Pro Mathematica, Vol. IX, Nos. 17-18, 1995

OPTIMIZACION EN ESPACIOS NORMADOS

Nery ***Nieves***

A la memoria del amigo y maestro
Eugen Blum R.

Resumen

La teoría de dualidad en optimización lineal establece que si el problema P tiene solución, entonces P también posee solución y además inf P = sup P*. En este trabajo, se presentan resultados análogos para problemas convexos en espacios normados. Se sigue el enfoque unificado desarrollado por R. T. Rockafellar. Para los preliminares y demás detalles se recomienda consultar [1], [3], [4].*

Introducción.

Al considerar un espacio normado $\mathbf{V}$ y una función F: $\mathbf{V} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, un problema de optimización se formula en la forma de un problema de minimización

$$P : \min \{F(u) : u \in \mathbf{V}\}$$

Profesor Principal de la UNPRG y UPCH. Lambayeque, Perú.

En el presente trabajo, F será una función convexa, propia e inferiormente semi continua y por tanto nos referiremos a P como un problema de optimización convexa o problema convexo.

R. T. Rockafellar al estudiar ciertos problemas de optimización, desarrolló -en la teoría de dualidad- un enfoque unificado que consiste en perturbar el problema primal P, y usando funciones conjugadas, formular el correspondiente problema dual P^*.

En este contexto se analiza el problema

$$P : \min \{J(u,\Lambda u) : u \in \mathbf{V}\}$$

donde J: $\mathbf{V} \times \mathbf{Y} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ y Λ es un operador lineal continuo en $L(\mathbf{V},\mathbf{Y})$, estudiado por R. Temam, el cual a su vez es una generalización de otros problemas investigados por R.T. Rockafellar y W.Fenchel.

Como caso particular se ve el problema Dirichlet.

1. Los problemas primal y dual.

Consideremos el espacio normado $\mathbf{V}$ y su dual topológico $\mathbf{V}^*$. $(\mathbf{V},\mathbf{V}^*)$ forman un sistema dual, donde $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$ están colocados en dualidad por la bilineal $<,>$ dada por

$$\begin{aligned} <,> : \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* &\rightarrow \mathbf{R} \\ (u,u^*) &\rightarrow < u,u^* > = u^*(u) \end{aligned}$$

llamada dualidad canónica entre $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^*$. De igual manera se considera el sistema dual ($\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Y}^*$).

En forma natural, se obtiene una dualidad entre $\mathbf{V} \times \mathbf{Y}$ y $\mathbf{V}^* \times \mathbf{Y}^*$ dada por

$$\begin{aligned} <,> : (\mathbf{V} \times \mathbf{Y}) \times (\mathbf{V}^* \times \mathbf{Y}^*) &\rightarrow \mathbf{R} \\ ((u,p), (u^*,p^*)) &\rightarrow < (u,p), (u^*,p^*) > = <u,u^*> + <p,p^*> \end{aligned}$$

Definición 1.1 *Para la función F: $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$, el problema de minimización P dado por el programa matemático*

$$P : \min \{ F(u) : u \in \mathbf{V} \}$$

es llamado problema primal.

El número $\inf\{F(u): u \in \mathbf{V}\}$ *es el valor del programa* P *y se denota por* $\inf P$. *Cualquier elemento* $\bar{u} \in \mathbf{V}$ *tal que* $\inf P = F(\bar{u})$ *se llama solución de* P.

Ahora, sea $\Phi: \mathbf{V}\times\mathbf{Y} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ una función sujeta a la condición siguiente

$$\Phi(u,0) = F(u) \quad \forall u \in \mathbf{V}$$

Φ es función de perturbación de F.

En virtud de la definición de función conjugada se tiene

$$\Phi^*: \mathbf{V}^*\times\mathbf{Y}^* \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$$

$$(u^*,p^*) \rightarrow \Phi^*(u^*,p^*) = \sup\{<u,u^*> + <p,p^*> - \Phi(u,p): u \in \mathbf{V}, p \in \mathbf{Y}\}$$

El problema de maximización

$$P^*: \max\{ -\Phi^*(0,p^*): p^* \in \mathbf{Y}^* \}$$

es llamado el problema dual de P con respecto a la función de perturbación Φ.

