

AUTOMORFISMOS LINEALES DEL TORO Y DINAMICA SIMBOLICA

Gonzalo Contreras

*Presentamos en este artículo un ejemplo clásico
de dinámica hiperbólica.*

*El toro de dimensión 2, puede considerarse como
el grupo (aditivo) cociente $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.*

*Esto es lo mismo que verlo como el cuadrado $[0,1]^2$,
identificando los lados por*

$$(x,0) \equiv (x,1), (0,y) \equiv (1,y).$$

Sea $A \in \mathbf{Z}^{2 \times 2}$ una matriz con coeficientes enteros con determinante $\det A = +1$ y con autovalores con módulo diferente de 1. Entonces $(\mathbf{Z}^2) \subseteq \mathbf{Z}^2$ y por tanto la aplicación lineal de \mathbf{R}^2 con matriz A define un homomorfismo f del grupo aditivo $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, $F: T^2 \rightarrow T^2$, dado por

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^2 \right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^2.$$

Además, como $\det A = 1$, tendremos que A^{-1} también tiene entradas enteras y define la inversa F^{-1} en el cociente $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, en particular, F es biyectiva.

En el toro podemos definir distancias, ángulos y áreas usando las medidas correspondientes en \mathbf{R}^2 y la proyección canónica $\pi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, $\pi(\bar{x}) = \bar{x} + \mathbf{Z}^2$. También podemos dar al Toro una estructura diferenciable, diciendo que una función $f: T^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es continua, diferenciable, etc, si su levantamiento $\tilde{f} := f \circ \pi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ es continua, diferenciable, etc.

Sean λ, μ los autovalores de la matriz A . Como supusimos que $|\lambda|, |\mu| \neq 1$ y $\lambda\mu = \det A = 1$, si $|\lambda| \geq |\mu|$, tendremos que $|\lambda| > 1 > |\mu|$. Por simplicidad, supongamos que $\lambda > 1 > \mu > 0$, el otro caso (autovalores reales negativos) es parecido a éste. Sean $\mathbf{E}^u := E_\lambda \subseteq \mathbf{R}^2$, $\mathbf{E}^s := E_\mu \subseteq \mathbf{R}^2$ los espacios propios de A .

Veamos que las rectas $\mathbf{E}^u, \mathbf{E}^s$ tienen pendiente irracional. Consideremos sus proyecciones $W^u(0) := \pi(\mathbf{E}^u)$, $W^s(0) := \pi(\mathbf{E}^s)$. Estas son curvas conexas que tienen pendiente constante en el Toro, luego sólo pueden ser curvas cerradas simples y conexas (si la pendiente de \mathbf{E}^s o \mathbf{E}^u fuese racional) o curvas infinitas sin autointersección en T^2 (si la pendiente es irracional). Probaremos ahora por el absurdo que el primer caso no puede darse. Obsérvese que F es una contracción en $W^s(0)$ y una expansión en $W^u(0)$:

$$d(F(x), F(y)) = \mu d(x, y) \text{ para } x, y \in W^s(0), d(x, y) < 1$$

$$d(F(x), F(y)) = \lambda d(x, y) \text{ para } x, y \in W^u(0), d(x, y) < 1/\lambda.$$

Obsérvese también que $F(W^s(0)) = W^s(0)$ y $F(W^u(0)) = W^u(0)$.

Si $W^s(0)$ fuese un círculo, tendríamos que $\text{long}(W^s(0)) = \text{long}(F(W^s(0))) = \mu \text{long}(W^s(0)) < \text{long}(W^s(0))$. Esto es una contradicción. Luego $W^s(0)$ no es una curva cerrada y entonces \mathbf{E}^s tiene pendiente irracional. Similarmente, para $W^u(0)$ usamos la inversa F^{-1} , que contrae $W^u(0)$ por un factor $1/\lambda < 1$.

