Pro Mathematica Vol. XVII, N° 34, 2003

SOBRE LA K-TEORÍA PARA ÁLGEBRAS DE FRÉCHET

Christian ***Valqui***

Resumen

En esta exposición revisaremos algunos aspectos de la K-teoría para álgebras de Banach y luego veremos la generalización para álgebras de Fréchet.

Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.

Introducción

El siguiente artículo se basa en una charla dada en el XXI Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana del 13 al 17 de octubre en la Universidad Nacional San Agustín de Arequipa. Es básicamente una descripción de las distintas K-teoría que se han definido en distintas categorías empezando de espacios topológicos, álgebras C*, álgebras de Banach, álgebras de Fréchet, m-álgebras y álgebras localmente convexas.

1 Definición de la K-teoría

Definición 1.1. *Un álgebra de Banach (con 1) es un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{C}$ *con una multiplicación* $A \times A \to A$ *que es bilineal, asociativa y cumple*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

para todo $x, y \in A$ *y también* $\|1\| = 1$.

Definición 1.2. *Sea* A *un álgebra de Banach con 1. Consideremos el conjunto de las clases de equivalencia de idempotentes en* $M_\infty(A)$*:*

$$V(A) := \{[e], e \in M_\infty(A), e^2 = e\}$$

donde dos idempotentes son equivalentes si se pueden conectar con un camino de idempotentes, es decir,

$$e \sim f \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ e_t,\ \ e_t^2 = e_t,\ \ e_0 = e \ \ y \ \ e_1 = f.$$

La suma en $V(A)$ está dada por:

$$[p] + [q] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & & \\ 0 & & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \right]$$

Se verifica que $V(A)$ con esta operación es un semigrupo conmutativo, isomorfo al de los módulos proyectivos finitamente generados sobre A

con la suma directa de módulos (ver [1, 1.7]). Se ve además que en $M_\infty(A)$ la siguiente relación de equivalencia definida por:

$$e \sim_u f \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u_t, \quad u_t \in INV(A) \quad u_0 = 1 \quad y\ u_1^{-1} e u_1 = f$$

nos da las mismas clases de equivalencia.

Ahora definimos el grupo $K_0(A)$ como el grupo envolvente o grupo de Grothendieck de $V(A)$. Los elementos de $K_0(A)$ se pueden escribir entonces como diferencias formales $[p] - [q]$ de clases de equivalencia de idempotentes, donde se identifican dos diferencias $[e_1]-[f_1] = [e_2]-[f_2]$ si existen idempotentes ortogonales e_i', f_i', g en $M_\infty(A)$ con $e_i' \sim e_i, f_i' \sim f_i$ y $e_1' + f_2' + g \sim e_2' + f_1' + g$.

Como ejemplo se puede calcular que $V(\mathbb{C}) \overset{\cong}{\to} \mathbb{N}$ donde a cada clase de idempotentes se le asigna la dimensión de la imagen de un representante. Por lo tanto $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$. Si A es no-unital, se define

$$K_0(A) := Ker\left(K_0(A^+) \to K_0(\mathbb{C})\right)$$

donde $A^+ = A \oplus \mathbb{C}, (x, \lambda) \cdot (y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$ es la unitalización de A.

Se puede calcular ahora la K-teoría de

$$C(0,1) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C}, cont., \ tq.\ f(0) = f(1) = 0\}$$

que es un álgebra no unital, y se obtiene que $K_0(C(0,1)) = 0$. Seguidamente definimos

$$K_1(A) := K_0(A \otimes C(0,1))$$

donde el producto tensorial lleva la norma proyectiva.

2 Propiedades y Ejemplos

Las propiedades más importantes de la K-teoría son la invarianza por homotopías y la escisión, que conjuntamte con su valor en $\mathbb{C}$ permiten calcular la K-teoría en un gran número de casos:

Si $f \simeq g : A \to B$ son dos homomorfismos homotópicos, entonces $K(f) = K(g) : K(A) \to K(B)$. Esto implica que si dos álgebras de Banach son homotópicamente equivalentes, entonces poseen la misma K-teoría.

Sea $I \lhd A$ un ideal cerrado y bilátero de A con una retracción lineal y continua, es decir, se tiene una extensión de álgebras de Banach que parte lineal y continuamente:

$$0 \to I \to A \overset{\overset{s}{\curvearrowleft}}{\overset{\pi}{\to}} A/I \to 0.$$

Entonces se tiene una secuencia exacta de seis términos:

$$\begin{tikzcd}
K_0(I) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(A/I) \arrow[d] \\
K_1(A/I) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l] & K_1(I) \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

Aquí una secuencia exacta de grupos abelianos es la que cumple que la imagen del homomorfismo que llega a un grupo es igual al núcleo del que sale.

Vamos a calcular ahora la K-teoría de los ideales de las extensiones universales de longitud n. Para esto definimos para todo álgebra de Banach A el álgebra tensorial TA, que es la compleción del algebra tensorial usual

$$T_{alg}A = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \dots$$

respecto a la norma $exp(p) = \sum_n p^{\otimes n}$ donde $p(x) = \|x\|$ es la norma dada en el álgebra A y el producto tensorial proyectivo de dos normas p, q en A, B se define como

$$q \otimes p(x) := \inf \left\{ \sum_i q(x_1^i) \cdot p(x_2^i) \mid x = \sum_i x_1^i \otimes x_2^i \right\}$$

para $x \in A \otimes B$, y similarmente para un producto tensorial de más factores.

Se sabe que TA es contráctil, es decir, es homotópicamente equivalente a 0. Para esto es suficiente verificar que la familia $f_t : TA \to TA$ dada por $f_t(x) = t^n x$ para $x \in A^{\otimes n}$ nos da una homotopía que conecta la identidad con el morfismo nulo.

