Pro Mathematica Vol. XVII, N° 34, 2003

SUPERFICIES EN EL GRUPO DE HEISENBERG

Christian ***Figueroa***

Resumen

Discutiremos la existencia de las superficies umbílicas en el grupo de Heisenberg usando la aplicación normal de Gauss.

✎ *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1 El Grupo de Heisenberg

El álgebra de Heisenberg, $\mathfrak{h}_3$, es un álgebra de Lie de dimensión 3 el cual es nilpotente de orden 2. Debido al teorema de Ado podemos considerar todo álgebra de Lie como un subalgebra del álgebra de las transformaciones lineales, $gl(V)$. En el caso particular de un álgebra nilpotente, se garantiza que, existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $Av = 0$ para todo $A \in \mathfrak{h}_3$. Como consecuencia, existe una base de V tal que todo $A \in \mathfrak{h}_3$ se puede representar como una matriz triangular con ceros en la diagonal, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a la correspondencia biunivoca entre las álgebras de Lie y los grupos de Lie simplemente conexos, al grupo simplemente conexo cuya álgebra es $\mathfrak{h}_3$ lo denotaremos por $\mathcal{H}_3$ y lo llamaremos de grupo de Heisenberg. Usando la fórmula de Campbell-Hausdorff se puede demostrar que la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{h}_3 \to \mathcal{H}_3$ dada por

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. es un difeomorfismo global. Aprovechamos este resultado para representar este grupo de una manera más simple. Primero identificamos el algebra $\mathfrak{h}_3$ con el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ mediante el siguiente isomorfismo (de espacios vectoriales):

$$\phi : (a, b, c) \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando este isomorfismo y la aplicación exponencial, inducimos en $\mathbb{R}^3$ la operacion del grupo $\mathcal{H}_3$, es decir,

$$(a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) = \left(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 - \frac{b_1 a_2}{2} + \frac{a_1 b_2}{2} \right).$$

donde $(a_i, b_i, c_i) \in \mathbb{R}^3$. De esta manera la aplicaciòn ϕ resulta un isomorfismo de grupos de Lie y de ahora en adelante consideraremos al grupo de Heisenberg como $\mathbb{R}^3$ junto con esta operación $*$.

El corchete del álgebra de Heisenberg, en términos de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, está dada por

$$\begin{cases} [e_1, e_2] & = & e_3 \\ [e_i, e_3] & = & 0, \, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Considerando el producto interno en el espacio tangente de la identidad de tal manera que la base conónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ resulte una base ortonormal, obtenemos una base ortonormal para los campos invariantes a izquierda.

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

y la métrica invariante a izquierda asociada a este producto interno, puede ser expresada de la siguiente forma.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz\right)^2$$

Provista de una métrica invariante a izquierda, el grupo de Heisenberg se convierte en una variedad riemanniana la cual tiene una rica estructura geométrica reflejada en el hecho de que su grupo de isometria $\mathfrak{Iso}\,(\mathcal{H}_3, g)$ es de dimensión 4.

La siguiente proposición nos da información sobre el grupo de isometria de $\mathcal{H}_3$.

Teorema 1. *Sea g una métrica invariante a izquierda en $\mathcal{H}_3$. Entonces el grupo de isometrías de $\mathcal{H}_3$ es isomorfa al producto semidirecto de $\mathcal{H}_3$ con $SO\,(2)$, donde $\mathcal{H}_3$ actúa por translaciones a izquierda.*

Demostración. Ver [1]

2 La Aplicación Normal de Gauss

Recordemos que la aplicación normal de Gauss para una superficie regular S dentro del espacio euclideano $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\gamma : S \to S^2$ que hace corresponder a cada punto de la superficie su normal unitaria. Esto significa lo siguiente: Sea $p \in S$, $N\,(p)$ la normal unitaria a S en el punto p y $L_{-p}\,(q) = q - p$, la traslación en $\mathbb{R}^3$, entonces $\gamma\,(p) =$

$dL_{-p}(N(p))$. El diferencial de esta aplicación define la segunda forma fundamental de esta superficie en $\mathbb{R}^3$. El siguiente teorema generaliza la situación anterior para hipersuperficies dentro de un grupo de Lie cualquiera.

Teorema 2. *Sea S una hipersuperficie del grupo de Lie G, entonces*

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = -\left(A_\eta(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v)\right)$$

donde $v \in T_pS$, A_η es la aplicación de Weingarten de S y $\alpha_{\bar{\eta}} = \nabla_v\bar{\eta}$ con $\bar{\eta}$ es un campo invariante a izquierda tal que $\eta(p) = \bar{\eta}(p)$.

