Pro Mathematica Vol. XVIII, Nos. 35-36, 2004

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL ASOCIADO CON LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES II

Aldo Mendoza Uribe** y **Juan Montealegre Scott

Resumen

El propósito es probar que la única solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries depende continuamente del dato inicial $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ *para* $s > \frac{3}{2}$. *La prueba estará basada en los estimados de Bona-Smith. La ecuación estudiada en este trabajo es utilizada en la descripción aproximada de la propagación unidireccional de ondas de gran longitud en ciertos sistemas dispersivos no lineales y es similarmente útil como un modelo para ondas de gran longitud en muchos otros sistemas físicos.*

Dpto. de Matemáticas, UNALM, Dpto. de Ciencias, PUCP.

Una pregunta importante que se debe responder en el estudio del problema de valor inicial no-lineal (KdV), está relacionada con la *dependencia continua de la solución en el dato inicial*; que consiste en estudiar y establecer, si es posible, la continuidad de la aplicación $\Psi : \varphi \longmapsto u$ con las topologías apropiadas. La razón de su importancia viene del hecho que el problema de valor inicial que estudiamos proviene de problemas físicos y los datos iniciales son cantidades medidas en laboratorios y por lo tanto están sujetos a errores experimentales. Desde este punto de vista la pregunta de la dependencia en el dato inicial consiste en mostrar que si los errores de medida son pequeños entonces la solución varía poco.

La idea central de la prueba es debida a J. Bona y R. Smith. Queremos destacar que la idea que presentaremos es aplicable a una gran clase de problemas no lineales.

Sean $u = u(t)$ y $u^n = u^n(t)$, $n \in \mathbf{N}$, soluciones de (KdV_μ), con valor inicial φ y φ^n, respectivamente y $\varphi^n \to \varphi$ cuando $n \to \infty$ en $H^s(\mathbf{R})$. Construimos, φ_ε e $\varphi_\varepsilon^n \in H^\infty(\mathbf{R})$ tales que $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, $\varphi_\varepsilon^n \to \varphi^n$ cuando $\varepsilon \to 0^+$en $H^s(\mathbf{R})$, donde el segundo límite es uniforme en $n \in \mathbf{N}$. Consideramos $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$ y $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon^n(t)$ las soluciones de (KdV_μ), con dato inicial φ_ε y φ_ε^n, respectivamente y mostramos que $u_\varepsilon^n(t) \to u^n(t)$ cuando $\varepsilon \to 0^+$ en $H^s(\mathbf{R})$ y que la solución aproximada $u_\varepsilon(t)$ depende continuamente de φ_ε en $H^s(\mathbf{R})$. Debido a la convergencia uniforme en n de $\varphi_\varepsilon^n \to \varphi^n$ se seguirá entonces que $u^n(t) \to u(t)$ cuando $n \to \infty$ en $H^s(\mathbf{R})$ y por tanto la dependencia continua.

Para construir las funciones φ_ε con las propiedades requeridas se utiliza la siguiente proposición.

Proposición 1 (Aproximaciones de Bona-Smith). *Sea* $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ *tal que* $\mathrm{Im}(\eta) \subset [0,1]$ *y* $\mathrm{sop}(\eta) \subset [-1,1]$. *Si para cada* $x \in \mathbf{R}$, $\psi(x) = 1 - \eta(x)$, *entonces* $\psi^{(k)}(0) = 0$ *para todo* $k \in \mathbf{N}$.

Para $\varepsilon > 0$ *y* $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$, $s > 0$, *definimos*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \left(\eta(\varepsilon\xi)\,\widehat{\varphi}\right)^{\vee}(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

entonces $\varphi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbf{R})$, *y para cada* $\varepsilon \in\ ]0,1]$ *y cada* $r \geq 0$, *existe* $C = C(s,r,\eta) > 0$ *tal que*

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{s+r} \leq C\varepsilon^{-r}\|\varphi\|_s \tag{2}$$

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{s-r} \leq C\varepsilon^r \|\varphi\|_s \tag{3}$$

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi \textit{ cuando } \varepsilon \to 0^+ \textit{ en } H^s(\mathbf{R}).$$

Además, si $\varphi^n \to \varphi$ *cuando* $n \to \infty$ *en* $H^s(\mathbf{R})$ *entonces*

$$\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n\|_s \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$, *uniformemente en* n.