Además se tiene una extensión que parte

$$0 \to JA \to TA \overset{\overset{s}{\curvearrowleft}}{\overset{\mu}{\to}} A \to 0$$

donde μ es la aplicación que consiste en multiplicar para cada n los factores de $A^{\otimes n}$ y luego sumar los resultados de los distintos sumandos directos homogéneos. JA es por definición el núcleo de μ y el split lineal y continuo es simplemente la inclusión de A en TA como sumando directo. El resultado de escisión nos da una secuencia exacta:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(JA) & \longrightarrow & K_0(TA) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A) & \longleftarrow & K_1(TA) & \longleftarrow & K_1(JA) \end{array}$$

Como la K-teoría de 0 es 0 y $TA \simeq 0$, se obtiene dos secuencia exactas

$$0 \to K_0(A) \to K_1(JA) \to 0$$

y

$$0 \to K_1(A) \to K_0(JA) \to 0$$

Lema 2.1. *Una secuencia de grupos abelianos* $0 \to G \to H \to 0$ *es exacta si y solamente si* $G \overset{\cong}{\to} H$. ■

Resumiendo tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.2.

$$K_0(A) \cong K_1(JA) \quad y \quad K_1(A) \cong K_0(JA)$$

■

Corolario 2.3.

$$K_0(J^{2k}\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \quad y \quad K_1(J^{2k}\mathbb{C}) \cong 0$$

Demostración Por el cálculo del ejemplo y por la proposición se tiene que

$$\mathbb{Z} \cong K_0(\mathbb{C}) \cong K_1(J\mathbb{C}) \cong K_0(J(J(\mathbb{C}))) = K_0(J^2\mathbb{C}) \cong \ldots K_0(J^{2k}\mathbb{C})$$

y también

$$0 = K_1(\mathbb{C}) \cong K_0(J\mathbb{C}) \cong K_1(J(J(\mathbb{C}))) = K_1(J^2\mathbb{C}) \cong \ldots K_1(J^{2k}\mathbb{C})$$

■

3 K-Teoría en Otras Categorías de Álgebras

En [4] se define una K-teoría para álgebras de Fréchet, que son límites inversos de álgebras de Banach:

$$A = \lim_{\leftarrow} A_n.$$

Aquí el límite inverso se toma a partir de la familia A_n con homomorfismos $\sigma_n : A_n \to A_{n-1}$ y los elementos de A se pueden ver como una secuencia $(a_1, a_2, \dots)$ que cumple $\sigma_n(a_n) = a_{n-1}$ para todo n.

Como ejemplo tenemos al álgebra de matrices rapidamente decrecientes $\mathcal{K}$. Aqui definimos el álgebra de Banach K_N como la compleción de $M_\infty(\mathbb{C})$ respecto a la norma p_N dada por $p_N = \sum_{n=0}^{N} p_n$ con

$$p_n((a_{ij})) = \frac{1}{n!} \sum_{i,j} (i+j)^n \|a_{ij}\|$$

para una matriz $(a_{ij}) \in M_\infty(\mathbb{C})$. Los mapeos $K_N \to K_{N-1}$ son los inducidos por la identidad en $M_\infty(\mathbb{C})$ y ponemos finalmente

$$\mathcal{K} := \lim_{\leftarrow} K_N.$$

Si A es un álgebra de Fréchet ponemos

$$K_0(A) = \{[e], e \in M_2(A \otimes K^+),\ tq\ e - e_1 \in M_2(A \otimes K)\}$$

donde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Comentarios Finales

La K-teoría originalmente se definió para espacios topológicos a través del grupo envolvente del semigrupo de fibrados vectoriales. Luego se vió que se podía definir la K-teoría para álgebras C^*, incluyendo el caso de un espacio topológico X considerando el álgebra de funciones continuas $C(X)$ sobre X. La K-teoría de álgebras C^* es la K-teoría que ha tenido el mayor desarrollo y los mayores éxitos. Seguidamente se definió una K-teoría para álgebras de Banach, que es la que hemos descrito más detalladamente. Finalmente vimos la K-teoría para álgebras de Fréchet. En todas estas extensiones la K-teoría coincide con la definida anteriormente en la categoría más pequeña. En [2] J. Cuntz define una K-teoría bivariante en la categoría de m-álgebras que son límites inversos de álgebras de Banach, pero ya no indexados por $\mathbb{N}$ sino con conjuntos de índices arbitrarios. También se demuestra que esta K-teoría coincide con la definida por Phillips en álgebras de Fréchet. Recientemente [3] Cuntz construye una K-teoría bivariante para la categoría de álgebras localmente convexas que contiene como subcategoría a las m-álgebras. Sin embargo, esta K-teoría no coincide con las definidas anteriormente en estas subcategorías. Todavía no se ha podido calcular esta teoría en el caso más simple: $R = kk(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Lo que se sabe es que R es un anillo conmutativo con unidad no trivial; el cálculo de las características de R es un tema muy actual de investigación.

Referencias

[1] BLACKADAR, B. (1998). *K-theory for Operator Algebras* (2. Ed) Cambridge University Press.

[2] CUNTZ, J. (1997). *Bivariante K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern -Connes-Character* Doc. Math. J. DMV 2, 213-261.

[3] CUNTZ, J. *Bivariant K-theory and the Weyl-algebra* Preprint.

[4] PHILLIPS, C. (1991). *K-theory for Fréchet algebras* International Journal of Mathematics vol. 2 no. 1, 77-129.

Christian Valqui
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
cvalqui@pucp.edu.pe