Pro Mathematica Vol. XVII, Nº 34, 2003

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL ASOCIADO CON LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES

Aldo ***Mendoza Uribe*** *y*
Juan ***Montealegre Scott***

Resumen

El propósito es probar que el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Korteweg - de Vries tiene solución única local cuando el dato inicial φ pertenece a $H^s(\mathbf{R})$ para $s > \frac{3}{2}$. La prueba estará basada en la técnica conocida como regularización parabólica. La ecuación estudiada en este trabajo es utilizada en la descripción aproximada de la propagación unidireccional de ondas de gran longitud en ciertos sistemas dispersivos no lineales y es similarmente útil como un modelo para ondas de gran longitud en muchos otros sistemas físicos.

Dpto. de Matemáticas, UNALM, Dpto. de Ciencias, PUCP.

Introducción

En este trabajo estudiaremos el problema de Cauchy (o de valor inicial) para la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} \partial_t u\,(x,t) + \partial_x^3 u\,(x,t) + u\,(x,t)\,\partial_x u\,(x,t) = 0 \\ \\ u(x,0) = \varphi\,(x)\,, \end{cases} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbf{R}$ y $t \geq 0$. El propósito es probar que localmente (1) tiene solución única cuando el dato inicial φ pertenece a $H^s\,(\mathbf{R})$ para $s > \dfrac{3}{2}$. Así probaremos en el teorema 3.6 que: para $s > \frac{3}{2}$ existe $T > 0$ y una

$$u \in C\left([0,T]\,, H^s\,(\mathbf{R})\right) \cap C^1\left([0,T]\,, H^{s-3}\,(\mathbf{R})\right);$$

única solución de (1) satisfaciendo

$$\|u\,(t)\|_s^2 \leq \rho\,(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde $\rho = \rho\,(t)$ es dada por el teorema 3.2

La prueba del teorema 3.6 estará basada en la técnica conocida como regularización parabólica. Con un poco más de precisión, escribimos el problema como uno sobre el espacio de Sobolev $H^s\,(\mathbf{R})$, $s \geq 0$,

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t) + \partial_x^3 u\,(t) + u\,(t)\,\partial_x u\,(t) = 0 \\ \\ u\,(0) = \varphi\,(x)\,, \end{cases} \tag{KdV}$$

introduciremos una viscosidad artificial $\mu > 0$ y resolveremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u_\mu\,(t) + u_\mu\,(t)\,\partial_x u_\mu\,(t) + \partial_x^3 u_\mu\,(t) - \mu\partial_x^2 u_\mu\,(t) = 0 \\ \\ u_\mu\,(0) = \varphi. \end{cases} \tag{KdV$_\mu$}$$

Luego resolveremos el caso $\mu = 0$, que corresponde al problema (KdV), como límite del caso $\mu > 0$ cuando $\mu \to 0^+$.

El trabajo está organizado como sigue. En el sección 2 se considera el problema de valor inicial lineal asociado a (KdV$_\mu$); estudiamos el semigrupo asociado con el problema lineal en los casos $\mu = 0$ y $\mu > 0$. En la tercera sección mostraremos que la ecuación integral asociada al problema (KdV_μ) tiene solución única para todo $\mu > 0$, y a continuación, en la cuarta sección, probaremos que la solución de la ecuación integral es la solución del problema (KdV_μ) en $C\left(]0, T_\mu], H^s(\mathbf{R})\right) \cap C\left([0, T_\mu], H^{s-3}(\mathbf{R})\right)$. El paso siguiente y fundamental, consiste en probar que T_μ no depende de μ si $0 < \mu \leq \mu_0$. Después se probará que podemos pasar al límite en la solución de (KdV_μ), cuando $\mu \to 0^+$ para obtener la única solución del problema (KdV).

1 El Problema Lineal

Consideremos el problema lineal determinado por (KdV_μ) donde $\mu \geq 0$,

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) - \mu \partial_x^2 u(t) = 0, \; t > 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{2}$$

Para cada $\mu \geq 0$ definimos el operador A_μ en $H^{s+3}(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, por

$$A_\mu u = \partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u, \;\; u \in H^{s+3}(\mathbf{R}). \tag{3}$$

De este modo (2) se escribe

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A_\mu u(t) = 0, \;\; t > 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Para el desarrollo de esta sección, primero consideramos al problema de valor inicial lineal asociado a (KdV_μ) y estudiamos el semigrupo asociado al problema de valor inicial lineal asociado a (KdV_μ) en los casos $\mu = 0$ y $\mu > 0$.

Cuando $\mu = 0$, (4) se transforma en un problema de valor inicial asociado con la ecuación de Ayri; es decir

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) = 0, \; t > 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Sea $A_0 : H^{s+3}(\mathbf{R}) \to H^s(\mathbf{R})$ el operador definido por

$$A_0 u = \partial_x^3 u, \quad u \in H^{s+3}(\mathbf{R}).$$

La linealidad de A_0 y la densidad de su dominio en $H^s(\mathbf{R})$ son inmediatas. De la proposición 5.5 de [5], A_0 es anti-adjunto. En particular, A_0 y $-A_0$ son operadores m-disipativos en $H^s(\mathbf{R})$.

Teorema 1.1. *El operador $-A_0$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{U_0(t)\}_{t\geq 0}$ en $H^s(\mathbf{R})$, $s \in \mathbf{R}$, tal que*

$$\widehat{U_0(t)\varphi}(\xi) = e^{it\xi^3}\widehat{\varphi}(\xi) \tag{6}$$

para todo $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$. Además, $\{U_0(t)\}_{t\geq 0}$ puede ser extendido a un grupo de operadores unitarios en $H^s(\mathbf{R})$ y, cualquiera sea $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ la función

$$U_0(\cdot)\varphi : \mathbf{R}_0^+ \to H^s(\mathbf{R})$$

es la única solución del problema (5).

Prueba. La primera afirmación es simple consecuencia de las afirmaciones anteriores y el Teorema de Lumer-Phillips [6, Teorema 5.3]. Para obtener (6) es suficiente tomar la transformada de Fourier en la variable espacial y aplicar la proposición 6.1 de [6]. ■

Cuando $\mu > 0$ definimos el operador B_μ en $H^{s+3}(\mathbf{R})$ por

$$B_\mu u = \mu\partial_x^2 u, \quad u \in H^{s+3}(\mathbf{R}).$$

Es fácil demostrar que B_μ es un operador lineal disipativo en $H^s(\mathbf{R})$. Dado que $A_\mu : H^{s+3}(\mathbf{R}) \to H^s(\mathbf{R})$ y

$$-A_\mu u = -A_0 u + B_\mu u, \tag{7}$$

usando el teorema 1.1, el hecho que B_μ es disipativo y el teorema de perturbación de generadores de semigrupos de contracción [7, Teorema 4.3], $-A_\mu$ es disipativo en $H^s(\mathbf{R})$.

Además, para cada $v \in H^s(\mathbf{R})$, la función $u \in H^{s+3}(\mathbf{R})$ definida por

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{v}(\xi)}{1 + \mu\xi^2 - i\xi^3},$$

satisface $(I + A_\mu)u = v$. Por tanto, $-A_\mu$ es m-disipativo en $H^s(\mathbf{R})$.

Teorema 1.2. *Si $\mu > 0$, el operador $-A_\mu$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{U_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ en $H^s(\mathbf{R})$, $s \in \mathbf{R}$, tal que*

$$\left(\widehat{U_\mu(t)\varphi}\right)(\xi) = e^{t\left(i\xi^3-\mu\xi^2\right)}\widehat{\varphi}(\xi) \tag{8}$$

y $U_\mu(t) \in \mathcal{L}\left(H^s(\mathbf{R}), H^{s+\lambda}(\mathbf{R})\right)$ con

$$\|U_\mu(t)\varphi\|_{s+\lambda} \leq K_\lambda\sqrt{1+\frac{1}{(2\mu t)^\lambda}}\,\|\varphi\|_s \tag{9}$$

para todo $\lambda \geq 0$ y $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$. Además, cualquiera sea $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ la función

$$U_\mu(\cdot)\varphi : \mathbf{R}_0^+ \to H^s(\mathbf{R})$$

es la única solución del problema (2).

