $\mathbf{R}^{\ell}_{++}$ tal que $\sigma_A(x_1, x_2) \geq 4$, y de hecho: $\sigma_A > 4$ (basta considerar la función $f(\varepsilon)=ln(1-\varepsilon)-4ln((4-\varepsilon)/4)$ que es estrictamente decreciente y con $f(0) = 0$). El mismo análisis puede ser hecho para B, luego para todo $\varepsilon \in (0,1)$ la condición (**) es violada. Unido esto al hecho de que (1,1) y (1,1-ε) son precios de equilibrio, como se puede verificar directamente, y al hecho de que si hacemos $\varepsilon \to 0$:
$\sigma_A \downarrow 4$ y $\sigma_B \downarrow 4$, lo que tenemos son ejemplos de economías con por lo menos dos equilibrios y que violan la condición (**) tan "débilmente" como se quiera.

Veamos, para finalizar, la relación entre WA, monotonía y Substitutos Brutos, en economías sin producción. La más fuerte de esta hipótesis es la de SB. Como WA es satisfecha por una FED individual, que es perfectamente compatible con bienes complementarios, no se puede esperar que WA implique SB. Para la monotonía tenemos los siguientes hechos:

Para una economía de dos bienes, monotonía con respecto a todo z>0 y SB son equivalentes. En la figura a) tenemos una FED monótona con respecto sólo de (1,0), y que no tiene SB, en la figura b) la FED es monótona con respecto a cualquier z>0 y satisface SB.

Para una economía de tres bienes sólo se conoce que SB implica el WA.

Para más de tres bienes, se puede dar un ejemplo de una economía que satisface SB, pero tiene múltiples equilibrios y por lo tanto, no presenta WA (consecuentemente tampoco monotonía).



Bibliografia.

[1] *Arrow, K e F. Hahn* (1971) "General competitive analysis"

[2] *Debreu, G.* (1976) "Least concave utility functions"; Journal of Mathematical Economics, 3, pag. 121.

[3] *Hildenbrand, W.* (1984) "The weak axiom of revealed preference for market demand is strong". Econometrica 57, pag. 979.

[4] *Kannai, Y.* (1989) "A characterization of monotone individual demand functions"; Journal of Mathematical Economics, 18, pag. 87.

[5] *Lugon A.* (1992) "Sobre a unicirame global do e.q. walrasiamo". Informes de Matemática serie D-049-Março/92.IMPA.Rio de Janeiro.

[6] *Mas-Colell, A.* (1985) "The theory of general economic equilibrium, a differentiable approach"; Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

[7] *Mas-Colell, A.* (1989) "On the uniqueness of equilibrium once again"; mimeografiado, Harvard University.

[8] *Mitjushin, L.G. e V.W. Polterovich* (1978) "Criterios para la monoticidade da função demanda" (En ruso); Ekonomika I Matematicheskie Metody, 14, pag. 122.

alugon@pucp.edu.pe