Pro Mathematica, Vol. IX, Nos. 17-18-1995

LA ECUACION DE BENJAMIN-BONA-MAHONY GENERALIZADA. EXISTENCIA DE SOLUCIONES.

Juan **Montealegre**

1. Introducción.

En este artículo estudiamos el problema de valor inicial no lineal

$$(1.1) \qquad \begin{cases} M\partial_t u(x,t) - \partial_x\left(u + \dfrac{u^{p+1}}{p+1}\right)(x,t) = 0 & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

donde $u_0 \in H^s$, *p es un entero positivo y* $M: H^s \to L^2$ *es el operador seudo-diferencial definido por*

$$(1.2) \qquad \mathcal{F}Mu(y) = m(y)\hat{u}(y) \qquad u \in H^s$$

para todo $y \in \mathbf{R}$.

Profesor del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas. PUCP.

La ecuación en (1.1) es una extensión de la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

que modela ondas largas con pequeña amplitud en sistemas dispersivos no lineales, y fué propuesta como un modelo alternativo para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

El resultado principal, expuesto en este artículo , dice que con asunciones adecuadas sobre el símbolo m, el problema (1.1) tiene solución global única en H^s, donde $s\geq 2$.

Con este fin organizamos el artículo como sigue. En la Sección 2, consideramos el problema lineal asociado con (1.1), es decir

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} M\partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t) = 0 & x \in \mathbf{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

y mostramos que $u(x,t) = S(t)u_0(x)$ es la solución, siendo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo generado por $M^{-1}\partial_x$. En la Sección 3 iniciamos el estudio del problema no lineal (1.1), en primer lugar probamos que la ecuación integral asociada con el problema tiene una única solución local. Después mostramos, en la misma Sección, que tal solución es la solución buscada para (1.1). La Sección 4 es dedicada al estudio global del problema (1.1), empezamos mostrando algunas *estimativas a priori* que serán útiles en el estudio global.

Las siguientes notaciones serán utilizadas. Para $1 \leq p < \infty$, L^p denotará al espacio de funciones medibles u en $\mathbf{R}$ con la norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_R |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p};$$

mientras que L^∞ denota al espacio de funciones medibles u esencialmente limitadas en $\mathbf{R}$ con la norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup \operatorname{ess}_{x\in R} |u(x)|.$$

La transformada de Fourier es definida, para funciones suaves u con soporte compacto en $\mathbf{R}$ por

$$\mathcal{F}u(y) = \hat{u}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-ixy}u(x)dx;$$

y ésta definición es extendida en la forma usual por continuidad al espacio $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ de las distribuciones temperadas en **R**. Para cualquier $s\in\mathbf{R}$, el espacio de Sobolev H^s es definido como el subespacio de las distribuciones temperadas u tales que $\hat{u}$ es una función y la norma

$$\|u\|_{H^s} = \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}$$

es finita. Por C^k indicamos el espacio de las funciones continuas cuyas derivadas hasta el orden k son también continuas. Diferentes constantes positivas serán denotadas por c, pero ellas pueden variar de una línea para otra. Su dependencia sobre los parámetros será destacada cuando pensemos que es necesario.

2. El problema lineal.

En esta sección estudiamos el problema lineal (1.3). Sea $s \geq 1$ y definimos el operador M: $H^S \to L^2$ como en (1.2). Asumimos que el símbolo m satisface las condiciones dadas a continuación:

H1. $m\in C^0$.

H2. Existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

(2.1) $$0 < c_1(1+|y|)^s \leq m(y) \leq c_2(1+|y|^s),$$

para todo $y\in\mathbf{R}$.

De H1, H2 y la identidad de Plancherel sigue que el operador lineal M es acretivo y simétrico. Además, $I+M$ es sobreyectivo, por lo tanto, M es m-acretivo. En consecuencia, M es auto-adjunto y cerrado.

Proposición 2.1 *Sea M: $H^S \to L^2$, con $s \geq 1$, satisfaciendo las asunciones H1 y H2. Entonces el operador M^{-1} existe y para toda $u \in L^2$*

$$M^{-1}u = k*u,$$

donde $\hat{k}(y) = m^{-1}(y)$ y $*$ denota la convolución en la variable espacial.

