Pro Mathematica Vol. XVII, N° 34, 2003

CINCO PEQUEÑAS JOYAS

Marcelo ***Machicao***

Resumen

Ante el antiguo problema sociocultural en que la estética y la sensibilidad son contrapuestas ante el razonamiento científico, se exponen cinco ejemplos que abogan por la íntima conexión entre matemáticas y belleza.

Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia.

Uno de los más apreciados poemas de Walt Whitman dice

"Cuando oí al sabio astrónomo
cuando las pruebas y las cifras
aparecieron ante mí en columnas
cuando me mostraron los mapas
y diagramas para sumar, dividir y medir
Cuando sentado en la sala escuché al astrónomo
que al terminar su conferencia
recibió muchos aplausos,
¡qué indecibles allí fueron mi cansancio y mi tedio!
Hasta que me levanté y salí a vagar a solas
en el místico, húmedo aire de la noche,
y, de tiempo en tiempo, miré hacia arriba
y vi en perfecto silencio las estrellas"

Tengo la impresión de que muchas personas al leer este poema se dirán a sí mismas con gran regocijo "¡Cuánta verdad encierran estas frases. Realmente la ciencia y las matemáticas despojan de su encanto y misterio a todas las cosas y las reducen a la frialdad de los cálculos, cifras, medidas y abstrusos razonamientos".

En una noche clara y a campo abierto, y mejor aún lejos del resplandor de las luces artificiales, el contemplar las estrellas es, ¿qué duda cabe?, una de las experiencias más fascinantes que ofrece la naturaleza. No obstante esa porción de cielo que vemos (con tal vez unas 2500 estrellas en las noches más claras) como hoy en día sabemos, no es todo lo que hay; por el contrario ello constituye una insignificante porción en la inmensidad del universo. Esos refulgentes puntos del cielo son mundos; mundos todos ellos de una extraña e inquietante belleza. Otros puntos que vemos, algo más brillantes, son en realidad soles. Algunos son de grandeza inimaginable y brillan con la luz de mil soles como el nuestro. Sin embargo todos ellos se reducen a meros puntos de luz si lo único que hacemos es contemplar el cielo nocturno.

A ese exiguo puñado de estrellas que observamos en perfecto silencio se le une una horda de cientos de miles de millones de otras estrellas que no vemos, para formar lo que semeja una enorme rueda giratoria suspendida en el espacio. Tal rueda giratoria, la galaxia llamada Vía Láctea, se extiende tanto en el espacio que la luz -viajando a 299.784

kilómetros por segundo- tarda 100.000 años en cruzarla de extremo a extremo.

Más allá de la Vía Láctea hay otras galaxias, alrededor de veinte, que unidas a la nuestra forman un racimo o conglomerado de galaxias. Y más allá todavía hay otros conglomerados similares, algunos formados por cientos de galaxias. Se extienden hacia el infinito, tan lejos como nuestros telescopios más potentes alcanzan y parecen no tener fin.

Hay en el universo otros objetos enigmáticos como los cuasares, los pulsares, las estrellas gemelas, los hoyos negros y sistemas planetarios similares al nuestro. Esta visión del cosmos -mucho más allá de la imaginación humana- fue posible gracias al trabajo de cientos de hombres dedicados al trabajo científico, hombres que de un modo u otro tuvieron que emplear los cálculos, las mediciones y los razonamientos; es decir tuvieron que emplear en última instancia, las matemáticas para obtener tales conocimientos.

Walt Whitman murió en el año 1892 y la gran mayoría de estos descubrimientos datan de los últimos 50 años. El poeta nunca llegó a saber cuan limitada belleza observaba cuando miró el cielo nocturno en silencio.

Otra parte que llama la atención en el poema de Whitman es aquella en la cual se refiere a cifras, tablas, medidas y operaciones aritméticas. Esa parte refleja un prejuicio sumamente extendido entre las personas ajenas a las matemáticas. Gran cantidad de ellas se imagina que la totalidad del quehacer matemático consiste en efectuar intrincados cálculos aritméticos, analizar cantidades interminables de cifras, medidas y tablas y manipular ampulosas expresiones algebraicas [1].

Como es sabido, entre los matemáticos de gran talento, hubieron algunos como Euler, Gauss y Von Neumann con una asombrosa capacidad para efectuar cálculos aritméticos; pero también hubieron otros cuyas capacidades no eran muy distintas a las de la persona promedio.

