Pro Mathematica, Vol. IX, Nos. 17-18, 1995

RELACION ENTRE LOS TEOREMAS DE HELLY, RADON Y CARATHEODORY

Roberto ***Velásquez***

1. Introducción

El teorema de C. Caratheódory data de 1911.
E. Helly obtuvo la primera demostración de la proposición
que lleva su nombre en 1913; pero,
debido a la situación en Alemania durante la Primera
Gran Guerra, 1914-1918, no pudo publicarla hasta 1923.
Empero, J. Radon, quien conocía el resultado
por comunicación personal de su autor,
publicó, en 1921, una demostración diferente
de la misma proposición.
Los tres teoremas son lógicamente equivalentes, en el sentido
de que cualquiera de ellos permite deducir los demás.
En esta nota probaremos la secuencia lógica de implicaciones:

$$(Radon) \Rightarrow (Helly) \Rightarrow (Caratheódory) \Rightarrow (Radon)$$

que muestra la relación entre estas tres proposiciones.

Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú

Las aplicaciones del teorema de Helly son numerosas y las principales líneas actuales que derivan de él son: separación de conjuntos convexos (Teor. de Kirchberger); la teoría de transversales comunes (Teor. de Santaló); y la teoría de conjuntos estrellados (Teor. de Krasnosselsky).

2. Proposiciones básicas

En principio, el espacio referencial es $\mathbf{R}^n$.

Definición. *Un conjunto finito* $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es ***afínmente dependiente*** *si uno de los puntos de K se puede expresar como combinación afín de los restantes. En caso contrario se dice que es afínmente independiente. La independencia afín es más cómoda que la independencia lineal para la teoría de la Convexidad, por cuanto permite razonar algebraicamente sin considerar la posición del origen.*

Teorema 1. (Radon): Un conjunto C es afínmente dependiente si y sólo si admite una partición en dos subconjuntos no vacíos. C1 y C2, tales que

$$\text{conv. } C1 \cap \text{conv. } C2 = \Phi.$$

Teorema 2. (Helly): *Sea F una familia de conjuntos convexos de* $\mathbf{R}^n$ *tal que toda subfamilia de* $n+1$ *miembros de F tiene intersección no vacía. Entonces, si la familia F es finita o si sus miembros son compactos, la intersección de todos los miembros de F es no vacía.*

Teorema 3. (Carathéodory): *Si p es un punto perteneciente a la cápsula convexa de un conjunto K de* $k>n+1$ *puntos, entonces existe un conjunto M de* $m \leq n+1$ *puntos, contenido en S, tal que p pertenece a la cápsula convexa de M.*

3. Cadena de implicaciones

3.1 Proposición 1. (Radon) $\Rightarrow$ (Helly) *Sea* $F = \{C_i \, / \, i=1,2,\ldots,j\}$ *una familia finita de conjuntos convexos en* $\mathbf{R}^n$, *tal que cada subfamilia de* $n+1$ *miembros tiene intersección no vacía. Se trata de demostrar, con el apoyo del teorema de Radon, que la intersección de todos los miembros de F es no vacía; i.e., existe* $z \in \cap C_i$, $i=1,2,\ldots,j$.

La demostración será por inducción sobre el cardinal de F.

Demostración:

1) Si F tiene $n+1$ miembros, nada hay que demostrar.

2) Supongamos que el teorema es válido para familias de j-1 miembros, con card. $F = j \geq n+2$, y sea para todo $C_i \in F$,

$$x_i \in \cap C_k \text{ tales que } C_k \in F\text{-}\{C_i\}.$$

3) Entonces, $X = \{x_1; x_2; ...; x_j\}$ tiene $j \geq n+2$ puntos y, por el teorema de Radon, existirá una partición de X en dos conjuntos X_1 y X_2 tales que existe $z \in \{\text{conv.} X_1 \cap \text{conv.} X_2\}$.

4) En efecto, sin pérdida de generalidad y para simplificar, supongamos que

$$X_1 = \{x_1; x_2; ...; x_k\} \text{ y } X_2 = \{x_{k+1}; x_{k+2}; ...; x_j\}.$$

5) Por construcción, $X_1 \subset \cap C_i$ tales que $i = k+1, k+2,...,k_j$; y $X_2 \subset \cap C_i$ tales que $i = 1,2,...,k$; pero entonces será $z \in \cap C_i$ para $i=1,2,...,j$. □

3.2 Proposición 2. (Helly) ⇒ (Carathéodory) *Se demostrará que si p pertenece a la cápsula convexa de un conjunto C de $k > n+1$ puntos en* $\mathbf{R}^n$, *entonces p pertenece a la cápsula convexa de un subconjunto K de $n+1$ puntos pertenecientes a la cápsula convexa de C. La demostración se basará en el uso del contrarrecíproco del teorema de Helly.*

Demostración:

1) Sea $p \in \text{conv.} \{p_1; p_2;...;p_k\}$ con $k > n+1$ en $\mathbf{R}^n$.

