Pro Mathematica Vol. XVIII, Nos. 35-36, 2004

INVARIANCIA DEL TENSOR CURVATURA EN ESTRUCTURAS H-EQUIVALENTES

Rodrigo Martínez** y **Cristino Guzmán

Resumen

Dos estructuras: $\mu = (M, \nabla, g)$ *y* $\overline{\mu} = (M, \overline{\nabla}, g)$ *tales que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla_U g)(V, W) = A(U, V, W), \quad A(U, V, W) \in C^{\infty}(M) \\ S(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla_U g)(V, W) = 0 \\ \overline{S}(U, V) = \overline{\nabla}_U V - \overline{\nabla}_V U - [U, V], \quad U, V, W \in \chi(M), \end{array} \right. \tag{1}$$

son H*-equivalentes, si existe una aplicación*
$H : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$,
tal que:

$$\overline{\nabla}_U V = \nabla_U V + H(U, V). \tag{2}$$

✎ *Universidad de Oriente, Venezuela.*

Se analiza el caso cuando:

$$A(U,V,W)=0,\ S(U,V)=\gamma(\Omega(U)V-\Omega(V)U),\ \overline{S}(U,V)=0,$$

donde $\Omega \in \wedge(M)$, $\quad \gamma \in C^{\infty}(M)$ y $H(U,V)$ tiene componentes:

$$H_{ij}^{k}=\alpha\Omega_i\delta_j^k+\beta\Omega_j\delta_i^k, \quad \alpha,\beta \in C^{\infty}(M) \tag{3}$$

Para lograr la invarianza del tensor curvatura en estas estructuras H-equivalentes, se introduce el tensor "p" con componentes

$$p_{ij}=\overline{\nabla}_i\Omega_j+\gamma\Omega_i\Omega_j, \quad \gamma=(\alpha-\beta) \tag{4}$$

que permite establecer la relación entre los tensores de curvatura R y $\overline{R}$, dada por:

$$R_{ijk}^{\ell}=\overline{R}_{ijk}^{\ell}+\alpha(p_{ji}-p_{ij})\delta_k^{\ell}+\beta(p_{jk}\delta_i^{\ell}-p_{ik}\delta_j^{\ell}), \tag{5}$$

para luego demostrar una invariancia del tipo:

$$\mathcal{K}_{ijk}^{\ell}(R)=\mathcal{K}_{ijk}^{\ell}(\overline{R}).$$

Introducción

El estudio de las estructuras H-equivalentes [1], ha permitido resolver problemas abiertos en la mecánica desde el siglo antes pasado y, particularmente generalizar los espacios Ω-transformables [3]. Con ellas, se ha logrado geometrizar espacios con conexión afín, donde la propiedad de invariancia de elementos que describen su geometría, tal como su curvatura escalar, se conserva. Cuando se relaciona la curvatura con un tensor definido en función de una 1-forma, se logra una invariancia entre las curvaturas mucho más generalizada, pues se logra a través del tensor curvatura generalizado de Weyl. Este trabajo trata esta temática y la teoría que se desarrollará permitirá luego, con ciertas propiedades adicionales sobre las 1-formas, cotejar los resultados obtenidos con los ya establecidos en la teoría de curvatura.

1. Nociones Previas

En principio, se utilizarán las siguientes designaciones:

M - Variedad diferenciable con coordenadas locales en cada $x \in M$: $\{x^1, \cdots, x^N\}$.

$C^\infty(M)$ - Anillo de las funciones infinitamente diferenciables sobre M.

$\chi(M)$ - Algebra de Lie de los campos vectoriales U, V, W, etc, que son $C^\infty(M)$.

$T(M)$ - Espacio tangente a M con base $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$, $i = \overline{1, N}$.

$\wedge(M)$ - Algebra de Grassman de las 1-formas Ω sobre M.

$h^i \ell_i \equiv \sum_{i=1}^{N} h^i \ell_i$ - Convenio de suma de Einstein.

Las definiciones y resultados siguientes están establecidos en [1] y [2].

Definición 1 *La aplicación* $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$, *que a cada par* (U, V), *le corresponde un campo vectorial* $\nabla_U V$; *que es* $C^\infty(M)$-*lineal respecto a* U; $I\!R$-*lineal respecto a* V *y además cumple*

$$\nabla_U(f\,V) = U(f)V + f\nabla_U V, \tag{1.1}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$, *define la derivada covariante de* V *en la dirección de* U.