Prueba. Del teorema de Plancherel y (2.1), para cualquier $u \in H^s$ obtenemos

$$||Mu||^2_{L^2} = ||m(\cdot)\hat{u}(\cdot)||^2_{L^2} \geq \int_R (1+|y|)^{2s} |\hat{u}(y)|^2\, dy \leq c||u||^2_{H^s},$$

en consecuencia, M es inyectivo. Así, para el operador cerrado y densamente definido M, existe una constante $c > 0$ tal que

$$||M^* u||_{L^2} \geq c||u||_{H^s} \quad \forall u \in D(M^*).$$

Entonces M es sobreyectivo, y la primera parte esta probada. Por definición

$$\hat{k}(y) = m^{-1}(y),$$

entonces

$$\mathcal{F}(M^{-1})u(y) = m^{-1}(y)\hat{u}(y) = \hat{k}(y)\hat{u}(y) = \mathcal{F}(k * u)(y)$$

lo que prueba la segunda parte, porque M es sobreyectivo. □

Sea $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^S$ y para $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ definimos $\mathcal{A}u = M^{-1}\, \partial_x u$.

Es claro que $\mathcal{A}$: $H^S \rightarrow H^S$ es un operador lineal en H^s. Tenemos además

Proposición 2.2 *$\mathcal{A}u \in H^S$ siempre que $u \in H^S$, y existe $c > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{A}u\|_{H^s} \leq c\|u\|_{H^s}.$$

Prueba: Por la Proposición 2.1 y el teorema de Plancherel tenemos para todo $u \in H^S$

$$\|\mathcal{A}u\|^2_{H^s} = \|\mathcal{F}(k * \partial_x)u(\cdot)\|^2_{H^s} = \|\frac{1}{m(\cdot)}\mathcal{F}(\partial_x u)(\cdot)\|^2_{H^s} = \int_R (1+|y|^2)^s \frac{y^2}{m^2(y)} |\hat{u}(y)|^2\, dy.$$

Entonces por (2.1)

$$||\mathcal{A}u||^2_{H^s} \leq c||u||^2_{H^s} \sup_{y \in R} (1+|y|)^{2-2s} \leq c||u||^2_{H^s},$$

pues $sup_{y \in R}(1+|y|^{2-2S})$ está bien definido, dado que $s \geq 1$. □

Teorema 2.3 *El operador $\mathcal{A}$ genera un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en H^S satisfaciendo*

$$\mathcal{F}(S(t)u)(y) = e^{\frac{iy}{m(y)}t}\, u(y)$$

para todo $u \in H^S$

Prueba. Ver el Teorema I.1.2 de [P]. □

Corolario 2.4 *Para todo* $u_0 \in H^s$ *donde* $s \geq 1$, existe una única $u \in C^1([0,\infty): H^s$ *satisfaciendo el problema lineal* (1.3). *Esta solución es dada por*

$$u(x,t) = S(t)u_0(x).$$

Prueba. Ver el Teorema 3.1.1 de [C-H]. □

3. El problema no lineal. Existencia de soluciones locales en H^s, $s \geq 1$.

Iniciamos el estudio del probema no lineal

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} M\partial_t u(x,t) - \partial_x\left(u + \frac{u^{p+1}}{p+1}\right)(x,t) = 0 & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Para esto consideramos la ecuación integral

$$\text{(3.2)} \qquad u(x,t) = S(t)u_0(x) + \frac{1}{p+1}\int_0^t S(t-s)\mathcal{A}u^{p+1}(x,s)ds$$

donde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por $\mathcal{A}$, la cual a diferencia de la ecuación en (3.1), no requiere ninguna diferenciabilidad de la solución. Usando las propiedades descritas en el Teorema 2.3 y el Corolario 2.4, es fácil ver que si u es solución de (3.1), también lo es de (3.2). En efecto, de

$$g(s) = S(t-s)u(x,s)$$

tenemos

$$\frac{d}{ds}g(s) = \frac{1}{p+1}S(t-s)\mathcal{A}u^{p+1}(x,s)$$

e integrando desde 0 hasta t

$$g(t) = g(0) + \frac{1}{p+1}\int_0^t S(t-s)\mathcal{A}u^{p+1}(x,s)ds$$

que es la ecuación (3.2).

