Pro Mathematica, Vol. IX, Nos. 17-18, 1995

EL MODELO DE PERCOLACION

David **Thompson**

Presentamos el modelo de percolación y
dos de los proyectos de investigación relacionados con el tema,
que tenemos en la PUCP.

Introducción

El modelo de percolación se ocupa del flujo en geometrías restringidas.
Cuando preparamos un café,
el sabor depende del grado de textura de los granos de café;
granos ligeramente empaquetados
permiten que el agua pase rápidamente por los espacios
entre los granos, y el café no tendrá mucho sabor.
En el otro extremo, cuando los granos están fuertemente comprimidos, los espacios entre los granos están desconectados
y el agua no puede pasar.

El sistema de percolación que pretendemos estudiar involucra la conductividad eléctrica de arreglos bidimensionales de resistencias. Imaginamos una red cuadrada hecha con alambres. Conectamos dos extremos a una pila y medimos la corriente (ver la fig. 1a).

Profesor del Departamento de Ciencias, Sección Física. PUCP.

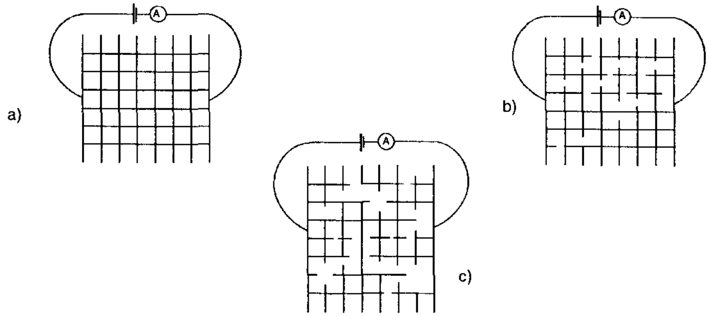


Fig. 1

Ahora empezamos a cortar los enlaces de la red, pero escogemos los enlaces a cortar de una manera aleatoria (fig. 1b). Conforme cortamos los enlaces aumenta la resistencia de la red y decrece la corriente que pasa. Eventualmente llegaremos al punto donde toda la corriente pasa por un solo enlace (fig. 1c). Si cortamos este enlace la red se separará en dos y no pasará corriente. La situación es como lo presenta la fig. 2. La fig. 2 es típica de una transición de fase. Cuando la fracción de enlaces conectados p es alta, la red está en una fase conductiva y cuando es pequeña hay una fase aislante.

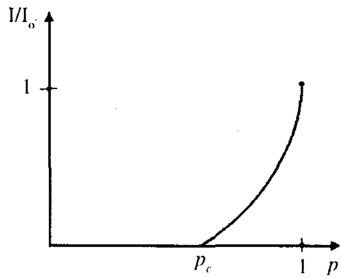


Fig. 2: La corriente normalizada I/I_0 versus la fracción de enlaces conectados.

Existe un valor crítico de p que se llama el umbral de percolación p_c tal que la conductividad $\sigma(p)$ (la corriente es proporcional a la conductividad) es

$$\sigma(p) = 0 \qquad\qquad p < p_c$$

$$\sigma(p) > 0 \qquad\qquad p > p_c\,.$$

Exactamente en el punto crítico la conductividad es una función continua y la figura 2 es típica de una transición de fase de segundo orden, que también se llama una transición continua. Si hubiera una discontinuidad en la conductividad, la transición sería de primer orden.

Evidentemente, si repetimos el experimento con otro juego de números aleatorios para decidir qué enlaces cortar, encontrámos un umbral de percolación un poquito diferente, pero conforme aumenta el tamaño de la red bajan las fluctuaciones en los valores encontrados de p_c hasta que en una red infinita todos los ensayos darían exactamente el mismo valor de p_c.

En lugar de empezar con la red entera conductiva, podemos imaginar que empezamos con una red aislante, es decir, con $p = 0$ y progresivamente reemplazamos enlaces aislantes por enlaces conductivos. Cuando p es muy pequeño los enlaces conductivos están aislados. Al aumentar p aparecen conjuntos de enlaces conductivos conectados, y el tamaño medio de los conjuntos aumenta con p. Exactamente en el umbral de percolación aparece un conjunto de enlaces conductivos que se extiende de un lado a otro de la red, y si la red es infinita también lo es este conjunto. La probabilidad de que un enlace pertenezca al conjunto infinito se llama *la probabildad percolativa* $P(p)$ y se muestra en la fig. 3 junto con $\sigma(p)$ y el tamaño medio de los conjuntos, tanto en términos del número de enlaces $\bar{s}$ como en términos de la distancia máxima entre sus miembros $\bar{l}$.