Observación: La forma bilineal $\Gamma : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(U, V) = \nabla_U V - U\,V \\ \Gamma(\partial_i, \partial_j) = \Gamma^n_{ij}(x)\partial_n - \partial_i\partial_i, \end{cases} \tag{1.2}$$

se conoce como *conexión afín*. Se observa entonces de (1.2) que existe una relación biunívoca entre ∇ y Γ; por esto, de ahora en adelante ∇ se llamará conexión afín, y a la pareja $A_N = (M, \nabla)$, *espacio con conexión afín.*

Definición 2 *Sea $A_N = (M, \nabla)$ un espacio con conexión afín. Se define en este espacio una métrica formal "g" como el tensor $g(U,V)$ que satisface:*

$$\begin{cases} g(U,V) = g(V,U), \quad U,V \in \chi(M) \\ g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}(x) \in C^{\infty}(M), \quad x \in M \\ det(g_{ij}(x)) = |g| \neq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

De (1.3) se deducen que existen g^{ik} tales que $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$- Tensor de Kronecker. La tripleta $\mu = (M, \nabla, g)$ se llamará *estructura con conexión afín.*

En el estudio de la geometría de $\mu = (M, \nabla, g)$ los campos vectoriales de torsión S y curvatura R juegan un papel fundamental. Por esto, en términos de la derivada covariante, se pueden definir como:

$$S(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \tag{1.4}$$

$$R(U,V)W = [\nabla_U, \nabla_V]W - \nabla_{[U,V]}W, \tag{1.5}$$

para todo $U, V, W \in \chi(M)$ y $[\,,\,] : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$, tal que

$$[U,V]f = U(V(f)) - V(U(f)), \tag{1.6}$$

para toda $f \in C^{\infty}(M)$, define el corchete de Lie.

Definición 3 *Las estructuras $\mu = (M, \nabla, g)$ y $\overline{\mu} = (M, \overline{\nabla}, g)$, definidas por:*

$$\begin{cases} (\nabla_U g)(V,W) = A(U,V,W) \in C^{\infty}(M) \\ S(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_U g)(V,W) = 0 \\ \overline{S}(U,V) = \overline{\nabla}_U V - \overline{\nabla}_V U - [U,V], \end{cases} \tag{1.8}$$

son H-equivalentes, si existe una aplicación $H : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$, tal que

$$H(U,V) = \overline{\nabla}_U V - \nabla_U V. \tag{1.9}$$

Un resultado importante lo constituye el siguiente lema, donde se muestran relaciones entre H, S y $\overline{S}$ y entre H, R y $\overline{R}$.

Lema 1 *Sean* $\mu = (M, \nabla, g)$ *y* $\overline{\mu} = (M, \overline{\nabla}, g)$, *estructuras* H*-equivalentes, entonces*

$$g(H(U, V), W) + g(V, H(U, W)) = A(U, V, W) \tag{1.10}$$

$$S(U, V) = \overline{S}(U, V) + H(V, U) - H(U, V) \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} R(U, V)W = \overline{R}(U, V)W + (\overline{\nabla}_V H)(U, W) - \\ (\overline{\nabla}_U H)(V, W) + H(\overline{S}(V, U), W) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$g(\overline{R}(U, V)W_1, W_2) + g(W_1, \overline{R}(U, V)W_2) = 0. \tag{1.13}$$

La prueba de este Lema puede verse en [2].

2. Invariancia del Tensor Curvatura en Estructuras H-Equivalentes

La invariancia del tensor curvatura se logra en aquellas estructuras que son H-equivalentes con las estructuras de Lyra, las cuales se definen a través de las relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla_U g)(V, W) = 0 \\ S(U, V) = \phi\{\Omega(U)V - \Omega(V)U\}, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

donde $\phi \in C^\infty(M)$, $\Omega \in \wedge(M)$. En [1], se han analizado una serie de propiedades para estas estructuras, de las cuales se pueden resaltar:

Lema 2 *En las estructuras de Lyra se tiene:*

$$\sigma\{R(U, V)W + d(\phi\Omega)(U, V)W\} = 0, \tag{2.2}$$

donde σ *es la suma cíclica respecto a* V, U, W *y*

$$d\Omega(U, V) = U(\Omega(V)) - V(\Omega(U)) - \Omega([V, V]) \tag{2.3}$$

con $\Omega \in \wedge(M)$, d *es la derivada exterior de* Ω.

De aquí, evidentemente se obtiene que si $\omega = \phi\Omega \in \wedge(M)$ es tal que $d\omega = 0$, entonces las estructuras de Lyra coinciden con las estructuras Riemannianas con torsión no simétrica, ya que $S(U,V) \neq 0$ y $\sigma\{R(U,V)W\} = 0$, característica propia de estas estructuras.