   Para simplificar la notación y sin pérdida de generalidad, supongamos que $p = 0 = \sum_i \alpha_i p_i$ con $\sum_i \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$.

2) Sea H_i el hiperplano que pasa por p_i y es ortogonal a p_i, es decir

$$H_i = \{x \,/ < x\text{-}p_i, p_i > = 0\}.$$

   Sea H^+_i el semi espacio abierto limitado por H_i que no contiene al origen. Afirmamos que $\cap_i H^+_i = \Phi$, $i=1,2,...,k$; pues, si suponemos que existe $z \in \cap_i H^+_i$, se tendría entonces $< z; p_i >$ mayor que cualquier $<p_i;p_i>$ para $i=1,2,...,k$, de lo cual resultaría

$$0 = <z;0> = <z;\textstyle\sum \alpha_i p_i> = \sum \alpha_i .<z;p_i> \; > \sum \alpha_i .<p_i;p_i> \; > 0,$$

   lo cual es una contradicción; por tanto $\cap H^+_i = \Phi$.

3) Entonces, por el contrarrecíproco del teorema de Helly, existirán $n+1$ subespacios $H^+_1;H^+_2;...;H^+_{n+1}$ cuya intersección es vacía.

4) En tales condiciones afirmamos que $0 \in \text{conv.}\{p_1;p_2;...;p_{n+1}\}$, porque en caso contrario, existiría un hiperplano H que pasando por el origen, dejaría estrictamente a un lado la $\text{conv.}\{p_1;p_2;...;p_{n+1}\}$.

5) Pero entonces, si $H = \{x/ < x; v_o > = 0\}$, se tendría dos posibilidades:

$$< v_o; p_i > > 0 \quad \text{o} \quad < -v_o; p_i > > 0, \text{ para } i=1,2,...,n+1.$$

Y en cualquiera de estos casos, se podría obtener un punto perteneciente a $\cap_i H^+_i$, $i=1,2,...,n+1$, en contradicción con lo señalado en 3). Por tanto la afirmación 4) es válida y el teorema queda demostrado. □

3.3 Proposición 3: (Carathéodory) ⇒ (Radon) *Por Carathéodory sabemos que si tenemos un punto x perteneciente a la cápsula convexa de un conjunto S de* $\mathbf{R}^n$, *existe un conjunto* $M = \{p_1,p_2,...,p_q\}$, *con* $q \leq n+1$, *contenido en el anterior y tal que* $x \in M$. *Lo que vamos a demostrar es que, en estas condiciones, S puede ser partido en dos subconjuntos cuyas cápsulas convexas se intersectan y, por tanto, se cumple el teorema de Radon.*

Demostración:

1) Sean $p_1,p_2,p_3,...p_{n+2}$ puntos de $\mathbf{R}^n$ y sea $x = (n+2)^{-1} \sum_i p_i$, $i=1,2,...,n+2$. Entonces, por el teorema de Carathéodory, existen $n+1$ puntos, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que son los $n+1$ primeros, tales que

$$x = \sum_i \alpha_i p_i \,,\; i=1,2,...,n+1, \text{ con } \sum_i \alpha_i = 1 \text{ y } \alpha_i \geq 0,$$

donde por lo menos uno de los α_i es mayor que $(n+2)^{-1}$.

2) Además, siempre podemos escribir:

(1) $\quad (1/n+2)p_{n+2} + \sum_1 [(1/n+2) - \alpha_i]p_i = \sum_2 [\alpha_i - (1/n+2)]p_i$

donde en $\sum_1$ consideramos los puntos para los cuales $(1/n+2) \geq \alpha_i$ y en $\sum_2$ aquellos para los que vale $\alpha_i > (1/n+2)$. Obsérvese que $\sum_2$ no es vacía.

3) Denotemos con Γ a las sumas

$$\Gamma = (1/n+2) + \sum_1 [(1/n+2) - \alpha_i] = \sum_2 [\alpha_i - (1/n+2)].$$

Multiplicando ambos miembros de (1) por $1/\Gamma$, se obtienen sendas combinaciones convexas y, por tanto, estamos en las condiciones del teorema de Radon. □

Otras implicaciones, tales como (Caratheódory) ((Helly), pueden verse en "Convex Sets", de F.A. Valentine, Mc Graw-Hill Inc., 1964.

Dr. Roberto Velásquez

Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias