

# ACERCA DEL PROBLEMA DE POINCARÉ

*Percy Fernández Sánchez*

## *Resumen*

*En este artículo damos un breve resumen de algunos avances obtenidos acerca del Problema de Poincaré. Comenzamos discutiendo el Problema de Poincaré, luego abordamos el Teorema de Cerveau-Lins Neto [7] y el Teorema de Carnicer [6]. Para finalizar comentamos algunos resultados obtenidos por Brunella [1] y los resultados obtenidos por Corral y el autor de este artículo [8]*



# Introducción

Para establecer el Problema de Poincaré consideramos un campo de vectores polinomial  $X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  en  $\mathbb{C}^2$ , esto es,  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son polinomios complejos. El grado  $d$  de  $X$  es definido como el máximo de los grados de  $P$  y  $Q$ . Así, podemos escribir:  $P(x, y) = \sum_{i=0}^d P_i(x, y)$   $Q = \sum_{i=0}^d Q_i(x, y)$ , donde  $P_i$  y  $Q_i$  son polinomios homogéneos de grado  $i$ , siendo  $P_d$  ó  $Q_d$  no nulo.

El campo  $X$  induce una foliación  $\mathcal{F}$  en el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}^2$ , para ello consideremos las coordenadas  $(u, v)$  y  $(s, t)$  de esta variedad, cuyos cambios de coordenadas son:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} s = \frac{x}{y} \\ t = \frac{1}{y} \end{cases}$$

En las coordenadas  $(u, v)$  el campo  $X$  se expresa como

$$u^2 \sum_{i=0}^d P_i \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) \frac{\partial}{\partial u} + u^2 \sum_{i=0}^d \left( \frac{1}{u} Q_i \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) - \frac{v}{u} P_i \left( \frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Una curva algebraica en  $\mathbb{P}^2$  definida en coordenadas afines  $(x, y)$  por la ecuación polinomial  $C : R(x, y) = 0$ , es  $\mathcal{F}$ -invariante si  $\frac{X(R)}{R}$  es un polinomio, siendo  $X$  el campo vectorial que genera  $\mathcal{F}$  en esta coordenadas.

Si  $xQ_d - yP_d$  no es idénticamente nulo, la recta del infinito  $\{u = 0\}$  es  $\mathcal{F}$ -invariante y, en este caso evidentemente hay más de  $d$  tangencias entre la foliación y la recta del infinito.

Si  $xQ_d - yP_d$  es idénticamente nulo, la recta del infinito  $\{u = 0\}$  no es  $\mathcal{F}$ -invariante y, en este caso, el número de tangencias de  $\mathcal{F}$  a esta recta es dado por el número de raíces de la ecuación  $P_d(0, v) = 0$ , que es  $d - 1$ .

Por esta razón definimos el *grado de la foliación*  $\mathcal{F}$  generado por  $X$  por  $d - 1$  en caso que  $xP_d + yQ_d$  sea idénticamente nulo y por  $d$  en caso que  $xP_d + yQ_d$  no sea idénticamente nulo. Se puede verificar que cualquier recta no  $\mathcal{F}$ -invariante tiene el mismo número de tangencia.

Una función racional  $F = \frac{G}{H}$  ( $G$  y  $H$  son polinomios) es una *integral primera* de  $\mathcal{F}$  si  $X(F) = 0$ . Cuando  $F$  sea una integral primera, las curvas algebraicas  $\alpha_1 G + \alpha_2 H = 0$ ,  $[\alpha_1 : \alpha_2] \in \mathbb{P}^1$  son  $\mathcal{F}$ -invariantes.

Ahora ya estamos en condiciones de formular el Problema de Poincaré, el cual *consiste en acotar el grado de las curvas algebraicas  $\mathcal{F}$ -invariantes por el grado de la foliación  $\mathcal{F}$* , [12].

Poincaré planteó este problema con el objetivo de hallar integrales primeras de la foliación, efectivamente, si  $F = \frac{G}{H}$  es integral primera tanto  $G = 0$  como  $H = 0$  son curvas  $\mathcal{F}$ -invariantes, de ahí que si conocemos de algún modo una cota para las soluciones algebraicas podemos escribir  $F$  con coeficientes indeterminados y de ahí resolver las ecuaciones que aparecen por la ecuación  $X(F) = 0$ .

Debemos advertir que el problema de Poincaré no siempre tiene solución: por ejemplo la foliación generada por el campo vectorial  $X = nx \frac{\partial}{\partial x} + my \frac{\partial}{\partial y}$ , admite las siguientes curvas invariantes:  $\alpha_1 y^n - \alpha_2 x^m = 0$ ,  $[\alpha_1 : \alpha_2] \in \mathbb{P}^1$  de grado el máximo entre  $m$  y  $n$ , sin embargo la foliación tiene grado 1. Otros ejemplos más sofisticados pueden ser hallados en [10]. Surge entonces la interrogante: ¿Cuándo es posible resolver el problema de Poincaré?. Este trabajo consistirá en deslindar esta interrogante y analizar condiciones sobre la foliación para que sea posible resolver el Problema de Poincaré.