Sin duda, parte del origen de esta visión distorsionada, hay que buscarlo en la educación matemática elemental. Es de sobra conocido

[1] Un pequeño incidente que confirma en parte tal prejuicio: estando a veces un matemático entre amigos con limitada formación en este campo, surge la necesidad de emplear una calculadora. No falta uno que comenta: -Pero si aquí tenemos un matemático, ¡no hace falta una calculadora!

que la enseñanza a tal nivel presenta severas deficiencias: obsesivo énfasis en procesos algorítmicos y mecanicistas; escasa o nula incidencia en los procesos de razonamiento y su importancia y, desde luego, una total falta de motivación.

Con tal estado de cosas resulta difícil esperar que el común de la gente comprenda que cosas tales como cifras, medidas, tablas y diagramas son apenas medios para alcanzar fines, y que tales fines han resultado no pocas veces de enorme trascendencia y repercusión para el desarrollo no solo de la ciencia y la tecnología sino además de la misma civilización humana.

Por similares motivos ha de resultar poco probable encontrar una cantidad significativa de personas que lleguen a comprender que muchos temas y áreas de la matemática han sido desarrolladas por una suerte de conjunción de motivaciones que no siempre tienen que ver con aspectos de valor práctico, sino más bien con cuestiones como la curiosidad intelectual, la íntima complacencia por la contemplación de armoniosas estructuras abstractas; el deleite encantador de crear una sutil demostración; el regocijo inefable de descubrir algún resultado inesperado, y también, no pocas veces, el fervor apasionado, casi obsesivo, por dilucidar alguna notable conjetura.

Muchos matemáticos sobresalientes han descrito la enorme gratificación emotiva y el placer estético que les brindaba la investigación en matemáticas:

> *"Los diseños del matemático como los del pintor o del poeta, deben ser bellos; las ideas como los colores y las palabras deben concordar de una manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas"*
>
> G.H. Hardy

> *"Perseguir una idea es tan emocionante como perseguir una ballena"*
>
> Henry Norris Russell

Varias de las motivaciones y recompensas que inducen a investigar y crear en matemáticas son las mismas que impulsan el trabajo artístico en campos como la música, la pintura y la poesía. Esto al parecer resulta inimaginable para el común de las personas que conciben el trabajo en matemáticas como algo frío, tedioso e impersonal. Más aún, en muchas áreas de las matemáticas, desde elementales hasta avanzadas, el descubrimiento y demostración de resultados depende de esa clase de inspiración que usualmente asociamos a los compositores de música, a los pintores geniales y a los maestros de la poesía. Como dice el historiador Morris Kline "No podemos saber lo que pasa en la mente de un matemático mientras resuelve un problema, más de lo que podemos saber exactamente qué proceso de inspiración llevó a Keats a escribir tan fina poesía o por qué las manos y el cerebro de Rembrant fueron capaces de imprimir en sus pinturas esa profundidad psicológica que sugieren".

La matemática apela al aspecto emotivo y la sensibilidad mucho más de lo que se cree habitualmente. Y mucho más, sin duda, de lo que parece insinuar el poema de Whitman. Por cierto, es probable que el hombre de ciencia que explicaba sus teorías en tal poema haya experimentado también, al desarrollarlas, ese asombro místico y sereno que vivió el poeta al contemplar el cielo nocturno.

Quiero a continuación revisar algunos resultados y curiosidades matemáticas que según mi parecer, presentan en su enunciado o prueba ciertos rasgos de lo que podría llamarse "elegancia matemática". Hay sin duda, desde el nivel elemental hasta el superior, cientos de resultados espléndidos y fascinantes, por lo cual -estoy conciente- elegir unos pocos es una tarea con un alto grado de subjetividad. Los que voy a presentar son todos de nivel elemental y me pareció que constituían magníficos ejemplos para ilustrar la presencia de rasgos tales como la simplicidad, sorpresa, ingeniosidad y elegancia en la labor matemática. Seleccioné en una rápida búsqueda unos 30 resultados con estas características, pero por motivos de tiempo no puedo presentar más que 5 de estas pequeñas joyas, y algunas apenas con una breve mención.