Demostración. Sean $\{E_i\}$ una base ortonormal de los campos invariantes a izquierda y η el campo normal unitario a S, entonces $\eta = \sum a_iE_i$. Si $e \in G$ es el elemento identidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} d\gamma_p(v) &= \textstyle\sum v(a_i)\, E_i(e) \\ dL_p \circ d\gamma_p(v) &= \textstyle\sum v(a_i)\, E_i(p) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \nabla_v\eta &= \textstyle\sum v(a_i)\, E_i(p) + a_i(p)\, \nabla_v E_i \\ &= \textstyle\sum v(a_i)\, E_i(p) + \nabla_v \sum a_i(p)\, E_i \\ &= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \nabla_v\bar{\eta} \end{aligned}$$

■

En el caso particular de las superficies en $\mathcal{H}_3$ podemos expresar de manera explicita a los operadores $dL_p \circ d\gamma_p$ y $\alpha_{\bar{\eta}}$ cuando la superficie es el gráfico de una función f. Paramatrizando esta superficie como

$$X(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

donde $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, tenemos la base del espacio tangente T_pS asociada a esta parametrización

$$\begin{aligned} X_x &= (1,0,f_x) &&= E_1 + \left(f_x + \tfrac{y}{2}\right)E_3 \\ X_y &= (0,1,f_y) &&= E_2 + \left(f_y - \tfrac{x}{2}\right)E_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces, el campo normal unitario a la superficie S está dado por

$$\eta(x,y) = -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)E_2 + \frac{1}{w}E_3 \tag{2}$$

donde $w = \sqrt{1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2}$.

Por otro lado, la aplicación normal de Gauss $\gamma :\rightarrow S^2 = \{v \in \tilde{h}_3 : |v| = 1\}$ está dada por

$$\gamma(p) = dL_{p^{-1}} \circ \eta(p)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} d\gamma(T_pS) &\subseteq T_{\gamma(p)}S^2 \\ &= \{\gamma(p)\}^{\perp} \\ &= dL_{p^{-1}}(T_pS) \end{aligned}$$

Es decir, $dL_p \circ d\gamma(T_pS) \subseteq T_pS$. La matriz que representa al operador $dL_p \circ d\gamma_p$, en la base $\{X_x, X_y\}$, está dada por

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)_x & -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{w}\right)_y \\ -\left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)_x & -\left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{w}\right)_y \end{pmatrix} \tag{3}$$

Y la matriz que representa al operador $\alpha_{\bar{\eta}}$ en esta misma base, está dada por

$$\frac{1}{2w}\begin{pmatrix} -\left(f_x + \frac{y}{2}\right)\left(f_y - \frac{x}{2}\right) & 1 - \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 \\ \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 - 1 & \left(f_x + \frac{y}{2}\right)\left(f_y - \frac{x}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Veamos algunas consecuencias

Proposición 3. *Las únicas superficies conexas de $\mathcal{H}_3$ cuya aplicación de Gauss es de rango 0 son los planos verticales.*

Demostración. Sea S una superficie de $\mathcal{H}_3$, la cual parametrizamos como gráfico de una función $f(x, y)$. Como ya vimos, la base del espacio tangente a S asociada a esta parametrización esta dada por

$$\begin{aligned} X_x &= (1, 0, f_x) &= E_1 + \left(f_x + \tfrac{y}{2}\right)E_3 \\ X_y &= (0, 1, f_y) &= E_2 + \left(f_y - \tfrac{x}{2}\right)E_3 \end{aligned}$$

Si existe un $p \in S$ tal que $d\gamma_p = 0$, entonces $dL_{p^{-1}}(T_pS)$ es una subalgebra de $\tilde{h}_3$, ver ([2]). Pero por otro lado, $\left[dL_p^{-1}(X_x), dL_p^{-1}(X_y)\right] = e_3 \notin dL_p^{-1}(T_pS)$, para todo $p \in S$, lo que nos lleva a una contradicción.