Prueba. Usando (1) y considerando $\lambda = \varepsilon\xi$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon\|_{s+r}^2 &\leq \sup_{\xi\in\mathbf{R}}\left[\left(1+\xi^2\right)^r |\eta(\varepsilon\xi)|^2\right] \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C\varepsilon^{-2r}\|\varphi\|_s^2.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{s-r}^2 &\leq \varepsilon^{2r} \sup_{\lambda\in\mathbf{R}}\left[\left(\varepsilon^2+\lambda^2\right)^{-r} |\psi(\lambda)|^2\right] \|\varphi\|_s^2 \\
&\leq C\varepsilon^{2r}\|\varphi\|_s^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$ entonces

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_s = \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\psi(\varepsilon\xi)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Dado que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \psi(\varepsilon\xi) = \psi(0) = 0$, el integrando tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0^+$. Además, el integrando es acotado por la función integrable

$$\left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

de aquí aplicando el teorema de la convergencia de Lebesgue, podemos concluir que

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_s \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+.$$

Finalmente mostraremos que si $\varphi^n \to \varphi$ cuando $n \to \infty$ en $H^s(\mathbf{R})$ entonces $\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n\|_s \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$uniformemente para $n \in \mathbf{N}$.

En efecto, dado $\gamma > 0$, $\exists\, N > 0$ tal que $\forall n > N : \|\varphi^n - \varphi\|_s < \frac{\gamma}{3}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon^n - \varphi_\varepsilon\|_s^2 &\leq \int_{\mathbf{R}} (1+\xi^2)^s \left|\left(\widehat{\varphi^n} - \widehat{\varphi}\right)(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \|\varphi^n - \varphi\|_s^2 . \end{aligned}$$

Seleccionamos ε_0 pequeño tal que $\left\|\varphi_\varepsilon^k - \varphi^k\right\|_s < \frac{\gamma}{3}$ para $1 \leq k \leq N$ y $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_s \leq \frac{\gamma}{3}$, para $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Entonces

$$\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n\|_s \leq \|\varphi_\varepsilon^n - \varphi_\varepsilon\|_s + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_s + \|\varphi - \varphi^n\|_s \leq \gamma. \qquad \square$$

Observemos que para $0 < \varepsilon \leq 1$, sea $\varphi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbf{R})$ dada por la proposición 1 y $u_\varepsilon \in C([0, T_\varepsilon]; H^\infty(\mathbf{R}))$ la solución de (KdV_μ) con dato inicial φ_ε. Por el teorema 4.2 de [4] se sigue que

$$\|u_\varepsilon(t)\|_s \leq \rho_\varepsilon(t), \quad 0 \leq t \leq T_\varepsilon, \tag{4}$$

donde $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(t)$ es la solución de (15) en [4] con dato inicial $\|\varphi_\varepsilon(t)\|_s^2$.

Como $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ cuando $\varepsilon \to 0^+$ en $H^s(\mathbf{R})$, se sigue de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias que para $T' \in]0, T_s[$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ entonces $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(t)$ puede ser extendida a $\left[0, T'\right]$ y converge uniformemente para $\rho = \rho(t)$ en $\left[0, T'\right]$. Luego para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$|\rho_\varepsilon(t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq T'} |\rho(t)| = C\left(s, T', \|\varphi\|_s\right), \quad 0 \leq t \leq T' \tag{5}$$

Por tanto de (4) y (5), podemos extender $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$ a $\left[0, T'\right]$ satisfaciendo (4) en $\left[0, T'\right]$.

Lema 2. *Si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ entonces existe $C = C\left(s, T', \|\varphi\|_s\right)$ tal que*

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{s+1} \leq C \|\varphi_\varepsilon\|_{s+1}, \quad 0 \leq t \leq T', \tag{6}$$

donde u_ε es la solución de la (KdV_μ) con dato inicial φ_ε.

Prueba. Tenemos

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2 \\
&\quad = -2\left\langle u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\,\partial_x u_\varepsilon(t)\right\rangle_{s+1} - 2\mu \left\|\partial_x u_\varepsilon\right\|_{s+1}^2 \\
&\quad \leq 2C\Big\{\left\|\partial_x u_\varepsilon(t)\right\|_{s-1}\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2 \\
&\qquad\qquad + \left\|\partial_x u_\varepsilon(t)\right\|_s \left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_s\Big\} \\
&\quad \leq 2C\Big\{\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_s \left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2 \\
&\qquad\qquad + \left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_s\Big\} \\
&\quad \leq C\left(s, T', \left\|\varphi\right\|_s\right)\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2,
\end{aligned}
$$

donde usamos (4) y (5).