Ahora definimos las **variedades estables** W^s y las **variedades inestables** W^u de otros puntos del Toro. Para $x \in T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$,

$$W^s(x) := \{y \in T^2 / \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(F^n x, F^n y) = 0\}$$

$$W^u(x) := \{y \in T^2 / \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(F^{-n} x, F^{-n} y) = 0\}$$

Dejamos al lector verificar que $W^s(x) = \pi(x + \mathbf{E}^s)$, $W^u(x) = \pi(x + \mathbf{E}^u)$ y que por tanto son curvas infinitas de pendiente irracional en T^2 , sin autointersecciones. El conjunto de todas las variedades estables

$\mathcal{F}^s = \{W^s(x) / x \in T^2\}$ forma la **foliación estable**, similarmente la foliación inestable es $\mathcal{F}^u = \{W^u(x) / x \in T^2\}$. Estas foliaciones son transversales y cada una de sus hojas $W^s(x)$, $W^u(x)$ tiene pendiente constante.

Obsérvese que la derivada de F es $DF(x) = A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ identificando \mathbf{R}^2 con el plano tangente a T^2 en x . La recta tangente a $W^s(x)$ en x en esta identificación es $T_x W^s(x) = \mathbf{E}^s \subseteq \mathbf{R}^2$, también $T_x W^u(x) = \mathbf{E}^u \subseteq \mathbf{R}^2$. Los automorfismos lineales del Toro son el ejemplo más simple de difeomorfismos de Anosov. Un difeomorfismo f de una variedad compacta μ , $f: M \rightarrow M$ es **Anosov** si en todo punto $p \in M$ existe una descomposición del espacio tangente $T_p M = E^s(p) \oplus E^u(p)$ en dos subespacios transversales $E^s(p)$, $E^u(p)$ tal que

(i) Esta descomposición es continua.

(ii) La descomposición es invariante por la derivada de f :

$$Df(p)(E^s(p)) = E^s(f(p)), \quad Df(p)(E^u(p)) = E^u(f(p)).$$

(iii) Existen números $C, \gamma > 0$ tales que

$$\|Df^n(p) \cdot v_p\| \leq C e^{-\gamma n} \|v_p\| \quad \text{para todo } v_p \in E^s(p)$$

$$\|Df^{-n}(p) \cdot w_p\| \leq C e^{-\gamma n} \|w_p\| \quad \text{para } w_p \in E^u(p)$$

Todo difeomorfismo de Anosov tiene un par de foliaciones transversales $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ tales que sus hojas tienen como espacios tangentes los subespacios E^s, E^u respectivamente. Además para N grande (para compensar la constante C en (iii)) el difeomorfismo f^N contrae las hojas estables $W^s(p)$ y expande las hojas inestables $W^u(p)$. Las hojas estables $W^s(p)$ son copias de \mathbf{R}^s inmersas en M , donde $s = \dim E^s(p)$, similarmente para $W^u(p)$.

La única superficie compacta orientable que admite un difeomorfismo de Anosov es el Toro T^2 , pues es la única superficie que admite un campo de líneas \mathcal{F}^s (o \mathcal{F}^u) (pues es la única que tiene característica de Euler = 0).

Ahora mostraremos una partición de Markov para el automorfismo del toro con matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Para esto necesitamos unas definiciones. Dado

$\epsilon > 0$, la **variedad estable local** $W^s_\epsilon(p)$ y la **variedad inestable local** $W^u_\epsilon(p)$ de un punto $p \in T^2$ se definen como

$$W^s_\epsilon(p) := \{q \in T^2 / d(F^n(p), F^n(q)) < \epsilon \text{ para todo } n \geq 0\}$$

$$W^u_\epsilon(p) := \{q \in T^2 / d(F^{-n}(p), F^{-n}(q)) < \epsilon \text{ para todo } n \geq 0\}$$

Un **rectángulo** R es un conjunto $R \subseteq T^2$ tal que

- (i) R = clausura (interior (R))
- (ii) La frontera ∂R se descompone en $\partial R = R^s \cup R^u$ donde $R^s \subseteq$ variedades estables locales y $R^u \subseteq$ variedades inestables locales. Con mayor precisión, si $x \in R^s$ la (componente convexa de x en R^s) $\subseteq W^s_\epsilon(x)$.