Diremos que la ecuación integral (3.2) está *globalmente bien colocada* en H^S si para todo T la función

$$F : H^S \to C\,([0,T]: H^S) \qquad u_0 \mapsto u(.\,,t)$$

es continua, donde $u(.,t)$ es la solución de (3.2). De esta forma, la existencia, unicidad, persistencia (la solución pertenece al mismo espacio que el dato inicial) y dependencia continua de la solución respecto del dato inicial están incluidas. Si $T<\infty$ se dice que (3.2) es *localmente bien colocada* en H^S.

Para todo par T y R de constantes positivas definimos

$$\mathcal{E}(T,R) = \left\{ v \in C([0,T]:H^s) : \sup_{[0,T]} \|v(.,t)\|_{H^s} \le R \right\}$$

$$d(v,w) = \sup_{[0,T]} \|v(.,t)\|_{H^S}.$$

Notemos que $(\mathcal{E}(T,R),d)$ es un espacio de Banach.

Proposición 3.1 *Si* $u_0 \in H^S$ *entonces existen constantes positivas* $T=T(\|u_0\|_{H^S}) > 0$ y $R>0$ *tales que el operador* Φ *definido por*

$$\Phi(u)(x,t) = S(t)u_0(x) + \frac{1}{p+1}\int_0^t S(t-s)\partial_x u^{p+1}(x,s)ds$$

satisface

$$\Phi\colon \mathcal{E}(T,R) \to \mathcal{E}(T,R).$$

Prueba. Sea $u \in \mathcal{E}(T,R)$, por la definición de Φ, la desigualdad triangular, el Teorema 2.3 y la Proposición 2.2 obtenemos

$$\|\Phi(u)(.,t)_{H^s} \le \|u_0\|_{H^s} + \frac{c}{p+1}\int_0^t \|u^{p+1}(.,s)\|_{H^s} ds \le \|u_0\|_{H^s} + \frac{ct\,R^{p+1}}{p+1}.$$

Por lo tanto, tomando supremo en $[0,T]$

$$\sup_{[0,T]} \|\Phi(u)(t)\|_{H^s} \le \|u_0\|_{H^s} + \frac{cT\,R^{p+1}}{p+1}.$$

Si fijamos $R = 2\|u_0\|_{H^s}$ y tomamos $T_0 > 0$ tal que

$$\frac{2^{p+1} cT_0}{p+1} \|u_0\|^p_{H^s} \leq 1$$

tenemos

$$\sup_{[0,T]} \|\Phi(u)(.,t)\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s} \left[1 + \frac{2^{p+1} cT_0}{p+1} \|u_0\|^p_{H^s} \right] \leq 2\|u_0\|_{H^s}$$

lo que completa la prueba. □

Teorema 3.2 *Para todo* $u_0 \in H^S$, *existen* $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ *y una única solución de la ecuación integral* (3.2) *en el intervalo de tiempo* $[0,T]$ *con* $u \in C([0,T] : H^S)$. *Más aún, para todo* $T' < T$ *existe una vencidad* V *de* u_0 *en* H^S *tal que*

$$F : V \to C([0,T']: H^S) \quad u_0 \mapsto u(.,t)$$

es lipschitziana.

Prueba. Dividimos la prueba en dos Etapas.

Etapa 1. Con el objeto de usar el Teorema del Punto Fijo de Banach, necesitamos probar que Φ es una contracción. Si $u,v \in \mathcal{E}(T,R)$ tenemos

$$\|(\Phi(u) - \Phi(v))(.,t)\|_{H^s} \leq \frac{c}{p+1} \int_0^t \|(u^{p+1} - v^{p+1})(.,s)\|_{H^s} ds.$$

Como H^S es una álgebra obtenemos

$$\|(u^{p+1} - v^{p+1})(.,s)\|_{H^s} \leq \|(u-v)(.,s)\|_{H^s} \sum_{j=0}^{p} \|u(.,s)\|^{p-j}_{H^s} \|v(.,s)\|^{j}_{H^s}.$$

En consecuencia

$$\|(\Phi(u) - \Phi(v))(t)\|_{H^s} \leq \frac{2cR}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \int_0^t \|u(.,s)\|^{p-j}_{H^s} \|v(.,s)\|^{j}_{H^s} ds \leq \frac{2cptR^{p+1}}{p+1}.$$

Por lo tanto, tomando supremo en $[0,T]$

$$\sup_{[0,T]} \|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\|_{H^s} \leq \frac{2cpTR^{p+1}}{p+1}.$$

Finalmente por la elección de R y la desigualdad (3.3) obtenemos la existencia, unicidad y persistencia de la solución de la ecuación (3.2).

Etapa 2. Para probar la continuidad de Φ respecto a u_0, observamos que si u y v son las soluciones de (3.2) correspondientes a los datos u_0 y v_0, entonces

$$u(x,t)-v(x,t) = S(t)(u_0-v_0)(x) + \frac{1}{p+1}\int_0^t S(t-s)\mathcal{A}(u^{p+1}-v^{p+1})(x,s)ds;$$

y con el mismo argumento de la Etapa 1 obtenemos

$$\|u(.,t)-v(.,t)\|_{H^s} \leq \|u_0-v_0\|_{H^s} + \frac{c}{p+1}\int_0^t \|(u-v)(.,s)\|_{H^s} \left\|\sum_{j=0}^{p} u^{p-j}v^j(.,s)\right\|_{H^s} ds.$$

Recordando que H^s es un álgebra

$$\left\|\sum_{j=0}^{p} u^{p-j}v^j(.,s)\right\|_{H^s} \leq \sum_{j=0}^{p} \|u(.,s)\|_{H^s}^{p-j} \|v(.,s)\|_{H^s}^{j},$$

entonces

$$\|u(.,t)-v(.,t)\|_{H^s} \leq \|u_0-v_0\|_{H^s} + \frac{cpTR^p}{p+1} \sup_{[0,T]} \|u(.,s)-v(.,s)\|_{H^s}.$$

Luego

$$\sup_{[0,T]} \|u(.,s)-v(.,s)\|_{H^s} \leq c\|u_0-v_0\|_{H^s}$$

lo cual completa la prueba del Teorema. □

Mostraremos ahora que la solución encontrada para (3.2) es la solución buscada para (3.1). Específicamente, probaremos el siguiente Teorema.

Teorema 3.3 (Existencia Local). *Sea* $u_0 \in H^S$ *donde* $s \geq 1$, p *es un entero positivo y* M: $H^S \to L^2$ *satisface H1 y H2. Entonces existe* $T_0 > 0$ *y una única* $u \in C^1([0,T_0]: H^S)$ *solución de* (3.1).

Prueba. Por el Teorema 3.2

$$(3.4)\quad u(x,t) = S(t)u_0(x) + \frac{1}{p+1}\int_0^t S(t-s)\mathcal{A}u^{p+1}(x,s)ds = v(x,t) + w(x,t).$$

Como $v(x,t) = S(t)u_0(x)$ satisface el problema lineal (1.3), es suficiente probar que

$$(3.5)\qquad w(x,t) = \frac{1}{p+1}\int_0^t S(t-s)\mathcal{A}u^{p+1}(x,s)ds$$

es solución de

$$(3.6)\qquad \begin{cases} M\partial_t u(x,t)\left(u + \frac{u^{p+1}}{p+1}\right)(x,t) = 0 & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