1 El Teorema del Círculo de Descartes

Si se tiene, en el plano, tres círculos de cualquier radio que sean tangentes dos a dos, siempre es posible trazar un cuarto círculo que sea tangente a los otros tres. Por lo general, este problema tiene dos soluciones; en la figura 1 se ve el cuarto círculo en línea más oscura en ambos casos.

¿Existe alguna relación entre los tamaños de cuatro círculos que sean tangentes dos a dos? En noviembre de 1643, René Descartes dirigía una carta a la princesa Isabel de Bohemia en la que presentaba una fórmula de preciosa simetría que daba respuesta al anterior interrogante. Denotemos con r_1, r_2, r_3, r_4 los radios de los cuatro círculos, y sean $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ sus respectivas curvaturas (recordemos que la curvatura ϵ_i de un círculo de radio r_i es simplemente el recíproco del radio, así $\epsilon_i = \dfrac{1}{r_i}$).

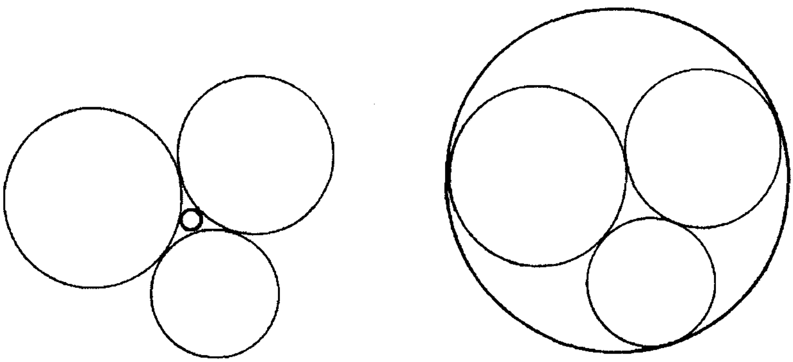

Figura 1. Un círculo tangente a otros tres.

La antedicha relación es

$$2\left(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2\right) = \left(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4\right)^2$$

En 1936, Sir Frederick Soddy, que en 1921 había recibido el premio Nobel por el descubrimiento de los elementos isótopos, redescubrió este teorema, y se sintió movido a expresarlo en verso. Escribió un poema titulado "El beso preciso", cuya primera estrofa dice:

Pueden besarse los labios dos a dos
sin mucho calcular, sin trigonometría;
mas ¡ay! no sucede igual en la Geometría,
pues si cuatro círculos tangentes quieren ser

y besar cada uno a los otros tres,
para lograrlo habrán de estar
los tres dentro de uno, o alguno
por otros tres a coro rodeado.
De estar uno entre tres, el caso es evidente
pues tres veces son todos besados desde afuera.
Y el caso tres en uno no es quimera,
al estar este uno por tres veces besado internamente.

En la siguiente estrofa de su poema, Soddy da la hermosa fórmula que relaciona las curvaturas. En la tercera y última estrofa, generaliza la fórmula a cinco esferas mutuamente osculatrices en el espacio. Posteriormente otros matemáticos y aficionados observaron que la fórmula podía generalizarse a espacios n-dimensionales ($n \geq 3$). En un concurso lanzado por una revista se solicitó a los lectores redactar una cuarta estrofa para consignar esta generalización. Una de ella es como sigue:

No debemos empero confinar nuestro cuidado
a los simples círculos, esferas y planos,
sino elevarnos a n-espacios e hipercurvaturas
donde también las múltiples tangencias son seguras
En n-espacios, los pares de tangentes son hiperesferas,
y es verdad -mas no evidente-
cuando $n+2$ de tales son tangentes
cada una con $n+1$ compañeras
que el cuadrado de la suma de todas las curvaturas
en n veces la suma de los cuadrados.

2 Cuadriculando el Cuadrado

En 1936, cuatro estudiantes del Trinity College de Cambridge se plantearon el problema de dividir un rectángulo en cuadrados todos desiguales. Por entonces se sabía que un rectángulo de 32×33 podía ser dividido en nueve cuadrados desiguales, como muestra la figura 2.