Prueba. La primera parte de la prueba es consecuencia de la m-disipatividad de A_μ y resultados de [6]. Para obtener (8) es suficiente tomar la transformada de Fourier en la variable espacial, probaremos (9),

$$\begin{aligned}\|U_\mu(t)\varphi\|_{s+\lambda}^2 \quad &\leq \quad c\int_{\mathbf{R}} e^{-2t\mu\xi^2}\left(1+\xi^2\right)^s|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\\ &\quad +c\int_{\mathbf{R}}\xi^{2\lambda}e^{-2t\varepsilon\xi^2}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\widehat{\varphi(\xi)}\right|^2 d\xi,\end{aligned}$$

pero

$$\int_{\mathbf{R}}\xi^{2\lambda}e^{-2t\mu\xi^2}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\widehat{\varphi(\xi)}\right|^2 d\xi \leq 2^{-\lambda}\lambda^\lambda e^{-\lambda}(\mu t)^{-\lambda}\|\varphi\|_s^2.$$

Luego

$$\|U_\mu(t)\varphi\|_{s+\lambda}^2 \leq c\sup e^{-2t\mu\xi^2}\|\varphi\|_s^2 + c2^{-\lambda}\lambda^\lambda e^{-\lambda}(\mu t)^{-\lambda}\|\varphi\|_s^2.$$

y tomando

$$K_\lambda^2 = \sup\left\{\sup e^{-2t\mu\xi^2}, \lambda^\lambda e^{-\lambda}\right\}$$

se obtiene (9). ∎

2 La Ecuación Integral

Notemos que si u es solución de (KdV_μ), entonces

$$u(t) = U_\mu(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u^2(r)\,dr. \tag{10}$$

donde $\{U_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por $-A_\mu$.

Mostraremos que (10) tiene solución única. Para esto, aplicaremos el teorema del punto fijo de Banach.

Supongamos que $\varphi \neq 0$ y para $\tau \geq 0$ definamos $\mathcal{E}(\tau)$ como el espacio de las funciones $v \in C([0,\tau], H^s(\mathbf{R}))$ tales que

$$\|v(t) - U_\mu(t)\varphi\|_s \leq \|\varphi\|_s, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

y consideremos para $v, w \in \mathcal{E}(\tau)$ la métrica

$$d(v,w) = \sup_{0\leq t\leq\tau} \|v(t) - w(t)\|_s, \text{ para } v, w \in \mathcal{E}(\tau).$$

Es claro que $(\mathcal{E}(\tau), d)$ es un espacio métrico completo. Si $v \in \mathcal{E}(\tau)$ definimos

$$(\Phi v)(t) = U_\mu(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x v^2(r)\,dr. \tag{11}$$

Entonces, para $\mu > 0$ y $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$, existe $\tau = \tau(\|\varphi\|_s, s, \mu) > 0$ tal que $\Phi : \mathcal{E}(\tau) \to \mathcal{E}(\tau)$ es una contracción.

Teorema 2.1. *Sean $\mu > 0$ y $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$. Entonces, existen $T_\mu = T_\mu(\|\varphi\|_s, s, \mu) > 0$ y una función $u_\mu \in C([0,T_\mu], H^s(\mathbf{R}))$ única solución de la ecuación integral*

$$u_\mu(t) = U_\mu(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u_\mu^2(r)\,dr.$$

Prueba. Como Φ es una contracción, por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $u_\mu \in \mathcal{E}(T_\mu)$ tal que $\Phi u_\mu = u_\mu$, es decir,

$$(\Phi u_\mu)(t) = U_\mu(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u_\mu^2(r)\,dr = u_\mu(t).$$

Para mostrar la unicidad, sean $u, v \in C([0, T_\mu]; H^s(\mathbf{R}))$ dos soluciones de la ecuación integral (10). Consideremos para $T_1 > 0$

$$c\|\varphi\|_s \int_0^{T_1} \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu r}} dr = \lambda < 1$$

que existe, pues

$$\int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu r}} dr \longrightarrow 0^+ \text{ cuando } t \to 0^+.$$