En consecuencia

$$\partial_t \left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2 \leq C\left(s, T', \left\|\varphi\right\|_s\right)\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2$$

integrando de 0 a t obtenemos

$$\int_0^t \partial_r \left\|u_\varepsilon(r)\right\|_{s+1}^2 dr \leq \int_0^t C\left\|u_\varepsilon(r)\right\|_{s+1}^2 dr$$

equivalentemente

$$\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2 \leq \left\|u_\varepsilon(0)\right\|_{s+1}^2 + \int_0^t C\left\|u_\varepsilon(r)\right\|_{s+1}^2 dr,$$

usando la desigualdad de Gronwall, se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1}^2 &\leq \left\|u_\varepsilon(0)\right\|_{s+1}^2 e^{\int_0^t C\,dr} = \left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{s+1}^2 e^{C.t} \\
&\leq \left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{s+1}^2 e^{C.T'} \leq C\left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{s+1}^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1} \leq C\left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{s+1}$$

Usando (2) de la proposición 1 con $r = 1$ en la última expresión, se tiene

$$\left\|u_\varepsilon(t)\right\|_{s+1} \leq C\left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{s+1} \leq C'\varepsilon^{-1}\left\|\varphi\right\|_{s+1} \leq C'\varepsilon^{-1}. \qquad \square$$

Lema 3. *Si* $0 < \delta < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$, *entonces existe una constante* $C = C(s, T', \|\varphi\|_s)$ *tal que*

$$\|w(t)\|_0 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|_0 \leq C\varepsilon^s \tag{7}$$

donde $w = u_\varepsilon - u_\delta$ *y* $u_\varepsilon \equiv u_\varepsilon(t)$, $u_\delta \equiv u_\delta(t)$ *son soluciones de la* (KdV_μ) *con datos iniciales* φ_ε *y* φ_δ *respectivamente.*

Prueba. Como u_ε y u_δ son soluciones de (KdV$_\mu$), entonces u_ε y u_δ satisfacen respectivamente

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \partial_x^3 u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon - \mu \partial_x^2 u_\varepsilon = 0 \\ u_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta + \partial_x^3 u_\delta + u_\delta \partial_x u_\delta - \mu \partial_x^2 u_\delta = 0 \\ u_\delta(0) = \varphi_\delta \end{cases}.$$

Restando y de $w = u_\varepsilon - u_\delta$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t(u_\varepsilon - u_\delta) + \partial_x^3(u_\varepsilon - u_\delta) + u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon \\ -u_\delta \partial_x u_\delta - \mu \partial_x^2(u_\varepsilon - u_\delta) = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\partial_t w + \partial_x^3 w - w\partial_x w + \partial_x(u_\varepsilon w) - \mu \partial_x^2 w = 0,$$

pues

$$\begin{aligned} -w\partial_x w + \partial_x(u_\varepsilon w) &= -w\partial_x w + w\partial_x u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x w \\ &= u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon - u_\delta \partial_x u_\delta. \end{aligned}$$

También $w(0) = \varphi_\varepsilon - \varphi_\delta$, por tanto

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x^3 w - w\partial_x w + \partial_x(u_\varepsilon w) - \mu \partial_x^2 w = 0 \\ w(0) = \varphi_\varepsilon - \varphi_\delta \end{cases}.$$

Como $u_\varepsilon(t)$, $u_\delta(t) \in H^\infty(\mathbf{R})$, tenemos que $w(t) \in H^\infty(\mathbf{R})$, $0 \le t \le T'$ y

$$\begin{aligned}
\partial_t \|w(t)\|_0^2 &= 2\left\langle w, -\partial_x^3 w + w\partial_x w - \partial_x(u_\varepsilon w) + \mu\partial_x^2 w\right\rangle_0 \\
&= -2\left\langle w, \partial_x^3 w\right\rangle_0 + 2\langle w, w\partial_x w\rangle_0 \\
&\qquad -2\langle w, \partial_x(u_\varepsilon w)\rangle_0 + 2\mu\left\langle w, \partial_x^2 w\right\rangle_0 \\
&\le \|\partial_x u_\varepsilon\|_0 \left\|w^2\right\|_0 \le C_s\|u_\varepsilon\|_s\|w\|_0^2 \le C\|w(t)\|_0^2
\end{aligned}$$

donde usamos integración por partes para calcular $\langle w, w\partial_x w\rangle_0 = 0 = \left\langle w, \partial_x^3 w\right\rangle_0$, la inmersión de Sobolev, (4) y (5).