Una **partición de Markov** es una colección finita de rectángulos $\{R_1, \dots, R_N\}$ tal que

$$(i) T^2 = \bigcup_{i=1}^N R_i$$

- (ii) Los R_i 's tiene interiores disjuntos

- (iii) Si $x \in R_i \cap f^{-1}(R_j) \neq \emptyset$ entonces

$$R_j \cap W^u_\epsilon(fx) \subseteq f(R_i \cap W^u_\epsilon(x))$$

$$f(R_i \cap W^s_\epsilon(x)) \subseteq R_j \cap W^s_\epsilon(fx)$$

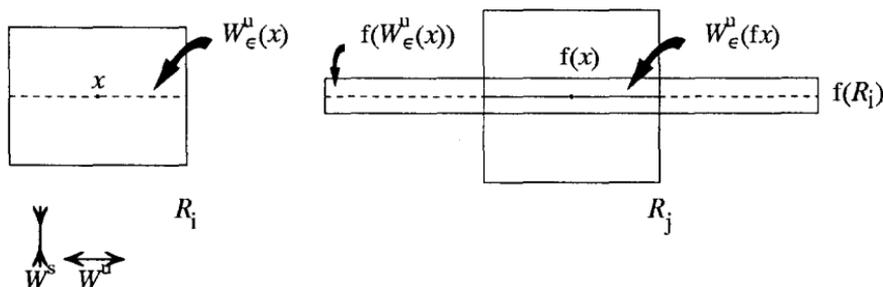


Fig. 1

A esta última la llamaremos la "condición de Markov".

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $F : \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$ el automorfismo del Toro con matriz \mathbf{A} . La imagen del dominio fundamental $[0,1]^2$ es el paralelogramo de vértices $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La figura 2 muestra gráficamente que $F(T^2) = T^2$.

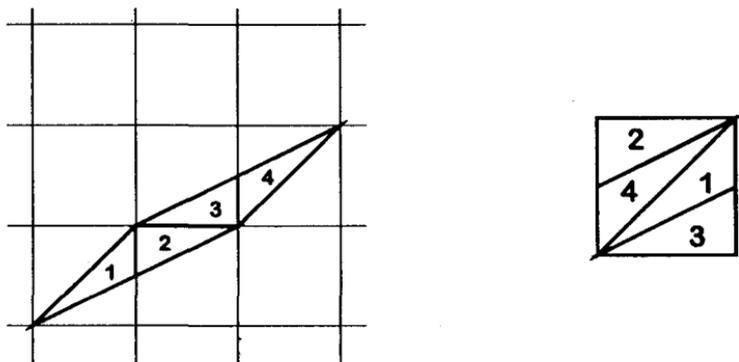


Fig. 2

Consideremos los espacios propios \mathbf{E}^s , \mathbf{E}^u y definamos los paralelogramos \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 en \mathbf{R}^2 por

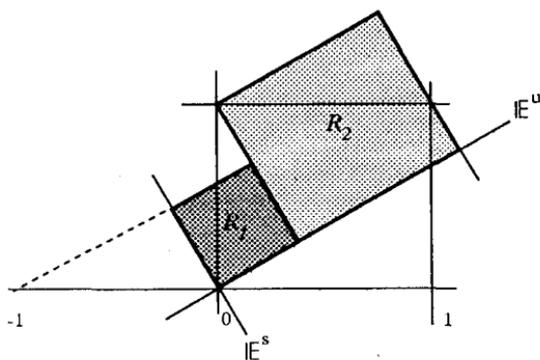


Fig. 3

$$\partial \tilde{R}_1 \subseteq \mathbf{E}^u \cup \mathbf{E}^s \cup \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{E}^u \right] \cup \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{E}^s \right]$$

$$\partial \tilde{R}_2 \subseteq \mathbf{E}^u \cup \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{E}^s \right] \cup \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{E}^s \right] \cup \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{E}^u \right]$$

Sean $R_1 = \pi(\tilde{R}_1)$, $R_2 = \pi(\tilde{R}_2)$. La figura 4 muestra que $R_1 \cup R_2 = T^2$ y $\text{int}(R_1) \cap \text{int}(R_2) = \emptyset$. Como las fronteras de R_1 y R_2 están dentro de variedades estables o inestables locales, tenemos que R_1 y R_2 son "rectángulos".