El número $\sup\{ -\Phi^*(0,p^*): p^* \in \mathbf{Y}^* \}$ es el valor del programa P^* y se denota por $\sup P^*$. Cualquier elemento $\bar{p}^* \in \mathbf{Y}^*$ tal que $\sup P^* = -\Phi^*(0, \bar{p}^*)$ se llama solución de P^*.

Similarmente, se puede definir el problema bidual de P como

$$P^{**} : \min \{\Phi^{**}(u,0): u \in \mathbf{V}\}$$

Observación 1.2

Después de la obtención de P^{**}, no se puede repetir el proceso de dualización. En efecto

$$P^{***} : \max \{-\Phi^{***}(0,p^*): p^* \in \mathbf{Y}^*\}$$

es el problema dual de P^{**}. Pero $\Phi^{***} = \Phi^*$, entonces se cumple que $P^{***} = P^*$ y los duales de orden superior de P se identifican con P^* o con P^{**}.

Qué relación existe, en general, entre P y P^*?. Una primera relación es:

Proposición 1.3 $-\infty \leq \sup P^* \leq \inf P \leq +\infty$

Demostración: Por definición, se cumple que $\forall p^* \in \mathbf{Y}^*$

$$\Phi^*(0,p^*) = \sup \{< p.p^*> - \Phi(u,p): u \in \mathbf{V}, p \in \mathbf{Y}\}$$

de aquí

$$\Phi^*(0,p^*) \geq <0,p^*> - \Phi(u,0) = \Phi(u,0) = - F(u) \ \forall u \in \mathbf{V}, \ \forall p^* \in \mathbf{Y}^*,$$

es decir

$$- \Phi^*(0,p^*) \leq F(u) \ \forall u \in \mathbf{V}, \ \forall p^* \in \mathbf{Y}^*$$

lo cual implica, obviamente, que

$$- \infty \leq \sup P^* \leq \inf P \leq +\infty.$$

En un espacio de Banach reflexivo $\mathbf{V}$, consideremos el programa convexo:

$$P: \min \{F(u): u \in \mathbf{C}\}$$

con las siguientes condiciones:

$\mathbf{C} \subset \mathbf{V}$ es un subconjunto no vacío, convexo y cerrado.

F: $\mathbf{C} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ una función convexa, propia e inferiormente semicontinua.

Se tiene el siguiente criterio de existencia de soluciones para el problema P.

Proposición 1.4 *Supongamos, adicionalmente, que:*

a) *C es acotado*

o

b) *F es coercitiva en $\mathbf{C}$; es decir, $F(u) \rightarrow +\infty$ cuando $\|u\| \rightarrow +\infty$ y $u \in \mathbf{C}$.*

Entonces P tiene al menos una solución .

Si F es estrictamente convexa, entonces P tiene una única solución.

Para su demostración ver [3].

2. Los problemas normal y estable

Ahora, para cada $p \in \mathrm{Y}$, considérese el problema de minimización

$$P_P: \min \{\Phi(u,p): u \in \mathbf{V}\}$$

llamado el problema perturbado de P. Es claro que $P_o = P$.

Sea h: Y $\rightarrow$ $\bar{\mathbf{R}}$ definida por

$$h(p) = \inf P_P = \inf \{\Phi(u,p): u \in \mathbf{V}\}.$$

Como $\Phi(u,0) = F(u)$, se tiene

$$h(0) = \inf \{\Phi(u,0): u \in \mathbf{V}\} = \inf \{F(u): u \in \mathbf{V}\} = \inf P.$$

Proposición 2.1

a) *Si Φ es convexa en $\mathbf{V}\times\mathbf{Y}$, entonces h es convexa en $\mathbf{Y}$.*

b) $h^*(p^*) = \Phi^*(0,p^*)$.

c) $\sup P^* = h^{**}(0)$.

Ver [4] para la demostración

Observación 2.2

Puesto que $\inf P = h(0)$, la relación $\sup P^* \leq \inf P$ es equivalente a $h^{**}(0) \leq h(0)$.

Definición 2.3 *Se dice que el problema P es normal si $h(0) \in \mathbf{R}$ y h es inferiormente semi continua (i.s.c) en el origen.*

Ahora se estudiará la relación entre la normalidad del problema primal P y la normalidad del problema dual P^*. Asimismo, la relación entre normalidad y los valores de los problemas P y P^*.

Para indicar que la función F es convexa, propia e i.s.c en $\mathbf{V}$, usamos la notación $F \in \Gamma_o(\mathbf{V})$.