Luego, integrando de 0 a t obtenemos que

$$\int_0^t \partial_r \|w(r)\|_0^2 \, dr \le \int_0^t C\|w(r)\|_0^2 \, dr$$

es equivalente a

$$\|w(t)\|_0^2 \le \|w(0)\|_0^2 + \int_0^t C\|w(r)\|_0^2 \, dr$$

y usando la desigualdad de Gronwall, se tiene

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_0^2 &\le \|w(0)\|_0^2 e^{Ct} \\
&\le e^{CT'}\|\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta\|_0^2 \\
&= C_1\|(\varphi_\varepsilon - \varphi) - (\varphi_\delta - \varphi)\|_0^2 \\
&\le C\left\{\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{s-s}^2 + \|\varphi_\delta - \varphi\|_{s-s}^2\right\} \\
&\le C\left\{\varepsilon^{2s} + \delta^{2s}\right\}\|\varphi\|_s^2 \le C\varepsilon^{2s} \qquad (8)
\end{aligned}$$

donde usamos (3) con $s = r$, $\|\varphi\| = k$ y el hecho que $\delta \le \varepsilon$.

Luego

$$\|w(t)\|_0 \le \sup_{0\le t\le T} \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|_0 \le C\varepsilon^s. \qquad \square$$

Lema 4. *Si* $0 < \mu < s - \frac{3}{2}$ *y con las mismas hipótesis del lema 3, tenemos*

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{s+1}\|w(t)\|_\gamma\|w(t)\|_s \le C\left\{2\mu s\varepsilon^{-(1+\gamma)} + \|w\|_s^2\right\}, \qquad (9)$$

donde $\gamma(s) = \dfrac{\mu s}{\mu+1}$.

Prueba. De la interpolación de los espacios de Sobolev se tiene

$$\|w(t)\|_r \leq C_s \|w(t)\|_s^{r/s} \|w(t)\|_0^{1-r/s}, \; 0 \leq r \leq s \tag{10}$$

entonces de (6) y (10) tenemos que

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{s+1} \|w(t)\|_\gamma \|w(t)\|_s \leq C\varepsilon^{s-1-\gamma} \|w(t)\|_s^{1+\gamma/s} \tag{11}$$

donde en la penúltima desigualdad usamos (8).

Usando la desigualdad de Young en (11) se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon^{s-1-\gamma} \|w(t)\|_s^{1+\gamma/s} &\leq 2\mu s \varepsilon^{\left(1-\frac{1}{s-\gamma}\right)2s} + c\|w(t)\|_s^2 \\ &\leq 2\mu s \varepsilon^{-1-\gamma} + c\|w(t)\|_s^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $2s\left(1-\frac{1}{s-\gamma}\right) \geq -1-\gamma$. Luego reemplazando en (11) conseguimos la desigualdad (9). □

Lema 5. *Si* $\gamma \in \,]s-2, s-1[$ *y con las mismas hipótesis del lema 3, tenemos*

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{\gamma+2} \|w(t)\|_{s-1} \|w(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{2\mu s} + \|w(t)\|_s^2\right\}. \tag{12}$$

Prueba. En primer lugar por el lema 2 tenemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{\gamma+2} &\leq C(s, T', \|\phi\|_s) \|\varphi_\varepsilon\|_{\gamma+2} = C\|\varphi_\varepsilon\|_{s+(-s+\gamma+2)} \\ &\leq C\varepsilon^{s-2-\gamma} \|\varphi\|_s \leq C_1 \varepsilon^{s-2-\gamma}, \end{aligned}$$

donde usamos (2) con $r = \gamma + 2$.

Luego usando (10) con $r = s-1$ y (7) se tiene

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{\gamma+2} \|w(t)\|_{s-1} \|w(t)\|_s \leq C'\varepsilon^{(s-2-\gamma)+1} \|w(t)\|_s^{2-1/s}. \tag{13}$$