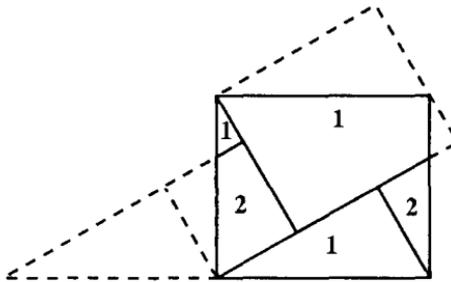


Fig. 4

Nos falta mostrar que $\{R_1, R_2\}$ satisface la condición de Markov (iii). Una lectura atenta de las siguientes figuras debe convencer al lector de esto. Obsérvese que para

$$p \in \mathbf{R}^2, \mathbf{A}(p + \mathbf{E}^s) = \mathbf{A}(p) + \mathbf{E}^s, \mathbf{A}(p + \mathbf{E}^u) = \mathbf{A}(p) + \mathbf{E}^u.$$

Luego las imágenes de los segmentos $[A, P]$ y $[E, Q]$ tienen que ser segmentos paralelos a \mathbf{E}^s . Similarmente las imágenes de los segmentos $[D, R]$ y $[A, E]$ tienen que ser paralelos a \mathbf{E}^u . Como O es el punto fijo de \mathbf{A} , tendremos que

$$\mathbf{A}([O, Q]) \subseteq \mathbf{E}^u, \mathbf{A}([O, D]) \subseteq \mathbf{E}^s.$$

Obsérvese también que R y Q se proyectan sobre el mismo punto en T^2 , de hecho $Q = P + (1, 0)$ y luego

$$\mathbf{A}Q = \mathbf{A}P + (2, 1).$$

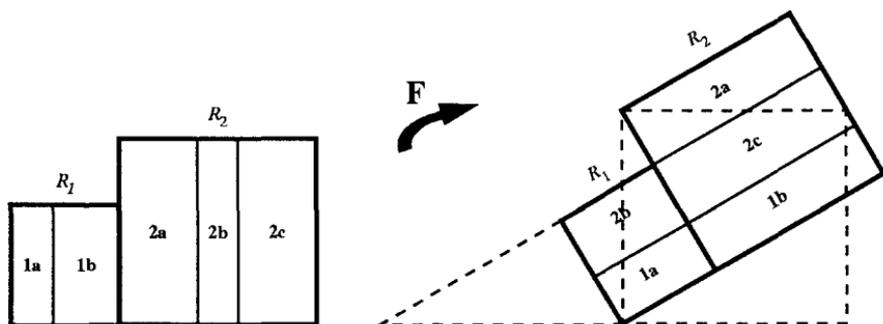


Fig. 7

Ahora vamos a usar esta partición de Markov para describir la dinámica de F . Podríamos definir la función “itinerario” $\Pi: T^2 \rightarrow \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ que a cada punto $p \in T^2$ le asigna una sucesión de 1’s y 2’s correspondiente a los rectángulos R_1 o R_2 que el punto p visita al ser iterado por F , i.e.

$\Pi(p) = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, con $F^n(p) \in R_{x_n}$. Al punto $F(p)$ le correspondería la sucesión $\Pi(p)$ pero con un lugar desplazado hacia la izquierda, i.e.

$$\Pi(F(p))(n) = \Pi(p)(n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Esto motiva la definición de la función $\sigma: \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ del espacio de sucesiones que desplaza un lugar hacia la izquierda (σ se llama “shift” en inglés):

$$\sigma(x)(n) = x(n+1).$$

Tendríamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{F} & T^2 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \{1,2\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Fig. 8

Pero esto todavía no es satisfactorio. La función Π no es inyectiva. El siguiente diagrama muestra las posibles imágenes de puntos en R_1 o R_2 .