Entonces, si $0 \le t \le T_2 = \min\{T_\mu, T_1\}$ tenemos

$$\|u(t) - v(t)\|_s \le \int_0^t \left\|U_\mu(t - r)\left(\partial_x u^2(r) - \partial_x v^2(r)\right)\right\|_s dr,$$

entonces

$$\|u(t) - v(t)\|_s \le \lambda d(u, v).$$

Tomando el supremo en $t \in [0, T_2]$ y observando que $\lambda < 1$ se sigue que $u = v$ en $[0, T_2]$. Si $T_2 = T_\mu$ nada más tenemos que hacer. Si $T_2 < T_\mu$, esto es $T_2 = T_1$, entonces observamos que para $T_1 \le t \le T_3 = \min\{2T_1, T_\mu\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_s &\le C\|\varphi\|_s \int_{T_1}^t \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu r}} \|u(r) - v(r)\|_s dr \\
&\le \left[C\|\varphi\|_s \int_0^{T_1} \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu r}} dr\right] d(u, v) \\
&= \lambda d(u, v)
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_3]$. Luego, tomando el supremo en $[0, T_3]$ se sigue que $d(u, v) = 0$ y con ésto obtenemos $u = v$ en $[0, T_3]$. Si $T_3 = T_\mu$ terminamos la demostración. En caso contrario repetimos el mismo argumento de arriba en $[0, T_4]$, donde $T_4 = \min\{T_\mu, 3T_1\}$. El resultado se obtiene por la compacidad del intervalo $[0, T_\mu]$. ■

3 La Ecuación Regularizada

En esta sección demostraremos que la función u_μ obtenida en el teorema 2.1, esto es la solución de (10), es la solución de (KdV$_\mu$) para $\mu > 0$ y ésta es única.

Teorema 3.1. *Sea* $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$ *entonces la función* u_μ *del teorema 2.1 satisface*

$$u_\mu \in C\left(]0, T_\mu], H^s(\mathbf{R})\right) \cap C\left([0, T_\mu], H^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

y es la única solución de (KdV_μ).

Prueba. Es claro que $u_\mu \in C\left(]0, T_\mu], H^s(\mathbf{R})\right)$, y de la teoría de semigrupos [6, Proposición 3.3], $\partial_t U_\mu(t)\varphi = -A_\mu U_\mu(t)\varphi$.

Para $\mu > 0$, consideramos

$$v(t) = \int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u_\mu^2(r)\,dr. \tag{12}$$

Entonces

$$\partial_t v(t) = -A_\mu \int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u_\mu^2(r)\,dr + \partial_x u_\mu^2(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\partial_t u_\mu(t) &= \partial_t\left(U_\mu(t)\varphi - \frac{1}{2}v(t)\right)\\
&= -A_\mu\left[U_\mu(t)\varphi + \frac{1}{2}\int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u_\mu^2(r)\,dr\right]\\
&\quad -\frac{1}{2}\partial_x u_\mu^2(t)\\
&= -A_\mu u_\mu(t) - u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t).
\end{aligned}$$

Luego, u_μ satisface (KdV$_\mu$).

Para la unicidad, sea

$$v \in C\left([0, T_\mu], H^s(\mathbf{R})\right) \cap C^1\left([0, T_\mu], H^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

una solución de (KdV$_\mu$), entonces la función $v = v(t)$ satisface

$$v(t) = U_\mu(t)\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t U_\mu(t-r)\,\partial_x u_\mu^2(r)\,dr\ ,\ 0 \le t \le T_\mu$$

en $H^{s-3}(\mathbf{R})$. Como $v(t) \in \mathcal{L}\left(H^s(\mathbf{R}), H^{s+\lambda}(\mathbf{R})\right)$, para todo λ, se sigue que $v \in H^s(\mathbf{R})$. Luego v es solución de la ecuación integral (10) y por el teorema 2.1 se tiene que $v = u_\mu$ en $[0, T_\mu]$ completando la demostración del teorema. ■

Teorema 3.2. *Sean $s > \frac{3}{2}$, $\mu > 0$ y u_μ solución de (KdV_μ). Entonces, existen $T = T(\|\varphi\|_s, s) > 0$ tal que u_μ se puede extender a todo el intervalo $[0,T]$. Además, existe $\rho \in C([0,T[, \mathbf{R})$ tal que*

$$\begin{cases} \|u_\mu(t)\|_s^2 \leq \rho(t) \ , \ si\ 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) = C(\|\varphi\|_s, s, T), \end{cases} \tag{13}$$

donde ρ satisface

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t) \leq c_s \rho^{\frac{3}{2}}(t), \quad t > 0 \\ \rho(0) = \|\varphi\|_s^2. \end{cases}$$

Más aún, T puede ser elegido independiente de s.