Usando la desigualdad de Young, con $p = \dfrac{2s}{2s-1}$ y $q = 2s$ en (13) tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(s-1-\gamma)} \|w\|_s^{2-1/s} &\leq \frac{\varepsilon^{(s-1-\gamma)2s}}{2s} + \frac{(2s-1)\|w\|_s^{\left(2-\frac{1}{s}\right)\frac{2s}{2s-1}}}{2s} \\
&\leq \frac{1}{2s}\left[\varepsilon^{2\mu s} + (2s-1)\|w(t)\|_s^2\right] \\
&\leq \frac{(2s-1)}{2s}\left[\varepsilon^{2\mu s} + \|w(t)\|_s^2\right] \\
&= C(s)\left[\varepsilon^{2\mu s} + \|w(t)\|_s^2\right],
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos

$$2s(s-1-\gamma) \geq 2\mu(s-1-\gamma) \geq 2\mu s.$$

Por lo tanto

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{\gamma+2}\|w(t)\|_{s-1}\|w(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{2\mu s} + \|w(t)\|_s^2\right\}. \qquad \square$$

Lema 6. *Si w es como en el lema 3, entonces*

$$\|w(t)\|_s^2 \leq \|w(t)\|_0^2 + \|I^s w(t)\|_0^2, \tag{14}$$

si $s > \frac{3}{2}$.

Prueba. Es claro que

$$\left(1+|\xi|^2\right)^s \leq C\left(1+\xi^{2s}\right),$$

luego multiplicando por $|w(\xi)|^2$ se tiene

$$\left(1+|\xi|^2\right)^s |w(\xi)|^2 \leq C\left(1+\xi^{2s}\right)|w(\xi)|^2$$

e integrando

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}}\left(1+|\xi|^2\right)^s|w(\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{\mathbf{R}} C\left(1+\xi^{2s}\right)|w(\xi)|^2 d\xi \\
&= C\int_{\mathbf{R}}|w(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad +C\int_{\mathbf{R}}|\xi|^{2s}|w(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}
$$

equivalentemente

$$
\|w(t)\|_s^2 \leq \|w(t)\|_0^2+\|I^s w(t)\|_0^2. \qquad \square
$$

Proposición 7. *Si* $0<\delta\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0<1$, *entonces existe una constante positiva* $C=C\left(s,T',\|\varphi\|_s\right)$ *tal que*

$$
\sup_{0\leq t\leq T'}\|u_\varepsilon-u_\delta\|_s\leq C\left\{\varepsilon^{\gamma(s)}+\|\varphi_\varepsilon-\varphi_\delta\|_s\right\},
$$

donde $\gamma(s)=\dfrac{\mu s}{\mu+1}$, $0\leq\mu<s-\dfrac{3}{2}$, u_ε *y* u_δ *son soluciones del problema* (KdV_μ) *con dato inicial* φ_ε *y* φ_δ *respectivamente, dado por la proposición 1.*

Prueba. Sea $I^s u=\left(|\cdot|\ \widehat{u}\right)^{\vee}$; I^s satisface

$$
\widehat{I^s u}(\xi)=|\xi|\,\widehat{u}(\xi)\quad\text{y}\quad \partial_x^k I^s u(\xi)=I^s\partial_x^k u(\xi)
$$

entonces para $0\leq t\leq T_s$ y $w\equiv w(t)$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\|I^s w(t)\|_0^2 &= 2\langle I^s w,\partial_t I^s w\rangle_0=2\langle I^s w,I^s\partial_t w\rangle_0 \\
&= -2\left\langle I^s w,I^s\partial_x^3 w\right\rangle_0+2\langle I^s w,I^s(w\partial_x w)\rangle_0 \\
&\quad -2\langle I^s w,I^s\partial_x(u_\varepsilon w)\rangle_0+2\mu\left\langle I^s w,I^s\partial_x^2 w\right\rangle_0 \\
&= -2\left\langle I^s w,\partial_x^3 I^s w\right\rangle_0+2\langle I^s w,I^s(w\partial_x w)\rangle_0 \\
&\quad -2\langle I^s w,I^s\partial_x(u_\varepsilon w)\rangle_0+2\mu\left\langle I^s w,\partial_x^2 I^s w\right\rangle_0 \\
&= 2\langle I^s w,I^s(w\partial_x w)\rangle_0-2\langle I^s w,I^s\partial_x(u_\varepsilon w)\rangle_0 \\
&\quad -2\mu\|\partial_x I^s w\|_0^2 \\
&\leq 2\left|\langle I^s w,I^s(w\partial_x w)\rangle_0\right|+2\left|\langle I^s w,I^s(w\partial_x u_\varepsilon)\rangle_0\right| \\
&\quad +2\left|\langle I^s w,I^s(u_\varepsilon\partial_x w)\rangle_0\right| \\
&= 2(A+B+C).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Ahora acotaremos cada uno de estos sumandos,