## 1. Invariantes Locales

Sea  $M$  una superficie holomorfa y  $\mathcal{F}$  una foliación con conjunto singular  $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset M$  aislado. Así, alrededor de cada punto  $p \in M$  existe coordenadas  $(x, y)$  con  $p = (0, 0)$  siendo  $\mathcal{F}$  generado en una vecindad de  $p$  por las órbitas de un campo vectorial holomorfo

$$X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

o dualmente por la 1-forma tangente a  $X$

$$\omega = -b(x, y)dx + a(x, y)dy,$$

$a$  y  $b$  son funciones holomorfas irreducibles ( $\mathcal{F}$  tiene singularidad aislada). El punto  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  si  $a(p) = b(p) = 0$ .

Si  $a = a_\nu + a_{\nu+1} + \dots$  y  $b = b_\nu + b_{\nu+1} + \dots$ , son los desarrollos de Taylor de  $a$  y  $b$ , donde  $a_\nu \neq 0$  o  $b_\nu \neq 0$ , entonces el número  $\nu = \nu_p(\mathcal{F})$  es llamado *multiplicidad* de  $\mathcal{F}$  en  $p$ .

El número  $\mu = \mu_p(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_0}{\langle a, b \rangle}$ , donde  $\mathcal{O}_0$  es el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en  $0$  y  $\langle a, b \rangle$  es el ideal generado por  $a$  y  $b$ , es llamado *número de Milnor*.

La singularidad  $p$  de la foliación es llamada *reducida* en el sentido de Seinderberg si la parte lineal de  $X$  es no nula y tiene dos autovalores no nulos cuyo cociente no es racional positivo (*singularidad simple*) o tiene un autovalor nulo o el otro no (*silla nodo*). Las singularidades reducidas han sido muy estudiados tanto en sus aspectos analíticos como topológicos, para una información detallada recomendamos ver [4].

A fin de obtener singularidades reducidas realizamos explosiones centradas en  $p$ , esto es, una variedad  $\tilde{M}$  y una aplicación  $\pi : (\tilde{M}, E) \rightarrow (M, p)$ , donde  $E = \pi^{-1}(p)$  es una línea proyectiva llamada *conjunto excepcional*. Alrededor de  $E$  existe vecindades con coordenadas  $(x, t)$  (en estas coordenadas  $E$  es dado por  $x = 0$ ) y  $(s, y)$  (en estas coordenadas  $E$  es dado por  $y = 0$ ) cuyo cambio de coordenadas es  $(\frac{1}{t}, tx) = (s, y)$ . En estas coordenadas  $\pi$  admite las representaciones locales:

$$\pi(x, t) = (x, tx) = (x, y) \quad \text{y} \quad \pi(s, y) = (sy, y) = (x, y).$$

Seinderberg probó que mediante un número finito de explosiones las singularidades pueden ser reducidas [13].

La imagen recíproca de  $X$  por  $\pi$  induce un campo vectorial alrededor de  $E$  dado por

$$\begin{aligned} \pi^* X = & x^\nu (a_\nu(1, t) + x a_{\nu+1}(1, t) + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + x^{\nu-1} ((b_\nu(1, t) + t a_\nu(1, t)) \\ & + (b_{\nu+1}(1, t) + t a_{\nu+1}(1, t)) + \dots) \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

en las coordenadas  $(x, t)$ . A fin que  $\pi^* X$  tenga singularidades aisladas dividimos los ceros de este campo (que cuando los tiene coincide con  $E$ ).

$$\tilde{X} = \frac{\pi^* X}{x^l} \quad (2)$$

donde  $l = \nu - 1$  ó  $\nu$  según  $x b_\nu(x, y) + y a_\nu(x, y)$  sea nulo o no, respectivamente. En el primer caso  $p$  recibe el nombre de singularidad *no-dicrítica*

y en el segundo caso singularidad *dicrítica*. Como el campo  $\tilde{X}$  tiene singularidades aisladas induce una foliación alrededor de  $E$  denotado por  $\pi^*\mathcal{F}$ .

Un *separatriz* de  $\mathcal{F}$  en  $p$  es una curva analítica definida en una vecindad de  $p$  pasando por este punto  $\mathcal{F}$ -invariante.

Recalcamos algunos términos utilizados en Geometría Analítica Local, por ejemplo, una *rama* es una curva analítica irreducible, el *cono tangente* de una curva analítica  $S : f(x, y) = 0$  pasando por  $p = (0, 0)$  es una curva algebraica (en realidad una unión de rectas) dada por  $f_k(x, y) = 0$ , donde  $f = f_k + f_{k+1} \cdots$ , siendo  $f_j$  los polinomios homogéneos de grado  $j$  y  $f_k \neq 0$ , además el número  $k$  es llamado *multiplicidad de  $S$  en  $p$*  y denotado por  $\nu_p(S)$ .