Fig. 9

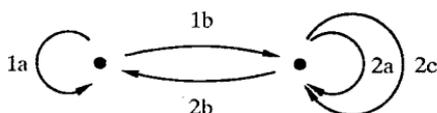


Fig. 10

Si tenemos una sucesión $(\dots, \underline{x}_0, x_1, \dots) = (\dots, \underline{2}, 2, \dots) = \Pi(p)$, no podemos saber si el punto p está en el subrectángulo $2a$ o $2c$. Podemos solucionar este problema de dos formas:

La primera es cambiando la partición del Markov, por ejemplo, podemos usar $R_1, R_{ab} = \{2a, 2b\}, R_c = 2c$. Tendríamos el gráfico:

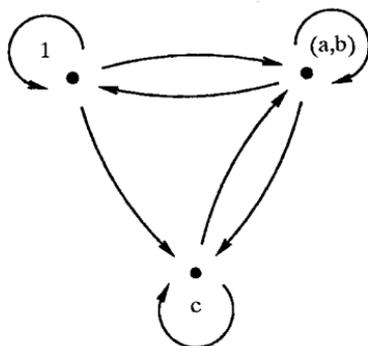


Fig. 11

La segunda es cambiando la forma de codificar las órbitas de F . En lugar de llevar un registro de los vértices del gráfico 9 por los que se pasa, nuestra función itinerario puede llevar un registro de las aristas del gráfico 10 por

las que se pasa. Ahora el conjunto de símbolos tendrá cinco elementos $\{1a, 1b, 2a, 2b, 2c\}$ y la nueva función itinerario será

$$II: T^2 \rightarrow \{1a, 1b, 2a, 2b, 2c\}^{\mathbb{Z}}.$$

Como la anterior, sólo hay ambigüedad cuando la órbita de un punto $p: \{F^n(p) / n \in \mathbb{Z}\}$ pasa por la frontera de un rectángulo, por lo demás \tilde{II} es inyectiva. A esta forma le corresponde el gráfico 12. A cada arista del gráfico 10 le corresponde un vértice del gráfico 12. El gráfico 12 tiene una arista del vértice x al vértice y si la cola de $y =$ punta de x .

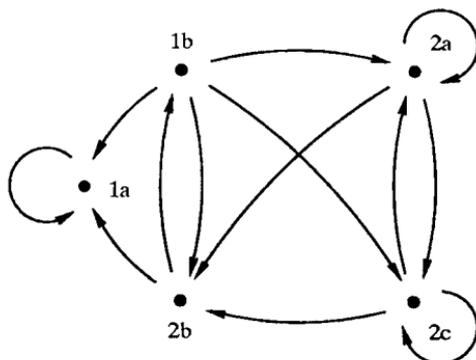


Fig. 12

Pero ahora estas funciones itinerario no son suryectivas, su imagen es el conjunto de caminos biinfinitos (para adelante o para atrás) en el gráfico correspondiente. Dado un gráfico con N vértices definimos su **matriz de transición** $A \in \mathbb{N}^{N \times N}$ como la matriz $N \times N$ con entradas $A_{ij} =$ número de aristas que van del vértice i al vértice j . Si las entradas de la matriz A son todas 0 o 1 como en los gráficos 11 y 12, definimos el **shift de tipo finito** Σ_A con matriz A , como

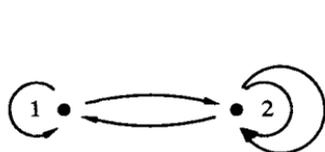
$$\Sigma_A := \{\bar{x} \in \{1, \dots, N\} \mid A_{x_n, x_{n+1}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

i.e. el conjunto de sucesiones de vértices de los caminos posibles en el gráfico. Si la matriz A tiene entradas mayores que 1 (como en el gráfico 9) hacemos el gráfico con vértices correspondientes a las aristas del gráfico original, como el gráfico 12 hecho a partir del 9. Como antes, tenemos la aplicación $\sigma_A: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ de corrimiento a la izquierda (shift) $\sigma_A(\bar{x})(n) = x_{n+1}$. Dejamos al lector verificar que si A es una matriz de 0's y 1's, entonces la

matriz B obtenida a partir del gráfico de A por el procedimiento anterior, da un shift Σ_B equivalente a Σ_A en el sentido de que existe $k: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_B$ biyectiva, tal que el diagrama