Se avanzó algo en el estudio de este tipo de disecciones empleando una herramienta que aparentemente no tenía nada en común con este problema: la teoría de circuitos eléctricos. Pese a todo, la intensiva búsqueda de la cuadriculación perfecta del cuadrado sólo les llevaba a cuadricular rectángulos. Surgió la fuerte sospecha de que el problema era imposible de resolver. Uno de los estudiantes se hallaba particularmente interesado en probar tal imposibilidad, sin embargo no tuvo éxito en sus intentos. Por fin en 1939 Roland Sprague, un matemático alemán, encontró una solución. ¡Después de todo sí era posible partir el cuadrado en cuadrados distintos!. En años posteriores se encontraron varias otras soluciones más. De hecho, se hallaron tantas que los expertos en la materia sospechan que son más difíciles de cuadricular los rectángulos.

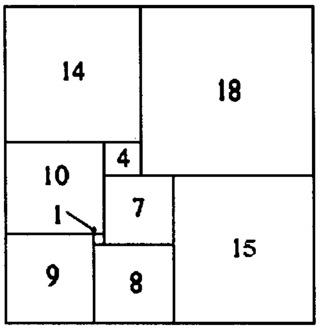

Figura 2. Un rectángulo dividido en cuadrados desiguales

Se encontró una solución con sólo 24 cuadrados, ver figura 3(a). Durante largo tiempo se creyó que esta solución tenía la menor cantidad posible de cuadrados. Sin embargo en 1978 A.J.W. Duijvestijn encontró la solución mostrada en la figura 3(b) con sólo 21 cuadrados. Se logró probar también que no puede existir una solución con 20 o menos cuadrados; por lo tanto 21 es el mínimo.

3 El Teorema de Pick

Tomemos en el plano un sistema coordenado cartesiano y en él consideremos la retícula formada por todos los puntos de coordenadas enteras. Conectando pares de puntos de tal retícula podemos trazar una infinita variedad de polígonos simples, ver figura 4 ("simple"significa aquí que sus lados no se cruzan). El área de algunos de estos polígonos como A, B, C puede calcularse con facilidad; pero ¿cómo calcular el área de polígonos como el D, E, F? Desde luego, podemos hacerlo mediante el engorroso procedimiento de subdividirlas en figuras más simples; sin embargo existe un medio simple y sorprendente para calcular el área de cualquier polígono simple reticular. Se aplica para ello el hermoso teorema siguiente, cuyo descubrimiento se atribuye a un tal G. Pick en 1899:

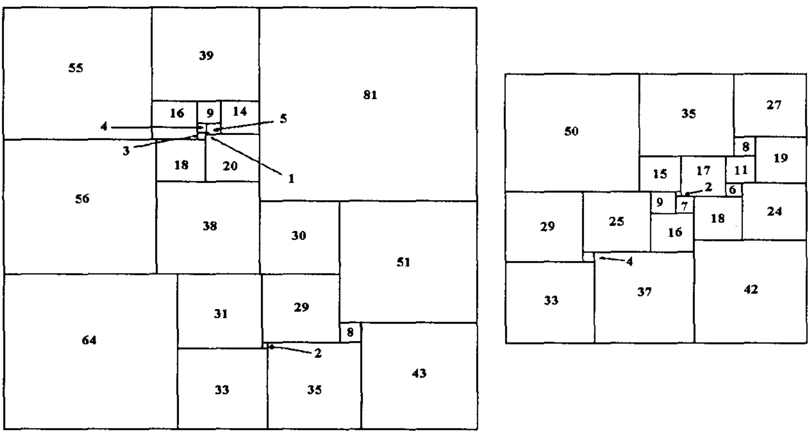

Figura 3. Cuadriculaciones perfectas en 24 y 21 cuadrados, respectivamente.

El área de un polígono simple cualquiera P, cuyo vértices son puntos del retículo cuadriculado, es dada por:

$$A(P) = \frac{1}{2}v_b + v_i - 1$$

donde v_b es el número de puntos sobre el borde del polígono y v_i es el número de puntos en su interior.

No damos aquí la prueba de este teorema que, sin ser dificultosa, ocuparía bastante espacio. Instamos al lector a desarrollarla por sí mismo.