De (3.5) es claro que $w(x,0) = 0$. Resta claclular $\frac{\partial w}{\partial t}$. Hacemos

$$F(x,s) = \mathcal{A}\frac{u^{p+1}}{p+1}(x,s)$$

en (3.5), entonces

$$w(x,t) = \int_0^t S(t-s)F(x,s)ds.$$

Para $h > 0$ tenemos

$$\frac{w(x,t+h) - w(x,t)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(t-s)S(h)F(x,s)ds - \int_0^t S(t-s)F(x,s)ds\right]$$

$$+\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)F(x,s)ds,$$

por lo tanto

$$\frac{w(x,t+h)-w(x,t)}{h}=\int_0^t S(t-s)\frac{S(h)-I}{h}F(x,s)ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)F(x,s)ds.$$
(3.7)

Cuando $h\downarrow 0$ el Teorema de la Convergencia Dominada implica que el primer término del segundo miembro de (3.7) tiende a

$$\int_0^t M^{-1}\partial_x S(t-s)F(x,s)ds,$$

mientras que el segundo término converge a $F(x,t)$ por ser el valor medio de una función continua en el intervalo $[t,t+h]$. Entonces

$$\frac{\partial^+ w}{\partial t}(x,t)=\int_0^t \mathcal{A}S(t-s)F(x,s)ds+F(x,t).$$

Argumento análogo vale para $h<0$. Luego

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)=\mathcal{A}w(x,t)+F(x,t)=\mathcal{A}w(x,t)+\frac{1}{p+1}\mathcal{A}u^{p+1}(x,t),$$

es decir, w satisface la ecuación diferencial en (3.6). Finalmente derivando con respecto a t en (3.4) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\mathcal{A}(v(x,t)+w(x,t))+\frac{1}{p+1}\mathcal{A}u^{p+1}(x,t)=\mathcal{A}u(x,t)+\frac{1}{p+1}\mathcal{A}u^{p+1}(x,t).$$

Entonces

$$M\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\partial_x\left(u+\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)(x,t)=0,$$

lo que termina la prueba.

4. Existencia de soluciones globales para el problema no lineal en H^s, $s\geq 2$.

Del Teorema 3.3 sigue que el problema de valor inicial (3.1) tiene una única solución local. Para probar que ésta es una solución global es suficiente probar para todo $T>0$ que si u es una solución de (3.1) en $[0,T)$ entonces $\|u(.,t)\|_{H^s}\leq c(T)$ para $0\leq t\leq T$ y alguna constante $c(T)$.

Proposición 4.1 *Sea* $u_0 \in H^s$, $s \geq 2$, *y sea* u *la solución del problema no lineal* (3.1) *en* $[0,T)$, *entonces* $\|u(.,t)\|_{H^s}$ *es limitada en* $[0,T)$.

Prueba. Veamos primero que $\|u(.,t)\|_{H^{s/2}}$ es limitada en $[0,T]$. Para este fin multiplicamos la ecuación en (3.1) por u e integramos sobre **R**

$$\int_R u(x,t)M\partial_t u(x,t)dx - \int_R u(x,t)\partial_x\left(u + \frac{1}{p+1}u^{p+1}\right)(x,t)dx = 0.$$

Pero

$$\int_R u(x,t)M\partial_t u(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_R u(x,t)Mu(x,t)dx$$

e integrando por partes, recordando que $H^S \subset\!\!\to C_\infty$ da

$$\int_R u(x,t)\partial_x\left(u + \frac{1}{p+1}u^{p+1}\right)(x,t)dx = 0.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}\int_R u(x,t)Mu(x,t)dx = 0. \tag{4.1}$$

Integrando (4.1) en el tiempo, desde 0 hasta t da

$$0 = \int_0^t \frac{d}{ds}\int_R u(x,s)Mu(x,s)dxds = \int_R u(x,t)Mu(x,t)dx = \int_R u_0(x,t)Mu_0(x)dx.$$

Para la identidad de Plancherel y H1 tenemos

$$\int_R m(y)\left[|\hat{u}(y,t)|^2 - |\hat{u}_0(y)|^2\right]dy \geq c\int_R \left(1+|y|^2\right)^{s/2}\left[|\hat{u}(y,t)|^2 - |\hat{u}_0(y)|^2\right]dy,$$

y por lo tanto

$$\|u(.,t)\|_{H^{s/2}} \leq \|u_0\|_{H^{s/2}} \tag{4.2}$$

para todo t donde u existe.