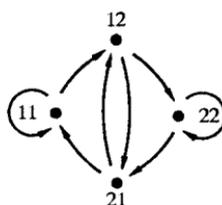
$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \\ k \downarrow & & \downarrow k \\ \Sigma_B & \xrightarrow{\sigma_B} & \Sigma_B \end{array}$$

conmuta. Por ejemplo, en los gráficos 13 y 14, $k: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_B$, es $k(\bar{x}) = \bar{y}$, con cola de $y_n = x_n$ y punta de $y_n = x_{n+1}$.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 13



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix}$$

11 12 21 22

Fig. 14

Escogemos el gráfico 9 para modelar la dinámica de F . La partición de Markov correspondiente es R_1, R_2, R_3 , donde

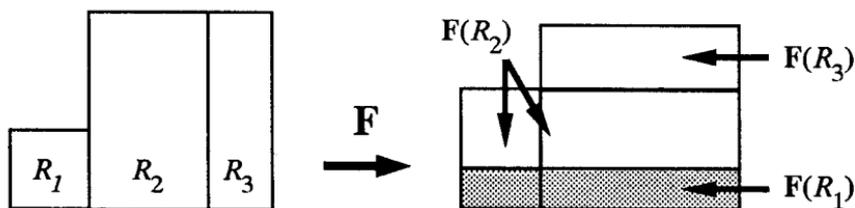


Fig. 15

Definimos $h: \Sigma_A \rightarrow T^2$, por $h(\bar{x}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^{-n}(R_{x_n})$ (el punto cuyo itinerario es \bar{x}). La función h está bien definida pues $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^{-n}(R_{x_n})$ es una intersección no vacía de compactos encajados y

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \text{diam} \left[\bigcap_{n=-N}^N F^{-n}(R_{x_n}) \right] \right\} = 0.$$

Además, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ T^2 & \xrightarrow{F} & T^2 \end{array}$$

conmuta. La función h (que se llama **semi-conjugación topológica**) es a lo más 2 a 1 debido sólo a la ambigüedad de puntos en la intersección de los bordes de dos rectángulos.

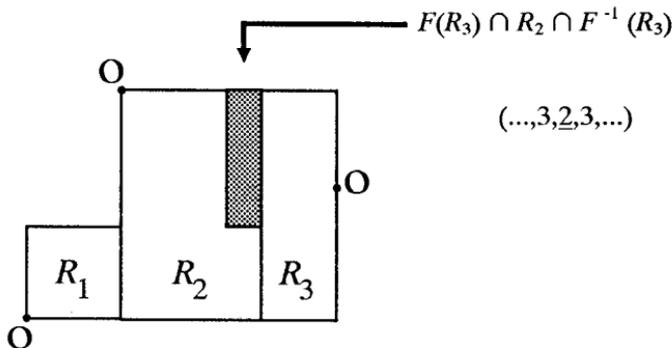


Fig. 16

Podemos, por ejemplo, contar la cantidad de órbitas periódicas de F . Los puntos periódicos corresponden a sucesiones periódicas en Σ_A . Los puntos donde F no es inyectiva están todos en $W^s(o) \cup W^u(o)$. Si $p \in W^s(o) \cup W^u(o)$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = o$ o $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(p) = o$, la sucesión $\bar{x} \in \Sigma_A$ correspondiente a p tiene que contener una sucesión infinita de 1's o de 3's a la derecha o a la izquierda. Las únicas sucesiones periódicas con esta forma son las sucesiones constantes (...111...) y (...333...).

Decimos que una palabra x_0, x_1, \dots, x_M en $\{1, \dots, N\}^M$ es **admisiblesi** $A_{x_k, x_{k+1}} = 1$ para $k = 0, \dots, M-1$, i.e. si corresponde a un camino de longitud M en el gráfico. La cantidad de caminos de longitud M que van del vértice i al vértice j es $(A^M)_{ij}$. Esto puede ser probado fácilmente por inducción. Un camino cerrado x_0, \dots, x_M , con $x_0 = x_M$, $A_{x_k, x_{k+1}} = 1 \quad \forall k \leq M-1$, corresponde a una órbita periódica de período M formando la sucesión

$$(x_0, x_1, \dots, x_M, x_0, x_1, \dots, x_M, \dots) \in \sum_A.$$

La cantidad de puntos periódicos de período M será entonces

$$\# \text{Fix}(F^M) = \text{traza}(A^M) - 1,$$

restando el punto duplicado $(\dots 111 \dots) = (\dots 333 \dots)$.