Proposición 2.4 *Si $\Phi \in \Gamma_o(\mathbf{V}\times\mathbf{Y})$, las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *P es normal.*

b) *P^* es normal.*

c) $-\infty < \sup P^* = \inf P < +\infty$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ c)

Sea P normal y $\bar{h}$ la regularización i.s.c de h, entonces

$$h^{**} \leq \bar{h} \leq h.$$

Por hipótesis, $\bar{h}(0) = h(0) \in \mathbf{R}$. Puesto que epi $\bar{h} = \overline{epi\, h}$ y h es convexa, se obtiene que $\bar{h}$ es convexa e i.s.c y como $\bar{h}(0) \in \mathbf{R}$, $\bar{h}$ no toma el valor $-\infty$. En consecuencia, $\bar{h} \in \Gamma_o(Y)$ y $\bar{h} = \bar{h}^{**}$.

Por propiedades de la función conjugada, se tiene

$$h^* = h^{***} \geq \bar{h}^* \geq h^*$$

de donde $h^* = \bar{h}^*$ y $h^{**} = \bar{h}^{**} = \bar{h}$. Por consiguiente,

$$\bar{h}(0) = h(0) = h^{**}(0) \quad \text{y} \quad \inf P = \sup P^* \in \mathbf{R}.$$

c) $\Rightarrow$ a)

Por consiguiente $\inf P = \sup P^* \in \mathbf{R}$. Entonces $h(0) = h^{**}(0) \in \mathbf{R}$ y como $h^{**} \leq \bar{h} \leq h$, se obtiene que $\bar{h}(0) = h(0) \in \mathbf{R}$, lo cual implica que h es i.s.c en 0 y por tanto P es normal.

b) $\Leftrightarrow$ c)

Como $\Phi \in \Gamma_o(\mathbf{V} \times \mathbf{Y})$, $P = P^{**}$ y se cumple P^* es normal

$$\Leftrightarrow \sup P^* = \inf P^{**} = \inf P.$$

Definición 2.5 *Se dice que el problema P es estable si $h(0) \in \mathbf{R}$ y h es subdiferenciable en el origen.*

Lema 2.6 *El conjunto solución de P^* es $\partial h^{**}(0)$.*

Proposición 2.7 *Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

a) *P es estable.*
b) *P es normal y P^* tiene al menos una solución.*

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b)

Si P es estable, entonces $h(0) \in \mathbf{R}$ y $\partial h(0) \neq 0$. De aquí, $h(0) = h^{**}(0)$, lo cual implica que h es i.s.c en 0 y por tanto P es normal.

El conjunto solución de P^* es $\partial h^{**}(0) = \partial h(0) \neq \emptyset$ y por consiguiente P^* tiene al menos una solución.

b) $\Rightarrow$ a)

Si P es normal, $h(0) = h^{**}(0) \in \mathbf{R}$ y si P^* tiene alguna solución,

$$\partial h^{**}(0) = \partial h(0) \neq \emptyset.$$

Esto implica que P es estable.

Proposición 2.8 *Si* $\Phi \in \Gamma_o$ $(\mathbf{V}\times\mathbf{Y})$, *entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes entre si:*

a) *P y P* son normales y tienen al menos una solución.*
b) *P y P* son estables.*
c) *P es estable y tiene al menos una solución.*

Demostración:

a) $\Leftrightarrow$ b)

Por la proposición anterior, P y P^* son estables $\Leftrightarrow$ P es normal y P^* tiene al menos una solución, y P^* es normal y $(P^*)^* = P$ tiene al menos una solución.

a) $\Rightarrow$ b)

En particular P es normal, P y P^* tienen al menos una solución. Esto implica, por la proposición anterior, que P es estable y P tiene al menos una solución.

c) $\Rightarrow$ a)

P es estable y tiene por lo menos una solución, entonces P es normal y tanto P como P^* tiene al menos una solución, luego P y P^* son normales y tienen al menos una solución.