Se introduce ahora el tensor "p", definido por:

$$p(U,V) = (\overline{\nabla}_U\Omega)(V) + \gamma\Omega(U)\Omega(V). \tag{2.4}$$

Del estudio de este tensor [2], se tiene el siguiente resultado:

Lema 3 *Si (2.4) es dado, entonces se tiene:*

$$d\Omega(U,V) + \Omega(\overline{S}(V,U)) = p(U,V) - p(V,U) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_U p)(V,W) - (\overline{\nabla}_V p)(U,V) &= \Omega(\overline{R}(V,U)W) + \\ + p(\overline{S}(V,U),W) + \gamma\{\Omega(V)p(U,W) &- \Omega(U)p(V,W) + \\ &+ \Omega(W)d\Omega(U,V)\},\end{aligned} \tag{2.6}$$

Como consecuencia se tiene que si $\gamma = 0$ y la estructura $\overline{\mu} = (M,\overline{\nabla},g)$ es de Lyra, entonces:

$$d\Omega(U,V) = p(U,V) - p(V,U) \tag{2.7}$$

$$(\overline{\nabla}_U p)(V,W) - (\overline{\nabla}_V p)(U,W) = \Omega\{\overline{R}(V,U)W + \phi p(V,W)U\}. \tag{2.8}$$

Caso Especial:

Sean $\mu = (M,\nabla,g)$ y $\overline{\mu} = (M,\overline{\nabla},g)$ estructuras con conexión afín ∇ y $\overline{\nabla}$. Supongamos que μ está definida por:

$$\begin{cases} (\nabla_U g)(V,W) = 2\alpha\Omega(U)g(V,W) + \beta(\Omega(V)g(W,U) + \Omega(W)g(U,V) \\ S(U,V) = 0, \qquad \alpha,\beta \in I\!R \end{cases}$$

y $\overline{\mu}$ está definida por (2.1), con $\phi = (\alpha - \beta)$. Ellas, así definidas, son H-equivalentes y el campo vectorial H, tiene componentes

$$H_{ij}^k = \alpha\Omega_i\delta_j^k + \beta\Omega_j\delta_i^k, \tag{2.9}$$

ahora, si en (2.4) suponemos que $\gamma = \alpha - \beta$, entonces entre las curvaturas R y $\overline{R}$ se tiene la relación tensorial

$$R_{ijk}^\ell = \overline{R}_{ijk}^\ell + \alpha(p_{ji} - p_{ij})\delta_k^\ell + \beta(p_{jk}\delta_i^\ell - p_{ik}\delta_j^\ell). \tag{2.10}$$

Esto se logra sustituyendo (2.9) y (2.1) en la relación (1.12) del Lema 1.

Las siguientes designaciones nos permitirán definir el Tensor de Weyl generalizado, el cual será clave para lograr la invariancia de los tensores curvatura.

Designemos por

$$Q_{ik}(R) = aR_{ik} + bR_{ki}, \tag{2.11}$$

$$a = \frac{\rho}{\alpha^2 - \rho^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\beta^2 - \rho^2}, \quad \rho = a + \beta(1 - N)$$

$$R_{ik} = R^{\ell}_{i\ell k}, \quad R = R_{ik}g^{ik},$$

entonces el tensor:

$$\mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(R) = R^{\ell}_{ijk} + \alpha(Q_{ij}(R) - Q_{ji}(R))\delta^{\ell}_{k} + \beta(Q_{jk}(R)\delta^{\ell}_{i} - Q_{ik}(R)\delta^{\ell}_{j}), \tag{2.12}$$

es conocido como el *Tensor de Weyl Generalizado.*

Podemos establecer entonces el siguiente

Teorema 1 *Si en las estructuras H-equivalentes μ y $\overline{\mu}$ se cumplen (2.9), (2.1) y además $(\alpha^2 - \rho^2) \neq 0$. Entonces los tensores de curvatura R y $\overline{R}$ son invariantes bajo la acción del tensor generalizado de Weyl; es decir:*

$$\mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(R) = \mathcal{K}_{ijk}(\overline{R}). \tag{2.13}$$

Demostración
En (2.10) se hace la contracción $\ell = j$ y sumamos desde $j = 1$ a N, para obtener:

$$T^{j}_{ijk} = R^{j}_{ijk} - R^{j}_{ijk} = \alpha(p_{ki} - p_{ik}) + \beta(N - 1)p_{ik},$$

poniendo $T^{j}_{ijk} = T_{ik}$ y usando las designaciones anteriores para a, b y ρ resulta:

$$p_{ik} = \frac{\rho T_{ik} + \alpha T_{ki}}{\alpha^2 - \rho^2}$$

o equivalentemente

$$p_{ik} = a(R_{ik} - \overline{R}_{ik}) + b(R_{ki} - \overline{R}_{ki}),$$

introduciendo (2.11), se deduce,

$$p_{ik} = Q_{ik}(R - \overline{R}) = Q_{ik}(R) - Q_{ik}(\overline{R}), \tag{2.14}$$

luego, sustituyendo (2.14) en la relación (2.10) y usando (2.12), se concluye

$$\mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(R) = \mathcal{K}_{ijk}(\overline{R}).$$