Sean  $B$  una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  en  $p$  y  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una parametrización Puiseux de  $B$ . El campo  $X$  induce el campo  $\tilde{X} = h \frac{\partial}{\partial t}$  en  $(\mathbb{C}, 0)$  y ambos inducen derivaciones las cuales tornan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{x, y\} & \xrightarrow{X} & \mathbb{C}\{x, y\} \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \mathbb{C}\{t\} & \xrightarrow{\tilde{X}} & \mathbb{C}\{t\} \end{array}$$

La *multiplicidad* de  $\mathcal{F}$  a lo largo de  $B$  en  $0$  es definida por  $i_0(\mathcal{F}, B) = \text{orden } \varphi^*(X) \text{ en } 0 = \text{orden } h(t) \text{ en } 0, ([3])$ . Aprovechando la conmutatividad del diagrama tenemos

$$h \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \tilde{X} \circ \varphi_*(x) = \varphi_* \circ X(x) = a(\varphi)$$

esto es,

$$i_0(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \nu(a(\varphi)) - \nu(\varphi_1) + 1 & \text{si } \varphi_1 \neq 0 \\ \nu(a(\varphi)) - \nu(\varphi_2) + 1 & \text{si } \varphi_2 \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

**Proposición 1.** Si  $B'$  es la transformada estricta de  $B$  por medio de  $\pi_1$  y  $p' \in E_1 \cap B'$ . Entonces tenemos

$$i_p(\mathcal{F}, B) = i_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + \nu_p(B)(\nu_p(\mathcal{F}) - 1) \quad \text{si } \pi \text{ es no-dicrítico} \quad (4)$$

$$i_p(\mathcal{F}, B) = i_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + \nu_p(B)\nu_p(\mathcal{F}) \quad \text{si } \pi \text{ es dicrítico} \quad (5)$$

**Prueba:** Sea  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la parametrización de una rama  $B$ . Podemos suponer que  $\varphi_1 \neq 0$ , esto significa que el cono tangente de  $B$  no es el eje  $y$ , entonces  $B'$  puede ser descrita en las coordenadas  $(x, t)$  que satisfacen la relación  $y = tx$ , esto es,  $\pi(x, t) = (x, xt)$ . Entonces una parametrización de  $B'$  es  $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \frac{\varphi_2}{\varphi_1})$ . Como en (1), si  $a = a_\nu + a_{\nu+1} + \dots$  y  $b = b_\nu + b_{\nu+1} + \dots$  son los desarrollos de Taylor de  $a$  y  $b$ , tenemos

$$\pi^* X = x^l \tilde{X}$$

donde  $l = \nu - 1$  y  $l = \nu$  si 0 es no-dicrítica o dicrítica respectivamente, y  $\tilde{X}$  describe la foliación  $\pi^* \mathcal{F}$  en las coordenadas  $(x, t)$ . Luego como  $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$  tenemos

$$\varphi^* X = (\pi \circ \tilde{\varphi})^* X = \tilde{\varphi}^*(\pi^* X) = \tilde{\varphi}^*(x^l \tilde{X}) = \varphi_1^l \tilde{\varphi}^*(\tilde{X}).$$

de esta igualdad se sigue el resultado, pues  $\text{ord}(\varphi_1) = \nu_p(B)$  y el índice  $i_{p'}(\pi^* \mathcal{F}, B') = \text{ord} \tilde{\varphi}^*(\tilde{X})$ .  $\square$

**Observación 1.** Una observación clave para entender la demostración del siguiente resultado es la siguiente identidad:  $\tilde{\varphi}^*(\pi^* X) = (\pi \circ \tilde{\varphi})^* X = \varphi^* X$ .

## 2. Resultados Principales

En esta sección mostraremos que el grado de una foliación no-dicrítica sobre el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  acota el grado de las curvas algebraicas invariantes por esta foliación. Comenzamos con un resultado debido a Cerveau y Lins-Neto [7].

**Teorema 1 (Cerveau-Lins).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación sobre  $\mathbb{P}^2$  de grado  $d$  y  $C$  una curva invariante por  $\mathcal{F}$  de grado  $m$ . Entonces*

$$\mathcal{X}(C) + m(d - 1) = \sum_{p \in C} \sum_{B \in C\{p\}} i_{p'}(\mathcal{F}_1, B'),$$

donde  $\mathcal{X}(C)$  es la característica de Euler del normalizado de  $C$  y  $C\{p\}$  es el conjunto de ramas pasando por  $p$ .

**Prueba:** Considere una recta  $L$  en  $\mathbb{P}^2$  que sea transversal a  $C$ , esto es, en  $L \cap C$  no hay puntos singulares de la foliación  $\mathcal{F}$  y allí son ellos

transversales. Identifiquemos por  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 - L$  y aquí consideramos las coordenadas afines  $(x, y)$ .