Proposición 2.9(Criterio de estabilidad) *Supongamos que* Φ *es convexa,* $\inf P \in \mathbf{R}$ *y que existe* $u_o \in \mathbf{V}$ *tal que la función* Ψ: Y $\rightarrow$ $\bar{\mathbf{R}}$ *definida por* $\Psi(p) = \Phi(u_o,p)$, *es finita y continua en* $p=0$. *Entonces P es estable.*

Demostración: Se cumple que h es convexa y $h(0) \in \mathbf{R}$. Como Ψ es convexa y continua en $p = 0$, entonces existe una vecindad $V(0)\subset\mathbf{Y}$ tal que

$$\Phi(u_o,p) \leq M < +\infty \quad \forall p \in V(0).$$

Pero

$$h(p) = \inf \Phi(u,p) \leq \Phi(u_o,p) \leq M \quad \forall p \in V(0)$$

luego, h es continua en $p = 0$ y $\partial h(0) \neq \emptyset$. En consecuencia, P es estable.

3. Relaciones extremales

Ahora estableceremos resultados que indican las relaciones extremales que satisfacen las soluciones de P y P^*.

Proposición 3.1 *Si P y P^* poseen soluciones y si $\inf P^* \in \mathbf{R}$, entonces todas las soluciones $\bar{u}$ de P y $\bar{P}^*$ de P^* satisfacen las relaciones de extremalidad*

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$$

o

$$(0, \bar{p}^*) \in \partial\Phi(\bar{u},0).$$

Recíprocamente, si $\bar{u} \in \mathbf{V}$ y $\bar{p}^* \in \mathbf{Y}^*$, satisfacen las relaciones de extremalidad, entonces $\bar{u}$ es una solución de P, $\bar{p}^*$ es una solución de P^* e $\inf P = \sup P^* \in \mathbf{R}$.

Demostración: Se tiene que

$$\inf P = \Phi(\bar{u},0) = \sup P^* = -\Phi^*(0, \bar{p}^*)$$

luego

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0 = \langle (0, \bar{p}^*), (\bar{u},0) \rangle$$

y esto equivale a

$$(0, \bar{p}^*) \in \partial\Phi(\bar{u},0).$$

Recíprocamente, sea

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$$

o sea $\Phi(\bar{u},0) = -\Phi^*(0, \bar{p}^*)$. Pero

$$\Phi(u,0) \geq -\Phi^*(0, \bar{p}^*) \quad \forall u \in \mathbf{V}, \ \forall p^* \in \mathbf{Y}^*$$

luego

$$\Phi(\bar{u},0) \geq \inf P \geq \sup P^* \geq -\Phi^*(0, \bar{p}^*) = \Phi(\bar{u},0)$$

y en consecuencia

$$\Phi(\bar{u},0) = \inf P = \sup P^* = -\Phi^*(0, \bar{p}^*).$$

Proposición 3.2 *Supongamos que $\mathbf{V}$ es un espacio de Banach reflexivo, $\Phi \in \Gamma_o(\mathbf{V} \times \mathbf{Y})$, se cumple la condición de estabilidad y que*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \Phi(u,0) = +\infty, \ u \in \mathbf{V}$$

entonces P y P^* tienen soluciones, inf P = sup P^* y se cumplen las relaciones extremales.

Demostración:

La función $F(u) = \Phi(u,0)$ es convexa, propia y coercitiva en $\mathbf{V}$, luego P tiene al menos una solución.

Por el criterio de estabilidad, P es estable y en consecuencia, P es normal y P^* tiene al menos una solución, además $\inf P = \sup P^* \in \mathbf{R}$.

Como P y P^* poseen soluciones $\bar{u} \in \mathbf{V}$, $\bar{p}^* \in \mathbf{Y}^*$, $\inf P = \sup P^* \in \mathbf{R}$, entonces

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0 \text{ o } (0, \bar{p}^*) \in \partial\Phi(\bar{u},0).$$

4. Aplicaciones

Caso 1

Dados los espacios normados $\mathbf{V}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{V}^*$, $\mathbf{Y}^*$, consideremos el operador lineal continuo $\Lambda \in L(\mathbf{V},\mathbf{Y})$ con transpuesta $\Lambda^* \in L \rightarrow (\mathbf{Y}^*,\mathbf{V}^*)$. Asimismo, asumiremos que la función F: $\mathbf{V} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, que será minimizada, puede escribirse como

$$F(u) = J(u, \Lambda u)$$

donde J es una función de $\mathbf{V}\times\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{R}$.