Prueba. Sea $u_\mu = u_\mu(t)$ solución de (KdV_μ), entonces

$$\begin{aligned} \partial_t \|u_\mu\|_s^2 &\leq \partial_t \|u_\mu\|_s^2 + 2\mu \|\partial_x u_\mu\|_s^2 \leq 2 \left|\langle u_\mu, u_\mu \partial_x u_\mu \rangle_s\right| \\ &\leq c_s \|u_\mu\|_s^3 = \zeta\left(\|u_\mu\|_s^2\right), \end{aligned} \tag{14}$$

donde $\zeta(t) = c_s t^{\frac{3}{2}}$, para $t \geq 0$.

Consideremos ahora $\rho^{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{2\|\varphi\|_s}{2 - c_s \|\varphi\|_s t}$, definida en el intervalo $[0,T[$ donde $T = \dfrac{2}{c_s \|\varphi\|_s^2}$, la solución maximal del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \rho'(t) \leq \zeta(\rho(t)), \quad t > 0 \\ \rho(0) = \|\varphi\|_s^2. \end{cases} \tag{15}$$

Entonces de (14), (15) y de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos que,

$$\|u_\mu(t)\|_s^2 \leq \rho(t) \ , \ t \in [0,T[\cap [0,T_\mu].$$

Así, para $\mu > 0$, u_μ se puede extender (si fuera necesario) a un intervalo $[0,T]$. Esto prueba (13).

Sea $\varphi \in H^{s'}(\mathbf{R})$ para $s' = s + r$, $r \geq 0$. Entonces de la primera parte del teorema, sigue que existe $T = T(\|\varphi\|_s, s) > 0$ y $u_\mu \in C(]0,T_\mu], H^s(\mathbf{R}))$ solución de (KdV_μ). Luego u_μ satisface la ecuación integral (10) en $H^s(\mathbf{R})$. Del teorema 3.1 cambiando T_μ por T, obtenemos que $u_\mu \in C(]0,T_\mu], H^{s+r}(\mathbf{R}))$ satisface (10) en $H^{s+r}(\mathbf{R})$, y por lo tanto u_μ satisface (KdV$_\mu$). Esto muestra que T es independiente de s. ■

Teorema 3.3. *Sean $s > \frac{3}{2}$ y u_μ solución de (KdV$_\mu$). Entonces existe $u_0 = \lim_{\mu\to 0^+} u_\mu$ uniformemente en $L^2(\mathbf{R})$ para $t \in [0,T]$.*

Prueba. Sean ε, $\beta > 0$ y $u_\mu = u_\mu(t)$, $u_\beta = u_\beta(t)$ soluciones de (KdV$_\mu$) , (KdV$_\beta$) dadas por el teorema 3.2, respectivamente. Tenemos para $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\partial_t \|u_\mu - u_\beta\|_{L^2}^2 &\leq 2\langle u_\mu - u_\beta, (A_\beta - A_\mu) u_\beta\rangle_{L^2} \\ &\quad +2\langle u_\mu - u_\beta, -\frac{1}{2}\partial_x\left(u_\mu^2 - u_\beta^2\right)\rangle_{L^2};\end{aligned}$$

pues $-A_\mu$ es disipativo en $H^s(\mathbf{R})$ para todo $s > \frac{3}{2}$.

A continuación acotaremos cada uno de los productos internos. Tenemos

$$\begin{aligned}\langle u_\mu - u_\beta, (A_\beta - A_\mu) u_\beta\rangle_{L^2} &\leq \|u_\mu - u_\beta\|_{L^2} \|(A_\beta - A_\mu) u_\beta\|_{L^2} \\ &\leq 2M^2 \|A_\beta - A_\mu\|_{\mathcal{L}(H^3,L^2)},\end{aligned}$$

donde $M = \sup_{0\leq t\leq T} \rho^{\frac{1}{2}}(t)$. Utilizado la igualdad

$$\partial_x (u-v)^2 = 2(u-v)\,\partial_x(u-v)$$

en $H^s(\mathbf{R})$ y la desigualdad

$$\partial_x (u+v) = \partial_x u + \partial_x v \leq \|\partial_x u\|_{\infty,1} + \|\partial_x v\|_{\infty,1},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&\langle u_\mu - u_\beta, -\frac{1}{2}\partial_x\left(u_\mu^2 - u_\beta^2\right)\rangle_{L^2} \\ =\ &\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} [u_\mu(x) + u_\beta(x)]\,\partial_x (u_\mu - u_\beta)^2(x)\,dx \\ \leq\ &\frac{1}{4}\max\left\{\|u_\mu\|_s, \|u_\beta\|_s\right\} \|u_\mu - u_\beta\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