Tal como ocurre con otras transiciones de fase de segundo orden las magnitudes $\sigma(p)$, $P(p)$, $\bar{s}(p)$ y $\bar{l}(p)$ se describen por exponentes críticos. Es decir, muy cercano al punto crítico tenemos

$$\sigma \sim (p - p_c)^t$$

$$P \sim (p - p_c)^\beta$$

$$\bar{s} \sim (p_c - p)^{-\gamma}$$

$$\bar{l} \sim (p_c - p)^{-\nu}$$

Los exponentes críticos se definen de tal manera que sean positivos, pero normalmente no son enteros.

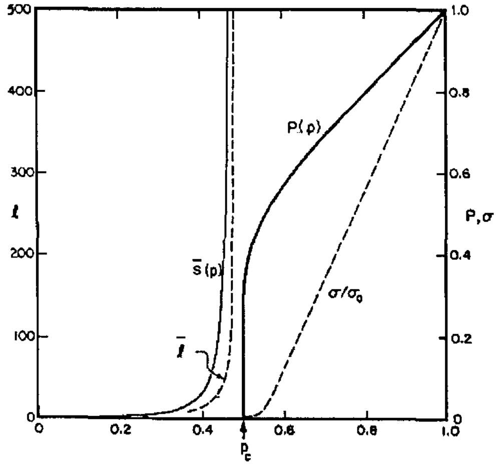


Figura 3. Las magnitudes importantes en el problema de percolación: $P(p)$ la probabilidad percolativa; σ la conductividad; $\bar{s}$ el número promedio de enlaces por conjunto; $\bar{l}$ el tamaño lineal promedio del conjunto.

Clases de Universalidad.

Una observación notable sobre transiciones de fases es que es posible agrupar todas las transiciones de fase de segundo orden en unos pocos grupos y que todas las transiciones en un grupo muestran exactamente los mismos exponentes críticos. Transiciones tan variadas como la transición paramagnética-ferromagnética y el punto crítico asociado con la transición gas-líquido poseen los mismos exponentes críticos. Resulta que las clases de universalidad se determinan por la dimensionalidad de la muestra y la dimensionalidad n del parámetro de orden. El parámetro de orden es la magnitud que se hace cero en el punto de transición y en el modelo de percolación es la probabilidad percolativa $P(p)$, que es un escalar con $n = 1$.

Como ejemplo de la universalidad de los exponentes críticos presentamos la fig. 4, que muestra datos experimentales sobre la transición gas-líquido. Los ocho gases son bastante diferentes en sus propiedades y las temperaturas críticas varian entre 45 K y 1400K; sin embargo, cuando introducimos las variables reducidas T/T_c y n/n_c todos los resultados caen sobre la misma curva.

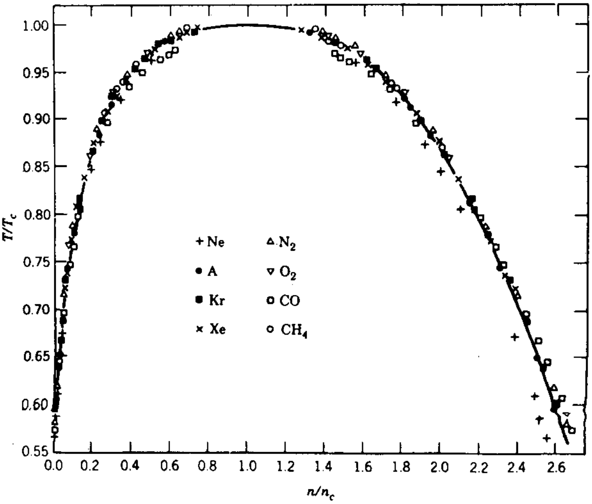
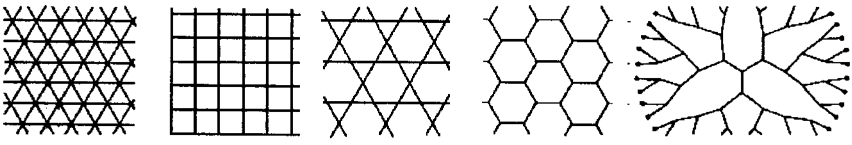


Figura 4. Datos experimentales cercanos al punto crítico de la transición gas-líquido. Con el uso de variables reducidas, todos los datos caen sobre la misma curva.

Las transiciones de fases están dentro de los problemas más difíciles de la física, en parte porque las transiciones dependen de las interacciones entre los constituyentes del sistema, y nuestros conocimientos de dichas interacciones son muy imprecisos. Lo contrario ocurrre con el modelo de percolación, en que todo se determina por la geometría, por la conectividad de la red. La existencia de las clases de universalidad significa que es posible hacer cálculos en sistemas modelo sencillos, sabiendo que los resultados son aplicables a sistemas reales.