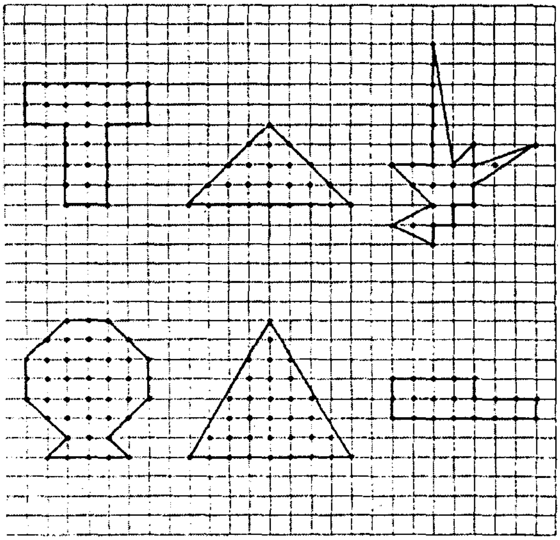

Figura 4. Algunos polígonos reticulares

Uno se siente tentado a suponer que sería fácil generalizar la fórmula de Pick a poliedros trazados sobre retículas enteras tridimensionales. La figura 5 desvanece rápidamente esta ilusión. Mustra la célula unidad con uno de sus vértices apoyado sobre el origen de un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional. Los cuatro puntos $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ y $(1,1,1)$ marcan los vértices de un tetraedro reticular. Si levantamos el vértice de esta pirámide hasta el punto $(1,1,2)$ aumentamos el volumen del tetraedro, pero sin que aparezca ningún nuevo punto de la retícula en sus aristas, en sus caras o en su interior. En realidad levantando este vértice más aún a lo largo del mismo eje, podemos hacer el volumen tan grande como queramos sin aumentar el número de puntos en la retícula. Asi pues, si hubiera una fórmula similar a la de Pick, para poliedros en el retículo tridimensional, daría para todos estos tetraedros el mismo volumen, lo cual es absurdo.

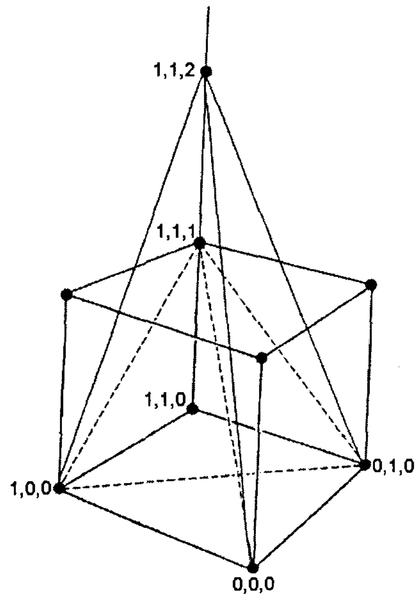

Figura 5. Tetraedros reticulares

4 Las Esferas de Dandelin

En 1822 el matemático belga Germinal Dandelin (1794-1847) descubrió una brillante conexión entre las definiciones clásica y moderna de la elipse. Los griegos concebían la elipse como la curva resultante de seccionar un cono por un plano oblicuo. Sin embargo desde los tiempos de Descartes ha sido costumbre describir la elipse analíticamente, con ayuda de dos puntos fijos F_1, F_2 llamados focos. La elipse es entonces el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es constante, es decir: $PF_1 + PF_2 = k$ siendo k un valor constante.

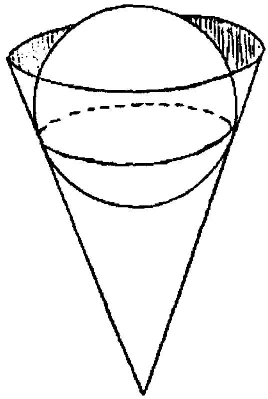

Figura 6. Esfera dentro de un cono

¿La curva obtenida al cortar el cono con un plano oblicuo, es realmente una elipse, según la definición moderna? La idea de Dandelin para probar que la respuesta es afirmativa es una de las más preciosas gemas de la geometría. Veamos cómo procede.

Claramente una esfera que se introduce ajustadamente en un cono, hace contacto con la superficie de éste, a lo largo de toda una circunferencia, ver figura 6. Sea π el plano que intercepta al cono circular recto con vértice en O. Llamemos C a la curva de intersección, ver figura 7. Introducimos ahora dentro del cono dos esferas S_1 y S_2, una a cada lado de π las cuales tocan el cono a lo largo de los círculos K_1, K_2, respectivamente. Denotemos ademas con F_1 el punto de contacto de S_1 con el plano π, y con F_2, el punto de contacto de la esfera S_2 con π. (Podemos imaginar pequeños globos esféricos dentro del cono, uno a cada lado del plano π, los cuales se inflan de aire progresivamente hasta que hacen contacto con el cono y el plano). Sea P cualquier punto en la curva C.