Por tanto

$$\partial_t \|u_\mu - u_\beta\|_{L^2}^2 \leq 2M^2 \|A_\mu - A_\beta\|_{\mathcal{L}(H^3,L^2)} + \frac{1}{2}M \|u_\mu - u_\beta\|_{L^2}^2 ,$$

e integrando de 0 a t la última expresión, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u_\beta(t)\|_{L^2}^2 &\leq K \|A_\mu - A_\beta\|_{\mathcal{L}(H^3,L^2)} \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2} M \|u_\mu(r) - u_\beta(r)\|_{L^2}^2 \, dr. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u_\beta(t)\|_{L^2}^2 &\leq K \|A_\mu - A_\beta\|_{\mathcal{L}(H^3,L^2)} \exp\left(\int_0^T \frac{M}{2} dr\right) \\ &= K \|A_\mu - A_\beta\|_{\mathcal{L}(H^3,L^2)} . \end{aligned}$$

Por otro lado, $A_\mu u \overset{\mu \to 0^+}{\longrightarrow} \partial_x^3 u$ y $A_\beta u \overset{\beta \to 0^+}{\longrightarrow} \partial_x^3 u$, de ahí la afirmación. ■

Teorema 3.4. *Sean $s > \frac{3}{2}$ y u_μ solución de la (KdV_μ). Entonces $w - \lim_{\mu \to 0^+} u_\mu(t) = u_0(t)$ en $H^s(\mathbf{R})$ uniformemente en $t \in [0,T]$.*

Prueba. Sea $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ y $\varphi_\mu \in H^{s+3}(\mathbf{R})$ tales que

$$\|\varphi - \varphi_\mu\|_s < \mu. \tag{16}$$

Entonces

$$\left|\langle u_\mu(t) - u_\beta(t), \varphi\rangle_s\right| < 2M\mu + M \|u_\mu(t) - u_\beta(t)\|_{L^2} ,$$

donde hemos usado la desigualdad triangular, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la continuidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (16), $L^2(\mathbf{R}) \hookrightarrow H^s(\mathbf{R})$ y $\|\varphi_\mu\|_s \leq \rho^{1/2}(t) \leq \sup_{t\in[0,T]} \rho^{\frac{1}{2}}(t) = M$. Luego, del teorema 3.3 se concluye la demostración. ■

Teorema 3.5. *Si u_0 satisface la hipótesis del teorema 3.4, entonces $u_0 = u_0(t)$ satisface (KdV) en casi todo punto de $[0,T]$.*

Prueba. Definimos

$$\begin{cases} G_\mu\left(u_\mu\left(t\right)\right) = -A_\mu u_\mu\left(t\right) - u_\mu \partial_x u_\mu \\ G_0\left(u_0\left(t\right)\right) = -A_0 u_0\left(t\right) - u_0 \partial_x u_0 \end{cases}, \ t \in [0,T].$$

Del teorema 3.4 se tiene que $w - \lim\limits_{\mu\to 0^+} u_\mu\left(t\right) = u_0\left(t\right)$ en $H^s\left(\mathbf{R}\right)$, y $\partial_x : H^s\left(\mathbf{R}\right) \to H^{s-1}\left(\mathbf{R}\right)$ es un operador lineal acotado, luego el operador ∂_x es débilmente secuencialmente continuo. Entonces

$$w - \lim_{\mu\to 0^+} u_\mu \partial_x u_\mu = u_0 \partial_x u_0 \text{ en } H^{s-1}\left(\mathbf{R}\right), \tag{17}$$

y,

$$w - \lim_{\mu\to 0^+} A_\mu u_\mu\left(t\right) = A_0 u_0\left(t\right) \text{ en } H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right). \tag{18}$$