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\langle I^s w, I^s (w\partial_x w)\rangle_0\right| \\
&= \left|\langle I^s w, I^s (w\partial_x w) - wI^s\partial_x w + wI^s\partial_x w\rangle_0\right| \\
&\leq \left|\langle I^s w, [I^s, w]\,\partial_x w\rangle_0\right| + \frac{1}{2}\left|\langle \partial_x w I^s w, I^s w\rangle_0\right|
\end{aligned}
$$

donde usamos el conmutador $[a,b] = ab - ba$, desigualdad triangular e integración por partes. Entonces por la desigualdad de Cauchy- Schwartz e inmersión de Sobolev tenemos

$$
\begin{aligned}
A &\leq \|I^s w\|_0 \left\|[I^s, w]\,\partial_x w\right\|_0 + \frac{1}{2}\|\partial_x w I^s w\|_0 \|I^s w\|_0 \\
&\leq C_s \|I^s w\|_0 \left\{\|w\|_s \|\partial_x w\|_{s-1} + \|w\|_s \|\partial_x w\|_{s-1}\right\} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|\partial_x w I^s w\|_0 \|I^s w\|_0 \\
&\leq \|w\|_s \left(2C_s \|w\|_s^2 + \frac{1}{2}\|\partial_x w I^s w\|_0\right) \\
&\leq \|w\|_s \left(2C_s \|w\|_s^2 + C\|w\|_s\right) \leq C\|w(t)\|_s^2, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$B \leq C\|w(t)\|_s^2 \qquad (17)$$

y

$$C \leq K\left\{\|u_\varepsilon\|_{s+1}\|w\|_\gamma\|w\|_s + \|u_\varepsilon\|_{\gamma+2}\|w\|_{s-1}\|w\|_s + \|w\|_s^2\right\}. \qquad (18)$$

Volviendo a (15) se tiene por (16), (17) y (18)

$$
\begin{aligned}
\partial_t \|I^s w(t)\|_0^2 &\leq C\Big(\|w\|_s^2 + \|u_\varepsilon\|_{s+1}\|w\|_\gamma\|w\|_s \\
&\qquad + \|u_\varepsilon\|_{\gamma+2}\|w\|_{s-1}\|w\|_s + \|w\|_s^2\Big)
\end{aligned}
$$

y del lema 4 se tiene

$$
\begin{aligned}
\partial_t \|I^s w(t)\|_0^2 &\leq C\|w(t)\|_s^2 + C\left(2\mu s\varepsilon^{-1-\gamma} + \|w(t)\|_s^2\right) \\
&\qquad + C\left(\varepsilon^{2\mu s} + \|w(t)\|_s^2\right) \\
&\leq C\left\{\varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} + \|w(t)\|_s^2\right\}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Luego integrando (19) de 0 a t, se tiene

$$\int_0^t \partial_r \|I^s w(r)\|_0^2 \, dr \leq \int_0^t C \left\{ \varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} + \|w(r)\|_s^2 \, dr \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \|I^s w(t)\|_0^2 &\leq \|I^s w(0)\|_0^2 + C \int_0^t \left\{ \varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} + \|w(r)\|_s^2 \right\} dr \\ &\leq \|I^s w(0)\|_0^2 + C' \varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} + C \int_0^t \|w(r)\|_s^2 \, dr. \end{aligned} \tag{20}$$

Por otro lado, de (14) se tiene

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_s^2 &\leq \|w(t)\|_0^2 + \|I^s w(t)\|_0^2 \\ &\leq C\varepsilon^{2s} + \|I^s w(0)\|_0^2 + C' \varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} + C \int_0^t \|w(r)\|_s^2 \, dr \\ &\leq C\varepsilon^{2s} + \|w(0)\|_s^2 + C' \varepsilon^{2\gamma(s)} + C \int_0^t \|w(r)\|_s^2 \, dr \\ &\leq \left(C\varepsilon^{2s} + \|w(0)\|_s^2 + C' \varepsilon^{2\gamma(s)} \right) e^{C \int_0^t dr} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{2\gamma(s)} + \|w(0)\|_s^2 \right) e^{T'} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{2\gamma(s)} + \|\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta\|_s^2 \right). \end{aligned}$$

donde usamos principalmente (8), (20) y la desigualdad de Gronwall.

Luego

$$\|w(t)\|_s \leq \sup_{0 \leq t \leq T'} \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|_s \leq C \left(\varepsilon^{\gamma(s)} + \|\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta\|_s \right),$$

quedando demostrado la proposición. □

No es difícil mostrar la siguiente proposición.