Mostraremos ahora que para cada t, $u(.,t) \in H^S$. Multiplicando (3.1) por Mu e integrando sobre **R** tenemos

$$(4.3)\quad \int_R Mu(x,t)M\partial_t u(x,t)dx - \int_R Mu(x,t)\partial_x\left(u + \frac{1}{p+1}u^{p+1}\right)(x,t)dx = 0.$$

Notemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||Mu(.,t)||_{L^2}^2 = \int_R Mu(x,t)M\partial_t u(x,t)dx$$

y

$$\int_R Mu(x,t)\partial_x u(x,t)dx = 0.$$

Así de (4.3) por la desigualdad de Hölder

$$\frac{d}{dt}||Mu(.,t)||_{L^2}^2 \leq 2||u^p(.,t)\partial_x u(.,t)||_{L^2}\,||Mu(.,)||_{L^2}.$$

Usando la desigualdad $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, con p y q exponentes conjugados y $a,b \in \mathbf{R}$, obtenemos

$$(4.4)\qquad \frac{d}{dt}||Mu(.,t)||_{L^2}^2 \leq ||u^p(.,t)\partial_x u(.,t)||_{L^2}^2 + ||Mu(.,t)||_{L^2}^2.$$

Por otro lado

$$||u^p(.,t)\partial_x u(.,t)||_{L^2}^2 \leq ||u(.,t)||_{L^\infty}^{2p}\int_R|\partial_x u(x,t)|^2\,dx = ||u(.,t)||_{L^\infty}^{2p}\,||\partial_x u(.,t)||_{L^2}^2$$
(4.5)

Además $H^{s/2} \hookrightarrow L^\infty$, entonces

$$||u(.,t)||_{L^\infty} \leq c||u(.,t)||_{H^{s/2}}$$

para todo $u \in H^{s/2}$. Más aún $H^{s/2} \hookrightarrow H^1 \hookrightarrow L^2$, luego

$$||\partial_x u(.,t)||_{L^2} \leq c||u(.,t)||_{H^{s/2}}.$$

Por lo tanto sustituyendo en (4.5)

$$||u^p(.,t)\partial_x u(.,t)||_{L^2}^2 \leq c||u(.,t)||_{H^{s/2}}^p\,||\partial_x u(.,t)||_{L^2}^2 \leq c||u(.,t)||_{H^{s/2}}^{2p+2}.$$

En consecuencia, de (4.4) y por (4.2)

$$\frac{d}{dt}\|Mu(.,t)\|_{L^2}^2 \le c\|u_0\|_{L^{s+2}}^{2p+2} + \|Mu(.,t)\|_{L^2}^2 .$$

Integrando desde 0 hasta t da

$$\|Mu(.,t)_{L^2}^2 \le c(t) + \int_0^t \|Mu(.,s)\|_{L^2}^2 ds$$

donde $c(t) = ct\|u_0\|_{H^{s/2}}^{2p+2}$, lo que por la desigualdad de Gronwall implica

$$\|Mu(.,t)\|_{L^2}^2 \le c(t)\exp(t) \le cT\|u_0\|_{L^2}^2 \exp(T) \tag{4.6}$$

para todo $0 \le t \le T$. Notemos finalmente que

$$\|Mu(.,t)\|_{L^2}^2 \ge c\int_R \left(1+|y|^2\right)^r |\hat{u}(y,t)|^2\, dy = c\|u(.,t)\|_{H^s}^2 .$$

Por lo tanto en (4.6)

$$\|(u(.,t)\|_{H^s} \le c\sqrt{T}\|u_0\|_{H^{s/2}}^{p+1} \exp(\frac{T}{2}) \tag{4.7}$$

para todo $0 \le t \le T$ como queríamos. □

Mostrado ya que la norma $\|u\|_{H^s}$ no crece con el tiempo, podemos extender una solución del problema a cualquier intervalo de tiempo $[0,T]$ en un número finito de pasos.