□

Ejemplos

1.- En las estructuras proyectivas se preserva la invariancia de los tensores curvaturas, bajo el tensor generalizado de Weyl. En efecto:

Dos estructuras μ y $\overline{\mu}$ son proyectivas si las ecuaciones de las geodésicas de estas estructuras tienen las mismas soluciones; es decir,

$$\overline{\nabla}_V V = \lambda_1(t)V, \qquad \nabla_V V = \lambda_2(t)V,$$

donde λ_1 y λ_2 son curvas en M, tales que

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \dot{\lambda}_i(t) = V(\lambda_i(t)), \qquad i = 1, 2.$$

En [2] se prueba que μ y $\overline{\mu}$ son H-equivalentes si y solo si,

$$H^k_{ij} + H^k_{ji} = \phi(\Omega_i \delta^k_j + \Omega_j \delta^k_i),$$

comparando con (2.9) se deduce que $\phi = \alpha + \beta$ y el Tensor de Weyl generalizado toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(R) &= R^{\ell}_{ijk} + \alpha(a-b)(R_{ij} - R_{ji})\delta^{\ell}_k + \\ &\quad +\beta\left\{(aR_{ik} + bR_{ki})\delta^{\ell}_j - (aR_{jk} + bR_{kj})\delta^{\ell}_i\right\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

La relación (2.15) y (2.10), demuestra la invariancia del tensor curvatura respecto a las aplicaciones geodésicas. Además si se cumple $R_{ij} = R_{ji}$, entonces (2.15) se transforma en

$$\mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(R) = R^{\ell}_{ijk} + \frac{R}{(N-1)}(g_{ik}\delta^{\ell}_j - g_{jk}\delta^{\ell}_i),$$

relación conocida como el Tensor de Curvatura Concircular.

2. En las estructuras conformes H-equivalentes con las estructuras de Lyra, se cumple el teorema anterior. En efecto:

   Las estructuras conformes (o de Weyl), son una subclase de las estructuras H-equivalentes a las estructuras de Lyra, que se caracterizan por:

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_U g)(V,W) = 2\Omega(U)g(V,W) \\ S(U,V) = 0. \end{cases}$$

   El tensor $\mathcal{K}$ tiene las componentes:

$$\mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(\overline{R}) = \overline{R}^{\ell}_{ijk} + (Q_{jk}(\overline{R}) - Q_{ij}(\overline{R}))\delta^{\ell}_{k} + Q_{jk}(\overline{R})\delta^{\ell}_{i} - Q_{ik}(\overline{R})\delta^{\ell}_{j},$$

   donde

$$Q_{ik}(\overline{R}) = \frac{(1+\frac{1}{N})\overline{R}_{ik} + \frac{1}{N}R_{ki}}{(N-2)}, \qquad N > 2.$$

   Ahora, cuando $\Omega \in \wedge(M)$ es cerrada, entonces

$$Q_{ik}(\overline{R}) = \frac{1}{(N-2)}\overline{R}_{ik},$$

   por consiguiente,

$$\mathcal{K}^{\ell}_{ijk}(\overline{R}) = \overline{R}^{\ell}_{ijk} + Q_{jk}(\overline{R}\delta^{\ell}_{i} - Q_{ik}(\overline{R})\delta^{\ell}_{j},$$

   conocido éste como el Tensor de curvatura conforme.

Agradecimientos. Al Consejo de Investigación de la Universidad de Oriente, Venezuela, el cual ha contribuido con el soporte de este trabajo con el proyecto de investigación CI-5-1003-1000/01.

Referencias

[1] Rodrigo Martínez, Rafael Ramírez: *Lyra spaces. Their application to mechanics.* Hadronic Journal, **12**, (1989) 223-236. U.S.A.

[2] Rodrigo Martínez: *Espacios de conexión afín H-equivalentes y su importancia en la mecánica.* Tesis doctoral U.C.V. (1991).

[3] RODRIGO MARTÍNEZ, MANUEL SALAZAR: *Sobre las Ω-transformaciones en una variedad con conexión afín.* PRO MATHEMATICA, Vol XV, Nos. 29-30, Perú, (2001).

[4] N.S. SIÑIUKOV: *Geodesic Mappings of Riemannian spaces.* Nauka, Moscú, (1979).

Rodrigo Antonio Martínez Ordaz
yigo54@cantv.net

Cristino Guzmán
Universidad de Oriente
Núcleo de Anzoátegui
Venezuela