En efecto, como $w - \lim\limits_{\mu\to 0^+} u_\mu\left(t\right) = u_0\left(t\right)$ en $H^s\left(\mathbf{R}\right)$, y $\partial_x^3 : H^s\left(\mathbf{R}\right) \to H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$ es un operador lineal limitado, así, el operador ∂_x^3 es débilmente secuencialmente continuo, entonces

$$w - \lim_{\mu\to 0^+} \partial_x^3 u_\mu = \partial_x^3 u_0 \text{ en } H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right).$$

Análogamente, como $H^s\left(\mathbf{R}\right) \subset H^{s-2}\left(\mathbf{R}\right) \subset H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$

$$w - \lim_{\mu\to 0^+} \partial_x^2 u_\mu = \partial^2 u_0 \text{ en } H^{s-2}\left(\mathbf{R}\right)$$

así,

$$w - \lim_{\mu\to 0^+} \left(\partial_x^3 u_\mu - \mu \partial_x^2 u_\mu\right) = \partial_x^3 u_0 - \mu \partial^2 u_0 \text{ en } H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right).$$

Luego de (17) y (18) concluimos que

$$w - \lim_{\mu\to 0^+} G_\mu\left(u_\mu\left(t\right)\right) = G_0\left(u_0\left(t\right)\right) \text{ en } H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right), \ t \in [0,T].$$

Por otro lado,

$$\partial_t u_\mu\left(t\right) = G_\mu\left(u_\mu\left(t\right)\right) \ , \ 0 \le t \le T_+ \text{ en } H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right),$$

e integrando de ξ a t , obtenemos

$$u_\mu\left(t\right) - u_\mu\left(\xi\right) = \int_\xi^t G_\mu\left(u_\mu\left(r\right)\right) dr. \tag{19}$$

Como la aplicación

$$t \in [0,T] \mapsto G_0\left(u_0\left(t\right)\right) \in H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$$

es fuertemente medible, se sigue que es integrable Bochner; así, del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos

$$w - \lim_{\mu \to 0^+} \int_\xi^t G_\mu\left(u_\mu\left(r\right)\right) dr = \int_\xi^t G_0\left(u_0\left(t\right)\right) dr \text{ en } H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$$

y luego tomando el límite débil en $H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$, cuando $\mu \to 0^+$ en (19) tenemos que para ξ, $t \in [0,T_+]$

$$u_0\left(t\right) - u_0\left(\xi\right) = \lim_{\mu \to 0^+} \int_\xi^t G_\mu\left(u_\mu\left(r\right)\right) dr = \int_\xi^t G_0\left(u_0\left(r\right)\right) dr.$$

Esto es, $u_0 \in AC\left([0,T], H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)\right) \cap C\left([0,T], H^s\left(\mathbf{R}\right)\right)$ y satisface (KdV) en casi todo punto de $[0,T]$.

Como $u_0\left(t\right) \rightharpoonup \varphi$, cuando $t \to 0^+$ en $H^s\left(\mathbf{R}\right)$ y de $\left\|u_\mu\left(t\right)\right\|_s^2 \leq \rho\left(t\right)$, se tiene que

$$\lim_{\mu \to 0^+} \sup \left\|u_0\left(t\right)\right\|_s \leq \lim_{\mu \to 0^+} \rho^{1/2}\left(t\right) = \left\|\varphi\right\|_s;$$

entonces

$$u_0\left(t\right) \to \varphi, \text{ cuando } t \to 0^+ \text{ en } H^s\left(\mathbf{R}\right)$$

pues $H^s\left(\mathbf{R}\right)$ es Hilbert. De éste modo concluimos que u_0 es continua por la derecha de $t = 0$ en $H^s\left(\mathbf{R}\right)$. ■

Teorema 3.6. *Para $s > \frac{3}{2}$, existe $T > 0$ y una única solución*

$$u_0 \in C\left([0,T], H^s\left(\mathbf{R}\right)\right) \cap C^1\left([0,T], H^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)\right);$$

de (KdV) satisfaciendo

$$\left\|u_0\left(t\right)\right\|_s^2 \leq \rho\left(t\right) \quad , \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde $\rho = \rho\left(t\right)$ satisface $\rho\left(0\right) = \left\|\varphi\right\|_s$.