Teorema 4.2 (Existencia Global). *Sea* $u_0 \in H^S$, $s \ge 2$. *Entonces, para cada* $T>0$ *existe una única función* $u \in C^1([0,T]: H^2)$ *que resuelve* (3.1) *en* $\mathbf{R}\times[0,T]$ *con* $u(.,0) = u_0(.,0) = u_0$.

Prueba. De (4.7) afirmamos que $u \in C([0,T): H^S)$. En efecto, sean t y h tales que t, $t+h \in [0,T)$ entonces

$$\begin{aligned}\|u(x,t+h) - u(x,t)\|_{H^s} &\le \|[S(t+h) - S(t)]u_0(x)\|_{H^s} \\ &+ \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)F(x,s)\|_{H^s} ds \\ &+ \left\|(S(h)-I)\int_0^t S(t-s)F(x,s)ds\right\|_{H^s}\end{aligned}$$

donde $F(x,s)$ es como en la prueba del Teorema 3.3 . Así

$$\|u(x,t+h)-u(x,t)\|_{H^s} \to 0$$

cuando $h \to 0$. En consecuencia $u \in C([0,T): H^S)$ y puede por lo tanto ser extendida a $[0,T]$. Ahora consideremos el problema

$$(4.8) \qquad \begin{cases} M\partial_t v(x,t) - \partial_x\left(v + \frac{1}{p+1}v^{p+1}\right)(x,t) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) = u(x,T). \end{cases}$$

Por el Teorema 3.3 existe $T^* > 0$ y una única $v \in C([0,T^*]: H^S)$ satisfaciendo (4.8). Definimos entonces

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & 0 \le t \le T \\ v(x,t-T) & T \le t \le T+T^*. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $w(x,0) = u_0(x)$, $w(x,T) = v_0(x)$ y

$$M\partial_t w(x,t) - \partial_x\left(w + \frac{w^{p+1}}{p+1}\right)(x,t) = 0$$

si $t \in [0,T) \cup (0,T^*]$. Además, debido a la continuidad de $u(.,t)$ en $[0,T]$ tenemos

$$\frac{w(x,T)-w(x,T-h)}{h} = \frac{u(x,T)-u(x,T-h)}{h} = \frac{S(T)u_0(x)-S(T-h)u_0(x)}{h}$$

$$+\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} S(T-s)F(x,s)ds + \int_0^{T-h} S(T-s)\frac{I-S(h)}{h}F(x,s)ds$$

donde $h > 0$ es tal que $T - h \in [0,T]$. Entonces

$$\frac{w(x,T)-w(x,T-h)}{h} \xrightarrow{h \downarrow 0} \partial_t^- w(x,T) = \mathcal{A}\left(w + \frac{1}{p+1}w^{p+1}\right)(x,T)$$

porque el cociente de Newton puede ser escrito como el valor medio de una función continua en el intervalo $[T - h,T]$. Sigue así que w es diferenciable a la izquierda del punto T. En la misma forma obtenemos que

$$\partial_t^+ w(x,T) = \mathcal{A}\left(w + \frac{w^{p+1}}{p+1}\right)(x,T).$$

Consecuentemente w es diferenciable en T y

$$M\partial_t w(x,T) - \partial_x\left(w + \frac{w^{p+1}}{p+1}\right)(x,T) = 0.$$

Por lo tanto u puede ser extendida como solución de (3.1) al intervalo $[0,T+T^*]$ y el teorema esta probado. □

Referencias.

[A] R. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, (1975)

[A1] J. Albert. *Dispersion of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation.* J. Differential Equations **63** (1986), 117-134.

[A2] J. Albert. *On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation.* J. Math. Anal. and Appl. **141** (1989), 527-537.

[B-B-M] T. Benjamin, J. Bona, J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **272** (1972), 47-78.

[B-S] J. Bona, R. Smith. *The initial-valve problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. **278** (1975), 555-601.

[Br] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson Paris (1983).

[C-H] T. Cazenave, A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semilinéaires.* Ellipses, Paris 1990.

[P] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, (1984).

[Po] G. Ponce. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución.* Colombia, (1993).

[S] J. C. Saut. *Sur quelques generalisations de l'equation de Korteweg-de Vries.* J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 21-61.