Si  $p \in L \cap C$  hacemos un cambio de coordenada  $\psi(u, v) = (\frac{1}{u}, \frac{v}{u}) = (x, y)$ . Por otro lado, si  $X$  es un campo vectorial que define  $\mathcal{F}$  en las coordenadas afines  $(x, y)$ , entonces  $\psi^*X = \frac{1}{u^{d-1}}Y$ , donde  $Y$  es un campo holomorfo que define  $\mathcal{F}$  en las coordenadas afines  $(u, v)$ . Entonces  $\text{ord}_p(\psi^*X) = -(d-1)$  ( $Y$  no se anula en ningún punto de la recta  $L$ ).

Sea  $\pi$  la composición de explosiones de puntos que desingulariza  $\mathcal{F}$ . Por definición  $\mathcal{X}(C)$  es la Característica de Euler de transformada estricta  $C'$  de  $C$ . Teniendo en cuenta que  $L \cap C$  tiene  $m$  puntos y la Observación (1), por el Teorema de Poincaré-Hopf,  $\mathcal{X}(C) = (X|_C)_0 - (X|_C)_\infty = \sum_p \tilde{\varphi}^*(\pi^*X) - m(d-1) = \sum_{p \in C} \sum_{B \in C\{p\}} i_{p'}(\mathcal{F}_1, B') - m(d-1)$  y esto concluye la demostración del teorema.  $\square$

Mediante este resultado Cerveau y Lins-Neto en [7] resuelven el Problema de Poincaré para el caso en que la curva algebraica localmente alrededor de las singularidades es una separatriz regular o tiene cruzamiento normal, esto es, localmente es expresado por la ecuación  $x = 0$  ó  $xy = 0$ .

Basándose en este mismo resultado Carnicer [6] muestra que toda foliación no-dicrítica satisface el Problema de Poincaré, para ello utilizaremos el siguiente resultado técnico cuya demostración puede ser encontrada en [3].

**Lema 1.** *Si  $p$  es una singularidad no-dicrítica de  $\mathcal{F}$  entonces*

$$\nu_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{q \in E \cap \text{Sing}(\pi^*\mathcal{F})} i_q(\pi^*\mathcal{F}, E).$$

**Prueba:** Supongamos que  $\mathcal{F}$  sea generado por el campo vectorial  $X = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$  entonces el campo que genera  $\pi^*\mathcal{F}$  es el campo  $\tilde{X}$ , vea (2), el cual es justamente  $\tilde{X} = \frac{\pi^*X}{x^l}$ , donde  $l = \nu - 1$  o  $\nu$  según  $p$  sea no-dicrítica o dicrítica respectivamente. Como nuestro caso es el no-dicrítica  $xb_\nu(x, y) + ya_\nu(x, y)$  es no nulo. Si  $q = (0, t_0) \in \text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) \cap E$ , entonces  $i_q(\pi^*\mathcal{F}, E)$  es la multiplicidad de  $t_0$  como raíz de  $b_\nu(1, t) + ta_\nu(1, t)$ . Por lo tanto

$$\sum_{q \in E \cap \text{Sing}(\pi^* \mathcal{F})} i_q(\pi^* \mathcal{F}, E) = \text{grado}(b_\nu(1, t) + ta_\nu(1, t)) = \nu_p(\mathcal{F}) + 1.$$

□

Consideremos una sucesión de explosiones puntuales:

$$M_n \xrightarrow{\pi_3} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}^{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_3} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M.$$

Sea  $E_1^{(1)} = \pi_1^{-1}(p)$  el divisor excepcional,  $D_1 = E_1^{(1)}$  y  $\mathcal{F}_1 = \pi^* \mathcal{F}$ . Inductivamente, si  $p_{n-1} \in D_{n-1} \subset M_{n-1}$ , definimos:

$$E_n^{(n)} = \pi_n(p_{n-1}) \quad \text{y} \quad E_k^{(n)} = \pi_n^* E_k^{(n-1)}, \quad \text{si } k = 1, \dots, n-1,$$

donde convenimos  $p_0 = p$  y  $M_0 = M$ . De estas notaciones debe notarse que  $D_n = E_1^{(n)} \cup \dots \cup E_n^{(n)}$ . Para simplificar las notaciones denotamos  $\mathcal{F}_n = \pi_n^* \mathcal{F}_{n-1}$ .

Al excepcional  $E_1^{(1)}$  le asociamos el *peso*,  $\rho(E_1^{(1)}) = 1$ . Inductivamente definimos el peso para los demás conjuntos excepcionales:

$$\rho(E_n^{(n)}) = \sum_{p_{n-1} \in E_k^{(n-1)}} \rho(E_k^{(n-1)}) \quad \text{y} \quad \rho(E_k^{(n)}) = \rho(E_k^{(n-1)}),$$

si  $k = 1, \dots, n-1$ . Por último, definimos la *multiplicidad relativa alterada* para  $q \in E_k^{(n)} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_n)$  a lo largo de  $E_k^{(n)}$  como:

$$i_q^*(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) = \begin{cases} i_q(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) - 1 & \text{cuando } q \text{ es esquina} \\ i_q(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) & \text{cuando } q \text{ no es esquina} \end{cases}$$

**Teorema 2.** *Si  $p \in M$  es una singularidad no-dicrítica de  $\mathcal{F}$  entonces*

$$\nu_p(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{q \in E \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_n)} \rho(E_k^{(n)}) i_q^*(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}).$$