De esta manera, el problema primal P queda expresado en la forma

$$P: \min \{J(u,\Lambda u): u \in \mathbf{V}\}$$

Ahora, consideremos la función perturbadora Φ: $\mathbf{V}\times\mathbf{Y} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ definida por

$$\Phi(u,p) = J(u, \Lambda u - p)$$

y determinemos el problema dual de P. Haciendo $q = \Lambda u - p$ para cada $u \in \mathbf{V}$, se verifica que

$$\begin{aligned}\Phi^*(0,p^*) &= \sup \{ <u,\Lambda^* u^*> + <q,-p^*> - J(u,q): u \in \mathbf{V}, q \in \mathbf{Y} \}\\ &= J^*(\Lambda^* p^*,-p^*)\end{aligned}$$

y el problema P^* puede formularse como

$$P^* : \max \{- J^*(\Lambda^* p^*, -p^*) : p^* \in \mathbf{Y}^*\}.$$

Obsérvese que, si J es convexa, entonces Φ es convexa. Asimismo, si $J \in \Gamma_o (\mathbf{V} \times \mathbf{Y})$, entonces $\Phi \in \Gamma_o (\mathbf{V} \times \mathbf{Y})$.

Las aplicaciones de los resultados sobre normalidad, estabilidad, relaciones de extremalidad de las soluciones de P y P^* y la existencia de soluciones a nuestro caso especial, da lugar a las siguientes proposiciones.

Proposición 4.1 *Supongamos que Φ es convexa, inf $P \in \mathbf{R}$ y que existe $u_o \in \mathbf{V}$ tal que $J(u_o, \Lambda u_o) < +\infty$ y la función $J(u_o, .)$ es continua en Λu_o. Entonces P es estable, inf P = sup P^* y P^* tiene al menos una solución.*

Proposición 4.2 *Las dos condiciones siguientes son equivalentes entre si:*

a) *$\bar{u}$ es una solución del problema P, $\bar{p}^*$ es una solución del problema P^* e inf P = sup P^*.*

b) *$\bar{u} \in \mathbf{V}$, $\bar{p}^* \in \mathbf{Y}^*$ satisfacen la relación de extremalidad*

$$J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}) + J^*(\Lambda^* \bar{p}^*, -p^*) = 0$$

o equivalentemente

$$(\Lambda^* \bar{p}^*, -p^*) \in \partial J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}).$$

Teorema 4.3 *Sea $\mathbf{V}$ un espacio de Banach reflexivo y $J \in \Gamma_o (\mathbf{V} \times \mathbf{Y})$. Supongamos que la condición de estabilidad se cumple y que*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u, \Lambda u) = +\infty, \; u \in \mathbf{V}$$

entonces P y P^* tienen soluciones $\bar{u}$ y $\bar{p}^*$, respectivamente, que satisfacen la relación de extremalidad e inf P = sup P^*.

Observación 4.4 El problema

$$P: \min \{ J(u, \Lambda u) : u \in \mathbf{V} \}$$

fue estudiado por R.Temam.

Cuando $J(u, \Lambda u) = F(u) + G(\Lambda u)$ se tiene el problema

$$P: \min \{ F(u) + G(\Lambda u) : u \in \mathbf{V} \}$$

que fue analizado por R.T. Rockafellar.

Si Λ = Identidad, el problema anterior adopta la forma particular

$$P\text{: min } \{ F(u) + G(u) : u \in \mathbf{V} \}$$

y fue estudiado por W. Fenchel.

Caso 2: El problema de Dirichlet

Sea $f \in L^2(\Omega)$ y $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ conjunto abierto regular. Se desea hallar una función u en algún espacio tal que

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta = f \ en \, \Omega \\ u = 0 \, en \, \partial \, \Omega \end{cases}$$

La solución buscada es en el sentido generalizado.

La condición u=0, en $\partial\Omega$, puede ser sustituída por la condición $u \in H_o^1(\Omega)$ y la ecuación puede transformarse, a través de la identidad de Green, en

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f\, v \qquad \forall v \in H_o^1(\Omega).$$

De esta manera, el problema (1) puede formularse en la forma variacional siguiente

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_o^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) =< f, v > \ \forall v \in H_o^1(\Omega) \end{cases}$$

donde

$$a(u,v) = \sum < D_i u, D_i v >_{L^2(\Omega)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$< f, v > = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

Se verifica que $a(u,v)$ es una bilineal continua y coercitiva en H_o^1 (Ω). Además, se comprueba que $\|u\| = \sqrt{a(u,u)}$ es una norma equivalente a la norma de $H_o^1(\Omega)$.