Prueba. La existencia está dada por la proposición 3.5. Veamos la unicidad. Sean

$$u, v \in C([0,T], H^s(\mathbf{R})) \cap AC\left([0,T], H^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

dos soluciones de (KdV) y consideremos

$$f(t) = \|u(t) - v(t)\|_{L^2}^2 \;, \quad 0 \le t \le T.$$

Entonces

$$\frac{df}{dt}(t) = 2\left\langle u - v, -\partial_x^3 (u - v)\right\rangle_{L^2} + 2\left\langle u - v, -\tfrac{1}{2}\partial_x \left(u^2 - v^2\right)\right\rangle_{L^2} \quad (20)$$

pero

$$\begin{aligned} &\left\langle u - v, -\tfrac{1}{2}\partial_x \left(u^2 - v^2\right)\right\rangle_{L^2} \\ &\qquad = \frac{1}{4}\max\{\|u\|_s, \|v\|_s\} f(t) \le M f(t) \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$M = \max\left\{\sup_{0\le t\le T_+} \|u\|_s, \sup_{0\le t\le T_+} \|v\|_s\right\},$$

y

$$\left\langle u - v, \partial_x^3 (u - v)\right\rangle_{L^2} = 0. \quad (22)$$

Sustituyendo (21) y (22) en (20) se obtiene

$$\frac{df}{dt}(t) \le M f(t), \; 0 \le t \le T,$$

luego integrando de 0 a t, obtenemos

$$f(t) \le f(0) + \int_0^t M f(r)\, dr, 0 \le t \le T.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, se tiene

$$f(t) \le f(0) \exp\left(\int_0^t M dr\right), 0 \le t \le T. \quad (23)$$

Pero $f(0) = 0$, luego de (23) se tiene que $f(t) \le 0$ y que $f(t) = \|u(t) - v(t)\|_0^2 \ge 0$ en $t \in [0,T]$; así se sigue que $u(t) = v(t)$, para todo $t \in [0,T]$, y de ahí la unicidad.

Finalmente mostraremos que u_0 es continua por la derecha de $\xi \in [0, T[$, para esto consideramos

$$u(t) = u_0(t+\xi), \quad 0 \le t+\xi \le T.$$

u satisface

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = -A_0 u(t) - u(t)\, \partial_x u(t), & 0 < t \\ u(0) = u_0(\xi), & \end{cases}$$

en casi todo punto de $[0, T_+]$, pues, teniendo en cuenta que u_0 satisface (KdV) tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= \partial_t u_0(t+\xi) \\ &= -A_0 u_0(t+\xi) - u_0(t+\xi)\, \partial_t u_0(t+\xi) \\ &= -A_0 u(t) - u(t)\, \partial_x u(t) \end{aligned}$$

y

$$u(0) = u_0(0+\xi) = u_0(\xi).$$

Por tanto, $u = u(t)$ es continua a la derecha de ξ en $H^s(\mathbf{R})$. De la unicidad, se sigue que u_0 es continua a la derecha de ξ, completando la demostración del teorema. ■

Referencias

[1] Iorio Jr., R.J. (1990) *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces.* Functional Analytical Methods for PDE. Lect. Notes in Math., 1450.

[2] Iorio Jr., R.J.; Iorio, V. (2001). *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge University Press, New York.

[3] Iorio, R.; Linares, F.; Scialom, M. (1998). *KdV and BO equations with bore-like data.* Differential and Integral Equations, 11, 895-915.

[4] Mendoza, A.; Montealegre, J. (2000). *Existencia y unicidad local para la ecuación de Korteweg - De Vries.* Reporte de investigación, N°10 Serie B, PUCP.

[5] MONTEALEGRE, J.; PETROZZI, S. (1998). *Operadores dispativos maximales.* Reporte de investigación, N°2 Serie B, PUCP.

[6] MONTEALEGRE, J.; PETROZZI, S. (1999). *Semigrupos de operadores lineales y ecuaciones de evolución semi-lineales.* Reporte de investigación, N°6 Serie B, PUCP.

[7] PETROZZI, S. (1999). *Semigrupos de operadores lineales y ecuaciones de evolución lineales autónomas.* Tesis de maestría, PUCP.

[8] DOS SANTOS, M. (1987). *A versão de Kato-Lai de Galerkin e a equação de Korteweg-de Vries.* Tesis de Mestrado, IMPA.

Aldo Mendoza Uribe
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional Agraria La Molina
amendoza@lamolina.edu.pe

Juan Montealegre Scott
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
jmscott@pucp.edu.pe