**Prueba:** La prueba será realizado por inducción en el número de explosiones  $n$ . El caso  $n = 1$  es el Lema 1. Suponga el resultado válido para  $n$  explosiones. Realicemos una explosión  $\pi_{n+1}$  en  $p_n \in D_n$ . Conforme a la definición de multiplicidad, antes adoptada, tenemos que analizar dos casos:

i) *La singularidad  $p_n$  no es una esquina.*

Si  $p_n \in E_k^{(n)}$ , el único término modificado por la explosión en  $p_n$  es:

$\rho(E_k^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) = \rho(E_k^{(n)})i_{p_n}(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)})$ . Si  $q \in E_k^{(n+1)} \cap E_{n+1}^{(n+1)}$ , entonces de la Proposición 1 tenemos:

$$i_q(\mathcal{F}_{n+1}, E_k^{(n+1)}) = i_{p_n}(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) - (\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1).$$

Luego

$$\begin{aligned} \rho(E_k^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) &= \rho(E_k^{(n+1)})(i_q(\mathcal{F}_{n+1}, E_k^{(n+1)}) - 1) \\ &\quad + \rho(E_k^{(n+1)})\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Como  $q$  es una esquina

$$i_q^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_k^{(n+1)}) = i_q(\mathcal{F}_{n+1}, E_k^{(n+1)}) - 1.$$

Puesto que  $E_k^{(n+1)}$  es la única recta proyectiva de  $D^{(n+1)}$  que intercepta  $E_{n+1}^{(n+1)}$ , tenemos:

$$\rho(E_{n+1}^{(n+1)}) = \rho(E_k^{(n+1)}).$$

Por el Lema 1

$$\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{r \in E_{n+1}^{(n+1)} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_{n+1})} i_r(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}).$$

Reemplazando estas tres últimas identidades en (6) tenemos

$$\begin{aligned} \rho(E_k^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_k^{(n)}) &= \rho(E_k^{(n+1)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_k^{(n+1)}) \\ &\quad + \rho(E_{n+1}^{(n+1)})(i_q(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) - 1) \\ &\quad + \rho(E_{n+1}^{(n+1)}) \sum_{r \in (E_{n+1}^{(n+1)} - \{q\})} i_r(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) \\ &= \rho(E_k^{(n+1)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_k^{(n+1)}) \\ &\quad + \rho(E_{n+1}^{(n+1)})(i_q^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)})) \\ &\quad + \rho(E_{n+1}^{(n+1)}) \sum_{r \in (E_{n+1}^{(n+1)} - \{q\})} i_r^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}). \end{aligned}$$

ii) *La singularidad  $p_n$  es una esquina.*

Entonces la explosión en  $p_n$  modifica los términos

$\rho(E_{k_1}^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_{k_1}^{(n)})$  y  $\rho(E_{k_2}^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_{k_2}^{(n)})$ . Sean  $q_1 = E_{k_1}^{(n+1)} \cap E_{n+1}^{(n+1)}$  y  $q_2 = E_{k_2}^{(n+1)} \cap E_{n+1}^{(n+1)}$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}
& \rho(E_{k_1}^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_{k_1}^{(n)}) + \rho(E_{k_2}^{(n)})i_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, E_{k_2}^{(n)}) \\
&= \rho(E_{k_1}^{(n)})i_{p_n}(\mathcal{F}_n, E_{k_1}^{(n)}) - 1) \\
&+ \rho(E_{k_2}^{(n)})(i_{p_n}(\mathcal{F}_n, E_{k_2}^{(n)}) - 1) \\
&= \rho(E_{k_1}^{(n)})(i_{q_1}(\mathcal{F}_n, E_{k_1}^{(n+1)}) + \nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) - 1) \\
&+ \rho(E_{k_2}^{(n)})(i_{q_2}(\mathcal{F}_n, E_{k_2}^{(n+1)}) + \nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) - 1) \\
&= \rho(E_{k_1}^{(n)})(i_{q_1}(\mathcal{F}_n, E_{k_1}^{(n+1)}) - 1) + \rho(E_{k_2}^{(n)})(i_{q_2}(\mathcal{F}_n, E_{k_2}^{(n+1)}) - 1) \\
&+ (\rho(E_{k_1}^{(n+1)}) + \rho(E_{k_2}^{(n+1)}))(\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) \\
&= \rho(E_{k_1}^{(n+1)})(i_{q_1}^*(\mathcal{F}_n, E_{k_1}^{(n+1)})) + \rho(E_{k_2}^{(n+1)})(i_{q_2}^*(\mathcal{F}_n, E_{k_2}^{(n+1)})) \\
&+ \rho(E_{n+1}^{(n+1)})(\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1).
\end{aligned}$$

Ahora, del Lema 1 tenemos  $\nu_{p_n}(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{r \in E_{n+1}^{(n+1)}} i_r(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)})$ .