En el caso de que la superficie S sea vertical, podemos considerarla como una superficie reglada por rectas verticales, que son geodésicas en $\mathcal{H}_3$. Esto nos permite parametrizarla de la siguiente forma:

$$X(t, s) = (a(t), b(t), s)$$

donde $t \in I, s \in \mathbb{R}$. La base del espacio tangente T_pS asociada a esta parametrización, está dada por

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & a'(t)\, E_1 + b'(t)\, E_2 + \frac{1}{2}\left(a'b - ab'\right) E_3 \\ X_s & = & E_3 \end{array}$$

luego, la normal unitaria a esta superficie está dada por

$$\eta(t,s) = \frac{b'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} E_1 - \frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} E_2$$

Si η es constante entonces $a'(t) = a_0$ y $b'(t) = b_0$ es decir, la superficie es un plano vertical. ■

Otra consecuencia se refiere a las superficies umbílicas. Previamente recordemos algunas definiciones. Sea $S \subset M$ una superficie (o subvariedad de codimensión 1) de una variedad riemanniana M de dimensión 3, decimos que S es umbílica si para todo $p \in S$, la segunda forma fundamental B en p satisface la siguiente igualdad

$$< B(X,Y), \eta > (p) = \lambda(p) < X, Y >$$

donde $<,>$ es la métrica del espacio ambiente y la métrica de inducida en S y X e Y son dos campos vectoriales tangentes a la subvariedad. Esto es equivalente a decir la aplicación de Weingarten A_η es un múltiplo de la identidad. Es un resultado conocido, que las superficies umbílicas de $\mathbb{R}^3$, con la métrica euclideana, están contenidas en un plano o una esfera. Para mayor información, ver [3]. En el caso particular del grupo de Heisenberg, $\mathcal{H}_3$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4. *No existen superficies umbílicas en $\mathcal{H}_3$.*

Demostración. Sea S una superficie umbílica tal que esta paramétrizada como gráfico de una función diferenciable f. Entonces

$$\begin{array}{rcl} A_\eta(X_x) & = & \lambda X_x \\ A_\eta(X_y) & = & \lambda X_y \end{array}$$

La ecuación Codazzi, en el caso umbílico, se escribe de la siguiente manera:

$$R(X_x, X_y)\,\eta = X_y(\lambda)\, X_x - X_x(\lambda)\, X_y$$

Sustituyendo (1) y (2) en la ecuación anterior, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \lambda_x &= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{w}\right) \\ \lambda_y &= -\left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{w}\right) \end{aligned}$$

Como $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, tenemos que la matriz que representa a $dL_p \circ d\lambda_p$ en la base anterior resulta una matriz simétrica. Debido al teorema (2) concluimos, también, que la matriz que representa al operador $\alpha_{\bar{\eta}}$, en la misma base es simétrica. Esto obliga a que

$$w = \sqrt{3}$$

Pero esto implica

$$\left(f_x + \frac{y}{2}\right)_y = \left(f_y - \frac{x}{2}\right)_x$$

lo cual es absurdo.

Si la superficie umbílica fuera vertical entonces podemos considerarla como una superficie reglada, la cual podemos parametrizarla como antes, es decir

$$X(t,s) = (t, a(t), s)$$

donde $t \in I, s \in \mathbb{R}$. Los coeficientes de la primera fundamental son

$$\begin{aligned} E &= 1 + (a')^2 + \tfrac{1}{4}(a - ta')^2 \\ F &= \tfrac{1}{2}(a - ta') \\ G &= 1 \end{aligned}$$

Y los coeficientes de la segunda forma fundamental en esta base, son

$$\begin{aligned} L &= \frac{(a-ta')\left(1+(a')^2\right)-2a''}{2\sqrt{1+(a')^2}} \\ M &= \frac{\sqrt{1+(a')^2}}{2} \\ N &= 0 \end{aligned}$$

Como la superficie es umbílica, entonces las entradas de la matriza de Weingarten son nulas, en cualquier base, esto implica que $GM = 0$ (absurdo) ■

Recordando que una subvariedad totalmente geodésica es aquella que tiene su segunda forma fundamental nula, es decir toda geodésica de la subvariedad es también geodésica del espacio ambiente, entonces una consecuencia inmediata de la última proposición es que no existen superficies totalmente geodésicas en el grupo de Heisenberg.

Referencias

[1] KAPLAN, A. (1983). *On the geometry of groups of Heisenberg type.* Bull. London Math. Soc., **15** , 35-42.

[2] RIPOLL, J. (1991). *On Hypersurfaces of Lie group.* Illinois Journal of Mathematics, vol. **35**, 1.

[3] DO CARMO, M. Geometria Riemanniana, Projeto Euclides.

Christian Figueroa
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias, PUCP
cfiguer@pucp.edu.pe.