Proposición 8. *$u_\varepsilon(t) \to v(t)$ en $H^s(\mathbf{R})$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, uniformemente en $t \in [0, T']$ y que $v(t) = u(t)$ es solución de (KdV_μ).*

Ahora trataremos la dependencia continua propiamente dicha.

Lema 9. *Si* $w = u_\varepsilon^n - u_\varepsilon$*, donde* $u_\varepsilon^n \equiv u_\varepsilon^n(t)$ *y* $u_\varepsilon \equiv u_\varepsilon(t)$ *son soluciones de la* (KdV_μ) *con valor inicial* φ_ε^n *y* φ_ε *respectivamente, se tiene*

$$\|I^s w(t)\|_0^2 \leq \|w(0)\|_s^2 + CT'\varepsilon^{2\gamma(s)} + C\int_0^t \|w(r)\|_s^2\, dr,\ s > \tfrac{3}{2} \tag{21}$$

Prueba. De los mismos argumentos usados desde (15) hasta (19) se tiene

$$\partial_t \|I^s w(t)\|_0^2 \leq C\left\{\varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} + \|w(t)\|_s^2\right\},$$

luego integrando de 0 a t se sigue

$$\|I^s w(t)\|_0^2 \leq \|I^s w(0)\|_0^2 + C\int_0^t \varepsilon^{\frac{2\mu s}{1+\mu}} dr + C\int_0^t \|w(r)\|_s^2\, dr$$

de donde obtenemos la desigualdad (21) □

Proposición 10. *Si* $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$*,* $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon^n(t)$ *son soluciones de* (KdV_μ) *con valor inicial* φ_ε*,* φ_ε^n *respectivamente, donde* $\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon^n$ *son las aproximaciones de Bona-Smith asociadas a* φ *y* φ^n*, respectivamente, entonces* $u_\varepsilon^n \to u_\varepsilon$ *en* $H^s(\mathbf{R})$ *uniformemente cuando* $n \to \infty$ *y* $\varepsilon \to 0^+$*.*

Prueba. Del teorema 4.2 en [4], se sigue que $u_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon^n(t)$ pueden ser extendidas a $[0, T']$ si $n \geq N_0$ y $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$; también u_ε y u_ε^n satisfacen

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \partial_x^3 u_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon - \mu\partial_x^2 u_\varepsilon = 0 \\ u_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^n + \partial_x^3 u_\varepsilon^n + u_\varepsilon^n \partial_x u_\varepsilon^n - \mu\partial_x^2 u_\varepsilon^n = 0 \\ u_\varepsilon^n(0) = \varphi_\varepsilon^n \end{cases}$$

respectivamente.

Definamos $w = u_\varepsilon^n - u_\varepsilon$, entonces w satisface

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x^3 w - w\partial_x w + \partial_x(u_\varepsilon^n w) - \mu\partial_x^2 w = 0 \\ w(0) = \varphi_\varepsilon^n - \varphi_\varepsilon \end{cases}$$

asimismo, para $0 < t \leq T'$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t \|w(t)\|_0^2 &= 2\langle w, \partial_t w\rangle_0 \\
&= -2\left\langle w, \partial_x^3 w\right\rangle_0 + 2\langle w, w\partial w\rangle_0 \\
&\quad -2\langle w, \partial_x (u_\varepsilon^n w)\rangle_0 + 2\mu\left\langle w, \partial_x^2 w\right\rangle_0 \\
&= -2\langle w, \partial_x (u_\varepsilon^n w)\rangle_0 - 2\mu \|\partial_x w\|_0^2 \\
&\leq -2\langle w, \partial_x (u_\varepsilon^n w)\rangle_0 \\
&= -\left\langle w^2, \partial_x u_\varepsilon^n\right\rangle_0 \leq \left|\left\langle w^2, \partial_x u_\varepsilon^n\right\rangle_0\right| \\
&\leq \|\partial_x u_\varepsilon^n\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|w\|_0^2 \\
&\leq C_s \|u_\varepsilon^n\|_s \|w\|_0^2 \leq C' \|w(t)\|_0^2
\end{aligned}$$

donde usamos integración por partes, inmersión de Sobolev, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el teorema 4.2 en [4]. Luego integrando de 0 a t,

$$\|w(t)\|_0^2 \leq \|w(0)\|_0^2 + C' \int_0^t \|w(t')\|_0^2 \, dt', \quad 0 \leq t \leq T'$$