Tracemos la recta que une P con el vértice O del cono. Esta recta se encuentra por completo en la superficie del cono y se intersecta con los círculos en los puntos Q_1 y Q_2 respectivamente. Ahora PF_1 y PQ_1 son dos tangentes desde P a S_1, de manera que

$$PF_1 = PQ_1$$

Similarmente

$$PF_2 = PQ_2$$

Sumando estas dos ecuaciones obtenemos:

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2$$

Pero $PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$ es justo la distancia sobre la superficie del cono entre los círculos paralelos K_1 y K_2 y es, por lo tanto, una cantidad constante. Así pues:

$$PF_1 + PF_2 = \text{constante}$$

para cualquier punto P de C, lo cual nos dice que, efectivamente, C es una elipse cuyos focos son F_1 y F_2.

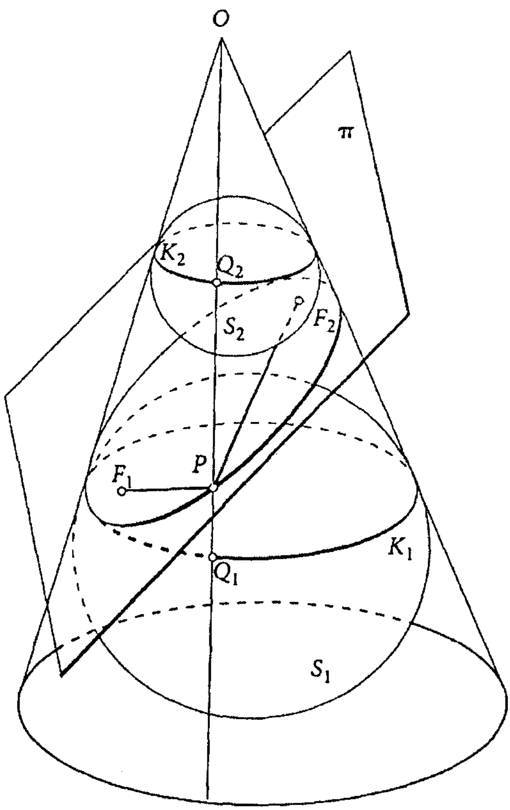

Figura 7. Las esferas de Dandelin

5 División en Áreas Iguales

Un conocido teorema del cálculo establece:

> "Si una función de una variable real es continua en un intervalo cerrado de extremos A y B, entonces tal función toma en ese intervalo un valor máximo y un valor mínimo, así como todos los valores reales intermedios".

Este teorema parece trivial de puro evidente, a pesar de lo cual, a la hora de demostrar teoremas no triviales, su potencia es fantástica. Consideremos el siguiente problema: ¿Será posible dividir, mediante una línea recta, cualquier forma plana en dos mitades de igual área?. La respuesta es sí, y aún más, tal línea puede ser paralela a cualquier recta fija y exterior a la figura.

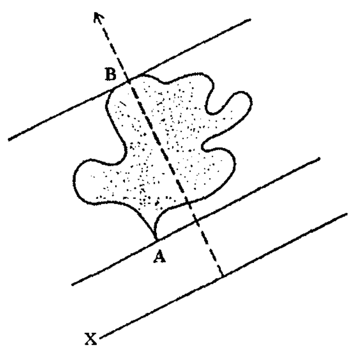

Figura 8. Una recta para dividir una región en dos mitades de igual área

Observemos la región sombreada de la figura 8. En su exterior tenemos una recta arbitraria x. Deseamos probar que puede trazarse una línea paralela a x que divida a la silueta en dos regiones de áreas exactamente iguales. Imaginemos una recta desplazándose lentamente, siempre paralela a x, y perpendicular a la línea de trazos. La recta móvil toca a la región en A, y la abandona en B. Conforme la recta avanza el área de la región barrida es función continua de la distancia recorrida desde el punto A. El área situada del lado de A, es nula en A y máxima en B. De acuerdo con nuestro teorema, en algún lugar intermedio el área es exactamente la mitad de la máxima. En esa posición, la recta biseca en dos la región dada.