A pesar de la simplicidad del modelo de percolación existen muy pocos resultados analíticos. Esencialmente en dos dimensiones tenemos resultados para algunos de los umbrales de percolación, y en tres dimensiones no tenemos nada. En la figura 5 se ve algunas redes bidimensionales con sus p_c, tanto para el problema de enlaces como (para sitios, en el cual son) los nudos de la red que consideramos como conductores o aislantes. Los p_c dados hasta con cuatro cifras son resultados exactos y se puede ver que sólo para dos de las cinco redes tenemos los dos p_c en forma exacta.



TRIANGULAR	CUADRADO	KAGOMÉ	PANAL DE ABEJA	RED DE BETHE
$z = 6$	$z = 4$	$z = 4$	$z = 3$	$z = 3$
$p_c^{enlace} = 0.3473$	$p_c^{enlace} = 0.5000$	$p_c^{enlace} = 0.45$	$p_c^{enlace} = 0.6527$	$p_c^{enlace} = 0.5000$
$p_c^{sitio} = 0.5000$	$p_c^{sitio} = 0.59$	$p_c^{sitio} = 0.6527$	$p_c^{sitio} = 0.70$	$p_c^{sitio} = 0.5000$

Fig. 5

La llamada red de *Bethe* tiene en cierto modo una dimensionalidad infinita y es un caso especial porque no contiene lazos cerrados. La ausencia de lazos cerrrados permite, por ejemplo, que el cálculo de la probabilidad percolativa sea posible. Consideremos una red de Bethe en la cual z enlaces se unen en cada nudo (en la fig. 5, $z = 3$). Para que un enlace que es conductivo forme parte del conjunto infinito, necesitamos que exista por lo menos un camino que llegue hasta el infinito. Cada enlace tiene $2(z\text{-}1)$ vecinos y calcularemos la probabilidad $R(p)$ que un enlace no llegue a un camino al infinito. Existen dos posibilidades para que el camino sea finito: o el primer enlace es aislante con probabilidad $1\text{-}p$; o el primer enlace es conductivo pero cada uno de los z-1 caminos que siguen son finitos. Por lo tanto

$$R = 1\text{-}p + pR^{z\text{-}1} .$$

Cuando p es menor que $1/(z\text{-}1)$ la raíz positiva más pequeña es 1, lo que significa que todos los caminos son finitos. Para $p > 1\,/(z\text{-}1)$ existe una raíz $0<R<1$ y concluímos que

$$p_c = \frac{1}{(z-1)} .$$

Para la probablidad percolativa necesitamos que un enlace escogido al azar sea conductivo y que no todos los $2(z-1)$ caminos sean finitos, o sea

$$P(p) = p(1 - R^{2z-2}).$$

Notamos que la ausencia de lazos cerrados es esencial para permitir suponer que las probabilidades de encontrar caminos finitos sean independientes.

Aplicaciones.

La intención que tenemos es fabricar las redes bidimensionales para determinar, experimentalmente, los exponentes críticos asociados con la conductividad y así verificar o no la universalidad de ellos. Es decir, establecer experimentalmente si todos los t son iguales independientemente de la estructura de las redes. Evidentemente, es posible simular todo en la computadora, pero la física es sobre todo una ciencia experimental y es importante que presentemos a los alumnos de licenciatura y maestría proyectos experimentales. En particular el modelo de percolación en dos dimensiones resulta ser un proyecto interesante que no requiere de equipos sofisticados.

Otra dirección para la investigación es la aplicación del modelo de percolación al flujo de petróleo o de agua en las rocas. Un error común es imaginarse que los depósitos de petróleo son como cavernas llenas de líquido; pero no es así. Un reservorio es una capa de roca porosa entre dos capas impermeables y el petróleo se encuentra en los poros de la roca. Evidentemente es posible extraer el petróleo sólo si la porosidad excede el umbral de percolación. En este caso el comportamiento crítico no será de interés sino valores de p sustancialmente mayores que p_c . Para simular la naturaleza aleatoria de los poros en las rocas, que obligatoriamente involucra un cálculo en tres dimensiones, seleccionaremos los valores de las resistencias de una manera aleatoria.

Bibliografía.

Dos libros sobre percolación que tenemos en la biblioteca de ciencias son:

[1] *D. Stauffer, Taylor and Francis* (London, 1985) Introduction to Percolation Theory. (Escrito por un físico).

[2] *G. Grimmett, Springer-Verlag* (New York, 1989) Percolation. (Escrito por un matemático).

dthomps@pucp.edu.pe