aplicando la desigualdad de Gronwall se sigue

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_0^2 &\leq \|w(0)\|_0^2 e^{C' \int_0^t dt'} \\
&= C\left\{\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n + \varphi^n - \varphi + \varphi - \varphi_\varepsilon\|_0^2\right\} \\
&\leq 3C\left\{\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n\|_0^2 + \|\varphi^n - \varphi\|_0^2 + \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_0^2\right\} \\
&\leq K\left\{\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n\|_s^2 + \|\varphi^n - \varphi\|_s^2 + \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_0^2\right\} \\
&= C\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_0^2 \leq Ce^{2s} \|\varphi\|_0^2 = Ce^{2s}
\end{aligned} \tag{22}$$

donde usamos $H^s \subset L^2$, (2) con $r = s$, y el hecho que $\varphi^n \to \varphi$ cuando $n \to \infty$ en $H^s(\mathbf{R})$.

Luego usando en(14) las desigualdades (22) y (21) y la desigualdad de Gronwall se tiene

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_s^2 &\leq \|w(t)\|_0^2 + \|I^s w(t)\|_0^2 \\
&\leq Ce^{2s} + \|w(0)\|_s^2 + CT'\varepsilon^{2\gamma(s)} + C\int_0^t \|w(r)\|_s^2\, dr \\
&\leq C\left\{\|w(0)\|_s^2 + \varepsilon^{2\gamma(s)} + \int_0^t \|w(r)\|_s^2\, dr\right\} \\
&\leq C\left\{\|w(0)\|_s^2 + \varepsilon^{2\gamma(s)}\right\} e^{\int_0^t dr} \\
&\leq C\left\{\|w(0)\|_s^2 + \varepsilon^{2\gamma(s)}\right\} e^{T'} \\
&\leq C'\left\{\|w(0)\|_s^2 + \varepsilon^{2\gamma(s)}\right\}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\|u_\varepsilon^n(t) - u_\varepsilon(t)\|_s \leq C\left\{\|\varphi_\varepsilon^n - \varphi_\varepsilon\|_s + \varepsilon^{\gamma(s)}\right\} \to 0$$

cuando $n \to \infty$ y $\varepsilon \to 0^+$ completando la demostración de la proposición. □

Proposición 11. *Si $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon^n(t)$ son soluciones de (KdV_μ) con valor inicial φ_ε, φ_ε^n respectivamente, donde $\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon^n$ son las aproximaciones de Bona-Smith asociadas a φ y φ^n, respectivamente, entonces $u^n \to u$ en $H^s(\mathbf{R})$ uniformemente cuando $n \to \infty$ y $\varepsilon \to 0^+$.*

Prueba. Para $t \in [0, T']$ tenemos

$$\begin{aligned}
& \|u^n(t) - u(t)\|_s \\
= \; & \|u^n(t) - u_\varepsilon^n(t) + u_\varepsilon^n(t) - u_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t) - u(t)\|_s \\
\leq \; & \|u^n(t) - u_\varepsilon^n(t)\|_s + \|u_\varepsilon^n(t) - u_\varepsilon(t)\|_s + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_s,
\end{aligned} \tag{23}$$

haciendo $\delta \to 0^+$ en la proposición 7 y usando la proposición 1, tenemos

$$\sup_{0 \leq t \leq T'} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{\gamma(s)} + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_s\right\}$$

y

$$\sup_{0 \leq t \leq T'} \|u^n(t) - u_\varepsilon^n(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{\gamma(s)} + \|\varphi^n - \varphi_\varepsilon^n\|_s\right\}$$

luego de (4) y (5) se sigue que el primer y el tercer sumando del lado derecho de (23) tienden a cero cuando $\varepsilon \to 0^+$, uniformemente en $t \in [0, T']$ y en n. $\square$

Referencias

[1] R.J. IORIO JR: *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces.* Functional Analytical Methods for PDE. Lect. Notes in Math., 1450, (1990).

[2] R.J. IORIO JR., V. IORIO: *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge University Press, New York, (2001).

[3] R. IORIO, F. LINARES, M. SCIALOM: *KdV and BO equations with bore-like data.* Differential and Integral Equations, 11 (1998) 895-915.

[4] A. MENDOZA, J. MONTEALEGRE: *Existencia y unicidad local para la ecuación de Korteweg - De Vries.* Reporte de investigación, N°10 Serie B, PUCP, (2000).

Aldo Mendoza Uribe
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional Agraria La Molina
amendoza@lamolina.edu.pe

Juan Montealegre Scott
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
jmscott@pucp.edu.pe