Luego

$$\begin{aligned}
\nu_{p_n} - 1 &= \sum_{r \in (E_{n+1}^{(n+1)}) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_{n+1})} i_r(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) - 2 \\
&= \sum_{r \in (E_{n+1}^{(n+1)}) - \{q_1, q_2\}} i_r(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) + (i_{q_1}(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) - 1) \\
&+ (i_{q_2}(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) - 1) \\
&= \sum_{r \in (E_{n+1}^{(n+1)}) - \{q_1, q_2\}} i_r^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) + i_{q_1}^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}) \\
&+ i_{q_2}^*(\mathcal{F}_{n+1}, E_{n+1}^{(n+1)}).
\end{aligned}$$

□

**Corolario 1.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación no-dicrítica y  $S = \{f = 0\}$  una separatriz de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{G}_S$  es la foliación inducida por  $df = 0$  siendo  $f$  la ecuación reducida que define  $S$  tenemos:

$$i_p(\mathcal{F}, B) \geq i_p(\mathcal{G}_S, B).$$

siendo  $B$  una rama (componente irreductible) de  $S$ .

**Prueba:** Tomemos la resolución  $\pi = \pi_n \circ \dots \circ \pi_1$  de singularidades de  $S$

$$S_n \xrightarrow{\pi_n} S_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} S_1 \xrightarrow{\pi_1} S_0 = S$$

donde  $S_i$  es la transformada estricta de  $S_{i-1}$ , sean  $p = p_i \in S_i \cap E_i$ , donde  $E_i$  es el divisor excepcional. Supongamos que  $S_n$  es la unión de  $s$  separatrices transversales a  $E_1, \dots, E_m$  ( $\pi^{-1}(p) = E_1 \cup \dots \cup E_m$ ) en las singularidades simples  $p_1, \dots, p_s$  las singularidades de  $\mathcal{G}_S$  no pueden ser sillanodos [3]. Luego  $(\mathcal{G}_S)_n$  es definido localmente por la ecuación  $d(xy) = 0$ , donde  $E_i = \{x = 0\}$ , así,  $i_{p_i}((\mathcal{G}_S)_n, E_i) = 1$ . Entonces del Teorema 2,  $\nu_p(\mathcal{G}_S) + 1 = \sum_{i=1}^s \rho(E_i)$ . Aplicando las mismas explosiones a  $\mathcal{F}$  tenemos que los  $p_1, \dots, p_s$  son singularidades de  $\mathcal{F}_n$  (pudiendo haber algunas más). Entonces  $i_{p_i}(\mathcal{F}_n, E_i) = i_{p_i}(\mathcal{F}_n, E_i) \geq 1$ . Por lo tanto, nuevamente por el Teorema 2,

$$\nu_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{i=1}^s \rho(E_i) i_{p_i}(\mathcal{F}_n, E_i) \geq \sum_{i=1}^s \rho(P_i) = \nu_p(\mathcal{G}_S) + 1. \quad (7)$$

Para concluir la demostración consideremos  $B$  una componente irreducible de  $S$  y  $B_n = \pi^*(B)$  la transformada estricta de  $B$  entonces

$$i_{p_i}(\mathcal{F}_n, B_n) \geq 1 = i_{p_i}((\mathcal{G}_S)_n, B_n). \quad (8)$$

De (7) y (8) y la Proposición 1 tenemos el resultado.  $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el Teorema dado por Carnicer [6].

**Teorema 3 (Carnicer).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular sobre  $\mathbb{P}^2$  de grado  $d$ , con singularidades no-dicríticas. Sea  $C$  una curva algebraica invariante de grado  $m$  por  $\mathcal{F}$ . Entonces  $m \leq d + 2$ .*

**Prueba:** Considere una recta  $L$  en  $\mathbb{P}^2$  que sea transversal a  $C$ , esto es, en  $L \cap C$  no hay puntos singulares de la foliación  $\mathcal{F}$  y ahí ellos son transversales. Identifiquemos por  $\mathbb{C}^2$  con  $\mathbb{P}^2 - L$ . Supongamos que  $C|_{\mathbb{C}^2} : f = 0$  ( $f \in \mathbb{C}[x, y]$ ) es la ecuación reducida de  $C$ . Así, tenemos una foliación  $\mathcal{G}_C$  definida por  $df = 0$ .

En los puntos  $p \in L \cap C$  tenemos las coordenadas  $\psi(u, v) = (\frac{1}{u}, \frac{v}{u}) = (x, y)$ . La curva  $C$  y  $L$  están definidas por los ceros y polos de la función racional  $\frac{g(u, v)}{u^m} = f(\frac{1}{u}, \frac{v}{u})$  respectivamente, es decir,  $C : g = 0$  y  $L : u = 0$ . Así,  $\mathcal{G}_C : u \frac{\partial}{\partial u} + mg \frac{\partial}{\partial v}$ , y de la suposición que  $f$  es reducida y regular ( $C$

es regular), tenemos que  $g$  puede ser considerada como otra coordenada. De esta descripción tenemos que:  $i_p(\mathcal{G}_C, C) = 1$ . Luego

$$\sum_{p \in C \cap L} i_p(\mathcal{G}_C, C) = m. \quad (9)$$

Ahora como  $p$  es punto regular de  $\mathcal{F}$  entonces  $\mathcal{F}$  es definida localmente en este punto por  $dg = 0$ , por esta razón  $i_p(\mathcal{F}, C) = 0$ . Aplicando el Teorema 1 a la foliación  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  tenemos

$$m(m-2) - m(d-1) = \sum_{p \in C} \sum_{B \in C\{p\}} (i_p(\mathcal{G}_C, B) - i_p(\mathcal{F}, B)).$$