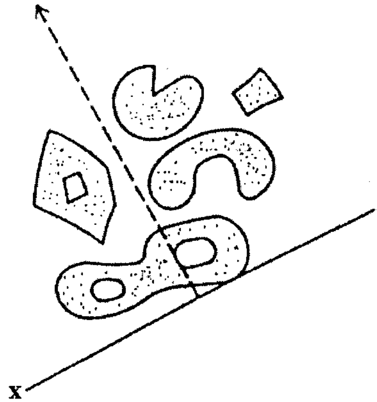

Figura 9. La región a dividir puede ser arbitrariamente complicada

La demostración es tan general que subsiste no solo para figuras conexas cualesquiera, incluso con agujeros; sino que también es válida para figuras inconexas. Una rápida reflexión debería bastar para convencernos -por ejemplo en relación a las regiones de la figura 9- que siempre se puede trazar una recta, paralela a otra dada, a través de cualquier número finito de regiones de forma tal que el área total situada a un lado de la recta sea igual al área situada al otro lado.

Supongamos dadas dos regiones de formas arbitrarias en el plano, como las que vemos en la figura 10. ¿Es siempre posible trazar una recta que divida simultáneamente a ambas regiones en sendas partes de áreas iguales? Podemos demostrar que sí. Primero se divide la región blanca con una línea recta que no intercepte a la región gris. Giremos esta recta, de modo que siempre se tenga una bisección de la región blanca. Sabemos que es posible por el teorema precedente. Como muestra la ilustración, la línea giratoria tocará en A a la región gris, y la abandonará en B. Conforme la recta va barriendo la figura, desde A hasta B, el área situada del lado de A crece continuamente desde cero hasta el máximo.

Asi pues, habrá una posición intermedia en la que el área del lado de A sea mitad del área total.

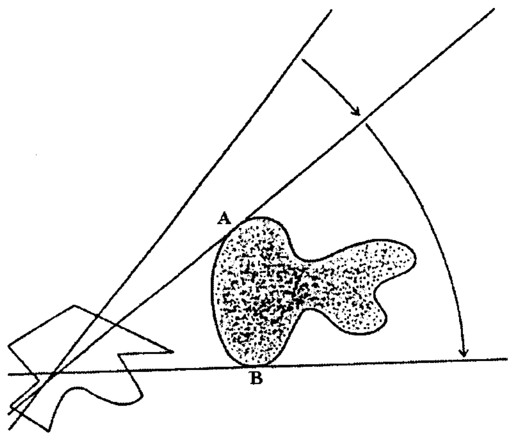

Figura 10. Demostración en el plano del teorema del bocadillo

Acabamos de demostrar para el plano un famoso teorema que puede generalizarse a todos los espacios de dimensión superior. En el espacio tridimensional, pueden bisecarse por medio de un plano los volúmenes de tres cuerpos cualesquiera; en el espacio de cuatro dimensiones, los hipervolúmenes de cuatro figuras cuatridimensionales cualesquiera pueden bisecarse mediante un hiperplano de dimensión 3. Para espacios tridimensionales el teorema se denomina a veces "teorema del bocadillo", por ser aplicable a un bocadillo generalizado formado por dos rebanadas de pan y una de jamón, no importa cuales sean las formas de estas piezas ni su posición en el espacio: siempre hay un plano que simultáneamente divide en dos partes iguales a cada una de las tres.

La generalización a espacios n-dimensionales exige matemática de alta potencia, pero, en dimensiones dos y tres, las demostraciones son consecuencias sencillas de nuestro teorema fundamental.

Otro hermoso teorema, tampoco evidente, enuncia que cualquier región -que, como antes, no tiene por qué ser simplemente conexa, y ni siquiera conexa- puede siempre descomponerse en cuatro partes de igual área mediante dos rectas perpendiculares. La demostración que se ajusta a las ideas anteriores es tan sutil como maravillosa.

Imaginemos que se tiene una hoja de papel celofán, mayor que la región. Se divide la hoja en cuatro cuadrantes mediante dos rectas perpendiculares X e Y. El cuadrante superior izquierdo es gris oscuro, y el superior derecho, de tonalidad gris clara. Se sitúa la hoja sobre la región, con una línea horizontal por debajo de la región y la vertical a la derecha de la misma. Se hace deslizar la hoja hacia arriba hasta que la horizontal X divida en dos partes de igual área a la región; una vez conseguido esto, se la hace deslizar hacia la izquierda (la recta X desliza sobre sí misma) hasta que también Y divide en dos partes de igual área a la región. Se marcan las regiones (en la hoja que contiene la curva) con A, B, C, y D. La disposición resultante puede verse en la parte superior de la figura 11.