Tenemos entonces que F tiene infinitas órbitas periódicas.

De hecho, la cantidad de puntos periódicos crece exponencialmente con el período M : $\# \text{Fix}(F^M) \sim e^{\lambda M}$,

$$\begin{aligned} \lambda &:= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \log \# \text{Fix}(F^M) \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \log [\text{traza}(A^M)] \\ &= \text{mayor autovalor de } A \end{aligned}$$

pues $\text{traza}(A^M) = \sum (\text{autovalores de } A^M) = \sum (\text{autovalores de } A)^M$. Para este cálculo podríamos haber usado la matriz del gráfico 9, 11 o 12. La del gráfico 9 es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtenemos

$$\lambda = \log \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

También puede verse que las órbitas cerradas son densas en T^2 . Esto puede hacerse usando la correspondencia $h: \sum_A \rightarrow T^2$ (dinámica simbólica), o el siguiente argumento. Obsérvese que como \mathbf{A} tiene coeficientes enteros, entonces $\mathbf{A}(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$. Consideremos los puntos de $T^2 \approx \mathbf{T}([0,1] \times [0,1])$, con coordenadas racionales $(p/q, r/q)$ con $0 \leq p, r \leq q$. Las imágenes

$$\mathbf{A}^N \left[\begin{pmatrix} p/q \\ r/q \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^2 \right] = \begin{pmatrix} a/q \\ b/q \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^2$$

son siempre puntos con coordenadas con denominador q . Luego estos puntos necesariamente tienen órbita finita y por tanto son periódicos.

Veamos que $F: T^2 \dashrightarrow$ tiene una órbita densa. Para esto introducimos una métrica en Σ_A , dada por $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma_A$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2^k}, \quad k := \min \{l \in \mathbf{N} \mid x_i = y_i \quad \forall |i| < l\}.$$

El lector puede convencerse que entonces $h: \Sigma_A \rightarrow T^2$ es continua. Para ver que F tiene una órbita densa basta mostrar que $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ tiene una órbita densa. Queremos un punto $\bar{x} \in \Sigma_A$ tal que sus iterados $\{\sigma^n \bar{x} \mid n \in \mathbf{Z}\}$ visiten todas las bolas $B(\bar{y}, 1/2^k) = \{\bar{z} \in \Sigma_A \mid z_i = y_i \quad \forall |i| < k\}$. Basta que en la sucesión \bar{x} aparezcan todas las palabras finitas admisibles, por ejemplo, para el gráfico 11, un tal \bar{x} podría ser

$$(\dots, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 2 \bar{1} \bar{1} \bar{2} \bar{1} \bar{3} \bar{2} \bar{1} \bar{2} \bar{2} \bar{3} \bar{3} \bar{2} \bar{1} \bar{1} \bar{1} \bar{1} \bar{2} \dots).$$

Usando técnicas de Teoría Ergódica puede mostrarse que en realidad la medida (de Lebesgue) de los puntos que no tienen órbitas densas es nula. De hecho para Lebesgue, casi todo punto $p \in T^2$, la órbita de p , se distribuye como la medida de Lebesgue. Es decir si tomamos (Lebesgue) al azar un punto $p \in [0,1] \times [0,1]$ y lo iteramos por F , entonces con probabilidad 1, sus iterados se distribuirán uniformemente en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

Otro uso importante de la dinámica simbólica es la construcción de medidas invariantes por F . Estas pueden ser construidas en el shift Σ_A y luego ser llevadas a T^2 por h . Un mismo shift puede ser modelo de varios sistemas dinámicos geométricos. Esto hace de un shift de tipo finito un objeto interesante para ser estudiado por sí mismo.

Gonzalo Contreras
 gonzalo@mat.puc-rio.br
 Departamento de Matemáticas
 Pontificia Universidade Católica de Rio de Janeiro
 R. Marquês de São Vicente, 225
 Gávea 22453
 Rio de Janeiro
 Brasil