De la relación 9 y el Lema (1) tenemos

$$m(m-2) - m(d-1) = \sum_{p \in (C-L)} \sum_{B \in C\{p\}} (i_p(\mathcal{G}_C, B) - i_p(\mathcal{F}, B)) + m \leq m.$$

Entonces  $m-3 \leq d-1$ , y esto concluye la demostración  $\square$

### 3. Otros Avances del Problema de Poincaré

A continuación damos un ejemplo donde se puede acotar el grado de una curva algebraica invariante de una foliación  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{P}^2$  por el grado de  $\mathcal{F}$ , a pesar que la foliación es dicrítica.

**Ejemplo 1.** Considere las coordenadas homogéneas  $[x : y : z]$  de  $\mathbb{P}^2$  y sea  $\mathcal{F}_\omega$  [3] la foliación definida en coordenadas afines  $z = 1$  por la 1-forma

$$\omega = (yP(x, y) + x^{\nu+2})dx - xP(x, y)dy$$

donde  $P$  es un polinomio homogéneo de grado  $\nu$  y  $P(0, 1) \neq 0$ . La foliación es de grado  $\nu+2$ . Las singularidades de esta foliación son dadas por las ecuaciones  $yP(x, y) + x^{\nu+2} = 0$  y  $xP(x, y) = 0$  en el plano afín  $z = 1$  cuya única solución es el punto  $[0 : 0 : 1]$ , en el infinito hay otra singularidad  $[0 : 1 : 0]$ , sus números de Milnor correspondientes son  $1 + \nu + (\nu+2)\nu$  y  $2(\nu+3)$  respectivamente. Al hacer una explosión en el punto  $[0 : 0 : 1]$ , la transformada estricta de  $\mathcal{F}_\omega$  es la foliación definida por la 1-forma  $dx - P(1, t)dt$ , la cual tiene integral primera holomorfa

$d(x - \int P(1,t)dt)$  si denotamos por  $F(t) = \int P(1,t)dt$  tenemos que las curvas racionales  $x - F(t) + c$  son transformada estrictas del pincel de curvas  $x^{\nu+2} - x^{\nu+1}F(\frac{y}{x}) + cx^{\nu+1} = 0$ . Observe que la solución aislada [3] de la foliación es justamente cuando  $c = 0$ . Además si consideramos la función  $G_1 = x^{\nu+2} - x^{\nu+1}F(\frac{y}{x})$ , como tenemos

$$d\omega = -\nu P dx \wedge dy$$

podemos deducir

$$\omega \wedge dG_1 = \frac{\nu + 1}{\nu} G_1 d\omega,$$

entonces  $G = \frac{G_1}{x^{\nu+1}}$  es integral primera racional de la foliación. En este ejemplo puede apreciarse que el grado de la solución aislada coincide con el grado de la foliación.

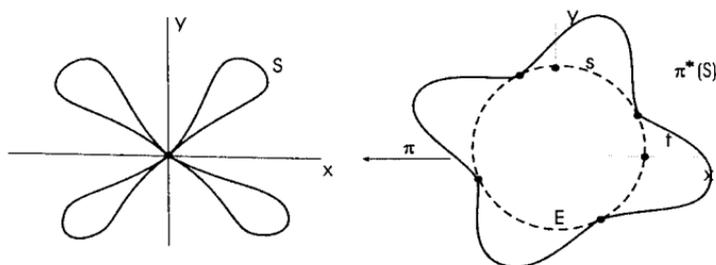


Figura 1:  $S$  es una separatriz aislada, la preimagen  $\pi^*S = E \cup \tilde{S}$  está formada por el conjunto excepcional  $E$  (no  $\mathcal{F}$ -invariante) y la transformada estricta  $\tilde{S}$  dado por la ecuación  $F(t) = x$ . Por lo tanto los puntos de intercepción  $\tilde{S} \cap E$  están dados por las raíces de ecuación  $F(t) = 0$ .

La pregunta es entonces ¿bajo qué condiciones aún se satisface el Problema de Poincaré? Con la finalidad de responder a esta pregunta, Brunella en [1] consideró las *separatrices no-dicrítica*, por ello, entenderemos a las separatrices que no pasan por las componentes dicríticas. Para este tipo de separatrices Brunella mostró que una generalización de la multiplicidad a lo largo de una separatriz, llamado el índice Gómez Seade y Verjovski [9], denotado por  $G_{SV}(\mathcal{F}, S)$  es positivo, lo cual no es verdad para las separatrices que pasan por componentes dicríticas. Mediante este resultado Brunella probó que el grado de una curva algebraica no-dicrítica es menor o igual a grado de la foliación, más dos.