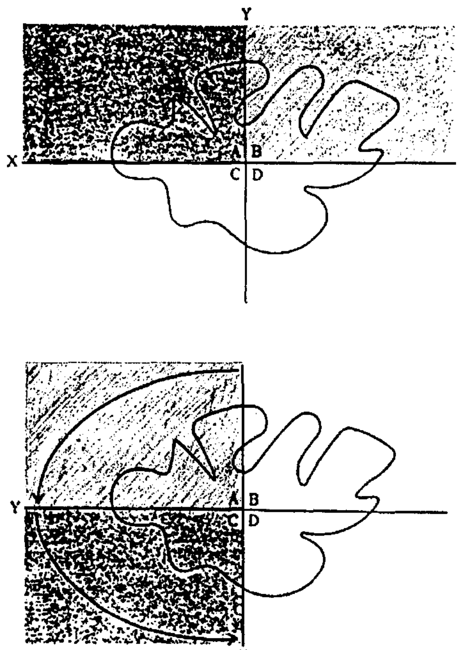

Figura 11. Descomposición de una región arbitraria mediante dos rectas perpendiculares

Por construcción, $A+B=C+D$, y $A+C=B+D$. Restándole la segunda igualdad a la primera, resulta $B-C=C-B$, o sea $2B=2C$.

Por consiguiente, $B = C$ y $A = D$. Si $A = B$, el problema ha quedado resuelto. Supongamos que no es así, y que la región B sea mayor que la A. Por tanto el área de la parte gris de la región restada de la parte coloreada da diferencia positiva, es decir $B - A > O$.

Giremos la hoja transparente 90 grados en sentido contrario al de las agujas del reloj, preservando siempre la doble bisección de la región por medio de X e Y. Su punto de intersección podrá ir de acá para allá, pero al completarse el giro, las dos rectas ocuparán necesariamente la posición primitiva, como se muestra en la parte inferior de la ilustración, con la única diferencia de que ahora se han intercambiado los papeles de X e Y.

Calculamos la diferencia de áreas de las regiones gris oscuro y gris claro, al inicio y al final del giro.

Al inicio del giro:

$$a(\text{gris claro}) - a(\text{gris oscuro}) = B - A > O$$

Al final del giro:

$$a(\text{gris claro}) - a(\text{gris oscuro}) = A - C = A - B < O$$

esto último, ya que $B = C, B > A$.

Es fácil comprender como se aplica ahora el teorema fundamental. El valor obtenido al restar el área de la región gris oscura del área de la región gris clara es función continua del ángulo girado al variar éste desde 0 hasta 90 grados. Puesto que el valor de la diferencia pasa de ser positivo a ser negativo, ha de existir un ángulo intermedio en el que la diferencia sea nula, y las áreas, iguales. En esa posición intermedia, las rectas perpendiculares dividen exactamente en cuatro partes de igual área a la región.

Este teorema se generaliza también a espacios de dimensión superior. Cualquier cuerpo sólido puede dividirse en ocho partes iguales mediante tres planos mutuamente perpendiculares. En general, cualquier sólido n-dimensional puede cortarse en 2^n partes de igual "volumen" mediante n "planos", mutuamente perpendiculares.

Referencias

[1] ASIMOV, ISAAC. (1998). *La Mente Errabunda.* Ed. Alianza.

[2] GARDNER, MARTIN (1993). *Comunicación Extraterrestre.* Ed. Catedra.

[3] GARDNER, MARTIN (1994). *Mosaicos de penrose y escotillas cifradas.* Ed. Labor.

[4] HONSBERGER, H. (1994). *El Ingenio en las matemáticas.* Ed. Teorema.

[5] H.S.M. COXETER. (1975). *Fundamentos de Geometría.* Ed. Limusa.

[6] R. COURANT-H. ROBBINS (2001). *¿Qué son las Matemáticas?.* Fondo de Cultura Económica.

Marcelo Machicao Rossi
Carrera de Matemáticas.
Universidad Mayor de San Andrés, Bolivia.