Como $(H_o^1(\Omega), \|\ \|)$ es un espacio de Banach reflexivo, por el lema de Lax - Milgram, existe una única $\tilde{u} \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$a(\tilde{u},v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in H_o^1(\Omega).$$

Además, $\tilde{u}$ es solución del problema

$$(3) \qquad P: \min \left\{ \frac{1}{2}\, a(u,u) - \langle f,u\rangle : u \in H_o^1(\Omega) \right\}$$

Para construir el problema dual de P, tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

$$\mathbf{V} = H_o^1(\Omega) \qquad \mathbf{Y} = L^2(\Omega)^n$$

$$\Lambda = \nabla$$

$$\mathbf{V}^* = H^{-1}(\Omega) = (H_o^1(\Omega))^* \quad \mathbf{Y}^* = L^2(\Omega)^n$$

$$F(u) = -\langle f,u\rangle \quad \forall u \in \mathbf{V}$$

$$G(p) = \frac{1}{2}\int_\Omega |p(x)|^2\,dx \quad \forall p \in \mathbf{Y} = L^2(\Omega)^n$$

entonces el problema primal puede formularse como

$$P: \min \{ F(u) + G(\Lambda u) : u \in \mathbf{V} \}.$$

Ahora, como

$$F^*(u^*) = \sup \{ \langle u^* + f,u\rangle : u \in \mathbf{V} \} = \begin{cases} 0 & \text{si } u^* + f = 0 \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$G^*(p^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega |p^*(x)|^2\,dx$$

el problema dual de P puede formularse de la siguiente manera:

$$P^*: \max \{ -F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*) : p^* \in L^2(\Omega)^n \}$$

donde Λ^* es el operador divergencia, pues

$$\langle \Lambda^* p^*,u\rangle = \langle p^*, \Lambda u\rangle = \sum \langle p_i^*, D_i u\rangle = \langle -\sum D_i\, p_i^*, u\rangle \quad i = 1,\dots,n$$

esto es

$$\Lambda^* p^* = -\sum D_i\, p_i^* \quad i = 1,\dots,n\,.$$

Si eliminamos los p^* para los cuales $F^*(\Lambda^* p^*) = +\infty$, tenemos que

$$P^*: \max \{ -G^*(-p^*) : p^* \in L^2(\Omega)^n,\ \Lambda^* p^* + f = 0 \}$$

lo cual es equivalente a

$$P^* : \max \{-\frac{1}{2}\int_{\Omega} |p^*(x)|^2\, dx : p^* \in L^2(\Omega)^n,\ \Lambda^* p^* = -f\}.$$

P y P^* satisfacen las hipótesis para la existencia de soluciones $\bar{u}$ y $\bar{p}^*$, respectivamente. Sabemos que $\bar{u}$ es única y como el funcional G^* es estrictamente convexo, la solución $\bar{p}^*$ de P^* también es única. Además, se cumplen las relaciones extremales

$$F(\bar{u}) + F^*(\Lambda^* \bar{p}^*) = \langle \Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u} \rangle$$

$$G(\Lambda \bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*) = -\langle \bar{p}^*, \Lambda \bar{u} \rangle.$$

De esta última relación, obtenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}(x) + \bar{p}(x)|^2\, dx = 0$$

lo cual implica que

$$\bar{p}^*(x) = -\nabla \bar{u}(x) \qquad a.e \text{ en } \Omega.$$

Teorema 4.5 *El problema de Dirichlet en la forma del problema primal P admite el problema dual P^*. Tanto P como P^* tienen soluciones únicas $\bar{u}$ y $\bar{p}^*$ respectivamente, relacionadas por $\bar{p}^* = -\nabla \bar{u}$ y adicionalmente*

$$\sup P^* = \inf P.$$

Referencias

[1] *Barbu, V - Precupanu, Th.:* Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest - Romania, 1986.

[2] *Brézis, H.:* Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones, Alianza Editorial S. A., 1984.

[3] *Ekeland, I. - Temam, R,:* Convex Analysis and Variational Problems, North Holland, 1976.

[4] *Nieves, N.:* Análisis Convexo: Subdiferenciales, Función Conjugada, Dualidad. Tesis de Maestría - PUCP, Lima, 1990.

———: Elementos de Análisis Convexo, VIII Coloquio de Matemáticas, Chiclayo, 1990.

[5] *Zeidler, E.:* Non Linear Functional Analysis and its Applications, Vol. III, Springer Verlag, 1985.