Aún queda por responder qué sucede con las separatrices que pasan por las componentes dicríticas. Nosotros, Corral y el autor de este artículo, en [8], introducimos la noción de *curvas algebraicas aisladas*, éstas son las curvas algebraicas que localmente son separatrices aisladas que a continuación pasamos a definir.

Consideramos una foliación singular  $\mathcal{F}$  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y un divisor a cruzamiento normal  $D$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Denotamos por  $Sing(\mathcal{F}, D)$  el *lugar singular adaptado*, esto es, los puntos singulares de  $\mathcal{F}$  y los puntos donde  $\mathcal{F}$  y  $D$  no tienen cruzamiento normales. Diremos que un punto  $p \in Sing(\mathcal{F}, D)$  es *simple adaptado a  $D$*  si  $p$  es una singularidad simple de  $\mathcal{F}$ , el divisor  $D \neq \emptyset$  y todas las componentes de  $D$  a través de  $p$  son no-dicríticas. La *reducción mínima de singularidades* [13] del par  $(\mathcal{F}, D)$  es el morfismo

$$\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

composición de número mínimo de explosiones de puntos tal que cualquier singularidad de  $Sing(\mathcal{F}', E)$  es simple adaptado a  $E$ , donde  $\mathcal{F}'$  es la transformada estricta de  $\mathcal{F}$  por  $\pi$  y  $E = \pi^{-1}(D \cup \{0\})$  (ver [5]).

Nosotros decimos que una separatriz  $B$  de  $\mathcal{F}$  es una *separatriz aislada* de  $(\mathcal{F}, D)$  si la transformada estricta  $B'$  de  $B$  por  $\pi$  corta el divisor excepcional  $E = \pi^{-1}(D \cup \{0\})$  es una componente no-dicrítica (ver [3]). Cuando  $D = \emptyset$ , decimos que  $B$  que es una separatriz aislada de  $\mathcal{F}$ .

Debemos destacar que las separatrices aisladas no son separatrices no-dicríticas como muestra el Ejemplo 1. Y también no puede esperarse que el índice de *GSV* sea positivo para este tipo de separatriz como un ejemplo dado en [8] lo muestra.

A pesar de estas observaciones, nosotros mostramos que el grado de una curva algebraica aislada invariante es aun limitada por una función dependiendo sólo del grado de la foliación. La estrategia es mostrar que el número de ramas y el número mínimo de explosiones para desingularizar es acotado por el número de Milnor de la foliación. Luego mostramos que el índice *GSV* es acotado inferiormente por una cota dependiendo sólo del número de Milnor.

Para concluir, debemos destacar que existen otros artículos dedicados al Problema de Poincaré, con puntos de vista diferentes más interesantes, dentro los cuales podemos citar [2], [11] y [14].

## Referencias

- [1] M. BRUNELLA: *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*. Publ. Mat. 41 (1997), 527-544.
- [2] M. BRUNELLA AND L.G. MENDES: *Bounding the degree of solutions to Pfaff equations*, Publ. Mat. 44(2) (2000) 593-604.
- [3] C. CAMACHO; A. LINS NETO; P. SAD: *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geom., 20 (1984), no. 1, 143-174.
- [4] C. CAMACHO; A. P. SAD: *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16º Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro (1987).
- [5] F. CANO; D. CERVEAU: *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*. Acta Math., 169 (1992), 1-103.
- [6] M. CARNICER: *The Poincaré Problem in the nondicritical case*. Annals of Mathematics. 140 (1994) 289-294 .
- [7] D. CEVEAU; A. LINS-NETO: *Holomorphic foliations in  $\mathbb{P}^2$  having an invariant algebraic curve*. Ann. Inst. Fourier. 41, 4 (1991). 883-903.
- [8] N. CORRAL; P. FERNÁNDEZ: *Isolated Invariant Curves of a Foliation*. A aparecer en Proceeding of the AMS.
- [9] X. GÓMEZ-MONT; J. SEADE; A. VERJOVSKY: *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*. Math. Ann. 291 (1991), 737-751.
- [10] A. LINS NETO: *Some examples for the Poincaré and Painlevé Problems* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 35 (2002) 231-266.
- [11] J. PEREIRA: *On the Poincaré Problem for Foliations of General Type* Math. Ann., 323 (2) (2002) 217-226.
- [12] H. POINCARÉ: *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* I y II, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 5 y 11, (1897) 161-191 y 193-239.

- [13] A. SEIDENBERG: *Reduction of the singularities of the differentiable equation  $Ady = Bdx$* . Amer. J. Math., 90 (1968), 248-269.
- [14] M. SOARES: *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations*, Invent. Math. **128** (1997), 495–500.

*Percy Fernández Sánchez*  
*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA*  
*Universidad Nacional de Ingeniería, UNI*  
*Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP*  
*pefernan@pucp.edu.pe*